Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. К. Юлдашев, Неявное эволюционное интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейным интегральным отклонением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 38–44

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu672>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:18:30

УДК 517.968.22

НЕЯВНОЕ ЭВОЛЮЦИОННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С НЕЛИНЕЙНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ ОТКЛОНЕНИЕМ

Т. К. Юлдашев

Ошский государственный юридический институт,
714000, Кыргызстан, г. Ош, ул. Салиева, 40 б.

E-mail: tursunbay@rambler.ru

Изучается однозначная разрешимость и устойчивость решения неявного интегрального уравнения Вольтерра с нелинейными интегральными отклонениями при заданном начальном условии. Доказывается теорема о существовании и единственности непрерывного решения уравнения на рассматриваемом отрезке. При этом применяется метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: неявное интегральное уравнение Вольтерра, теорема существования и единственности решения.

В данной работе рассматривается уравнение

$$f\left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s)u\left[\delta\left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau)u(\tau)d\tau\right)\right]ds\right) = 0, \quad t \in T_1 \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(t) = g(t), \quad t \in E_0 \equiv (-\infty; t_1], \quad (2)$$

где $K_i(t, s) \in C(T_{-\infty}^2)$, $i = 1, 2$, $T_{-\infty} \equiv (-\infty; T]$, $f(t, x) \in C(T_1 \times \mathbb{R})$, $T_1 \equiv [t_1; T]$, $0 < t_1 < T < \infty$, $\delta(t, x) \in C(T_{-\infty} \times \mathbb{R})$, $-\infty < \delta(t, x) \leq T$, $g(t) \in C(E_0)$.

Отметим, что в работе [1] рассмотрен вопрос об однозначной разрешимости нелинейного интегрального уравнения Вольтерра первого рода вида

$$\int_{t_0}^t K(t, s)u(s)ds = f(t, u(t)), \quad t \in [t_1, T]. \quad (3)$$

Далее в работах [2–4] были развиты и обобщены идеи работы [1], а в работе [5] рассматривается дискретный аналог уравнения (3).

В настоящей работе доказывается теорема о существовании, единственности и устойчивости по начальной функции (2) решения уравнения (1) на отрезке T_1 . При этом применяется метод последовательных приближений в сочетании с методом сжимающих отображений.

В заданном виде уравнения (1) невозможно применять метод последовательных приближений для установления разрешимости данного уравнения.

Турсун Камалдинович Юлдашев (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. естественно-научных дисциплин.

Уравнение (1) можно записать в виде

$$u_{k+1}(t) = u_k(t) - f\left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s)u_k\left[\delta\left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau)u_k(\tau)d\tau\right)\right]ds\right), \quad t \in T_1.$$

Но и в таком виде для уравнения (1) не проходят известные приемы метода последовательных приближений, поскольку не выполняется условие метода сжимающих отображений, и при такой записи уравнения невозможно показать, что

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| \leq \rho(t) \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\|,$$

где $\rho(t) < 1$. Поэтому здесь необходимо применять другие преобразования уравнения (1) с учётом начальной функции (2).

На отрезке $T_0 = [t_0, T]$ ($0 < t_0 < t_1$) вводится новая функция $K_0(t)$, такая, что $K_0(t) \in C(T_0)$, $0 < K_0(t)$. Принимаются обозначения

$$\varphi(t, s) = \int_s^t K_0(\tau)d\tau, \quad \varphi(t, t_0) = \varphi(t), \quad t \in T_0 \equiv [t_0; T].$$

Ясно, что $\varphi(t, s) = \varphi(t) - \varphi(s)$.

Под решением уравнения (1) понимается непрерывная на отрезке T_1 функция $u(t)$, удовлетворяющая уравнению (1) при начальном условии (2) и условии Липшица:

$$\|u(t) - u(s)\| \leq L_0 |t - s|.$$

Здесь используется интеграл

$$\int_{t_0}^t K_0(s)u(s)ds,$$

который понимается как сумма двух следующих интегралов:

$$\int_{t_0}^t K_0(s)u(s)ds = \int_{t_0}^{t_1} K_0(s)g(s)ds + \int_{t_1}^t K_0(s)u(s)ds,$$

где $u(s)$ — неизвестная функция.

Тогда уравнение (1) при начальном условии (2) запишется в виде

$$\begin{aligned} u(t) + \int_{t_0}^t K_0(s)u(s)ds &= u(t) + \int_{t_0}^t K_0(s)u(s)ds + \\ &+ f\left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s)u\left[\delta\left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau)u(\tau)d\tau\right)\right]ds\right), \quad t \in T_1. \end{aligned}$$

Отсюда, используя резольвенту ядра $[-K_0(s)]$, имеем

$$\begin{aligned}
 u(t) = & \int_{t_0}^t K_0(s)u(s)ds + u(t) + \\
 & + f\left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s)u\left[\delta\left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau)u(\tau)d\tau\right)\right]ds\right) + \\
 & + \int_{t_0}^t K_0(s)\exp(-\varphi(t, s)) \cdot \left\{ -u(s) - \int_{t_0}^s K_0(\tau)u(\tau)d\tau - \right. \\
 & \left. - f\left(s, \int_{-\infty}^s K_1(s, \tau)u\left[\delta\left(\tau, \int_{-\infty}^{\tau} K_2(\tau, \zeta)u(\zeta)d\zeta\right)\right]d\tau\right)\right\}ds, \quad t \in T_1. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Применяя к (4) формулу Дирихле, получаем

$$\begin{aligned}
 u(t) = & \int_{t_0}^t H(t, s)u(s)ds + \\
 & + \left(u(t) + f\left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s)u\left[\delta\left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau)u(\tau)d\tau\right)\right]ds\right)\right) \times \\
 & \times \exp(-\varphi(t)) + \int_{t_0}^t K_0(s)\exp(-\varphi(t, s)) \cdot \left\{ u(t) - u(s) + \right. \\
 & + f\left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s)u\left[\delta\left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau)u(\tau)d\tau\right)\right]ds\right) - \\
 & \left. - f\left(s, \int_{-\infty}^s K_1(s, \tau)u\left[\delta\left(\tau, \int_{-\infty}^{\tau} K_2(\tau, \zeta)u(\zeta)d\zeta\right)\right]d\tau\right)\right\}ds, \quad t \in T_1, \quad (5)
 \end{aligned}$$

где

$$H(t, s) \equiv K_0(s)\exp(-\varphi(t, s)) - \int_s^t K_0(\tau)\exp(-\varphi(t, \tau)) \cdot K_0(\tau, s)d\tau. \quad (6)$$

Уравнение (1) при начальном условии (2) эквивалентно уравнению (5).

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются следующие условия:

$$f(t, x) \in \text{Bnd}(M) \cap \text{Lip}\{L_1(t)|x\}, \quad 0 < M = \text{const}, \quad 0 < L_1(t) \in C(T_1);$$

$$\delta(t, x) \in \text{Lip}\{L_2(t)|x\}, \quad 0 < L_2(t) \in C(T_0).$$

Тогда уравнение (1) при начальном условии (2) имеет единственное решение на отрезке T_1 . Это решение устойчиво по начальной функции (2).

Доказательство. Итерационный процесс Пикара определим следующим образом:

$$\begin{cases} u_0(t) = g(t), & t \in E_0, \\ u_0(t) = I(t), & t \in T_1; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} u_{k+1}(t) = g(t), & t \in E_0, \\ u_{k+1}(t) = I_k(t), & t \in T_1, \end{cases} \quad (8)$$

где

$$I(t) \equiv f(t, 0) \exp(-\varphi(t)) + \int_{t_0}^t K_0(s) \exp(-\varphi(t, s)) [f(t, 0) - f(s, 0)] ds,$$

$$\begin{aligned} I_k(t) \equiv & \int_{t_0}^t H(t, s) u_k(s) ds + \left(u_k(t) + \right. \\ & + f \left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s) u_k \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_k(\tau) d\tau \right) \right] ds \right) \exp(-\varphi(t)) + \\ & + \int_{t_0}^t K_0(s) \exp(-\varphi(t, s)) \left\{ u_k(t) - u_k(s) + \right. \\ & + f \left(t, \int_{-\infty}^t K_1(t, s) u_k \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_k(\tau) d\tau \right) \right] ds \right) - \\ & \left. - f \left(s, \int_{-\infty}^s K_1(s, \tau) u_k \left[\delta \left(\tau, \int_{-\infty}^{\tau} K_2(\tau, \zeta) u_k(\zeta) d\zeta \right) \right] d\tau \right) \right\} ds, \end{aligned}$$

Для нулевого приближения $u_0(t)$ в силу условия теоремы из (7) получим оценку

$$\begin{aligned} |u_0(t)| & \leq \|f(t, 0)\| \exp(-\varphi(t)) + \int_{t_1}^t K_0(s) \exp(-\varphi(t, s)) \cdot \|f(t, 0) - f(s, 0)\| ds \leq \\ & \leq M \cdot P(t, t_1), \quad t \in T_1, \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$P(t, s) \equiv \exp(-\varphi(t)) + 2 \int_s^t K_0(\tau) \exp(-\varphi(t, \tau)) d\tau.$$

Для функции $H(t, s)$ из (6) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|H(t, s)\| &\leq \|K_0(t, s)\| \exp(-\varphi(t, s)) + \int_s^t K_0(\tau) \|K_0(t, \tau)\| \exp(-\varphi(t, \tau)) d\tau \leq \\ &\leq \|K_0(t, s)\| \cdot N(t, s), \quad (t, s) \in T_1^2, \quad (10) \end{aligned}$$

где

$$N(t, s) \equiv \exp(-\varphi(t, s)) + \int_s^t K_0(\tau) \exp(-\varphi(t, \tau)) d\tau.$$

Тогда с учётом (10) в силу условия теоремы из (8) получаем, что для произвольного натурального числа k справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\| &\leq \int_{t_1}^t \|H(t, s)\| \cdot \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| ds + \left[\|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| + \right. \\ &\quad + L_1(t) \cdot \int_{t_1}^t \|K_1(t, s)\| \cdot \left\| u_k \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_k(\tau) d\tau \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \left. - u_{k-1} \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_{k-1}(\tau) d\tau \right) \right] \right\| ds \right] \cdot P(t, t_1) \leq \\ &\leq \int_{t_1}^t \|N(t, s)\| \cdot \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| ds + \left\{ \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| + \right. \\ &\quad + L_1(t) \cdot \int_{t_1}^t \|K_1(t, s)\| \cdot \left[\left\| u_k \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_k(\tau) d\tau \right) \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - u_{k-1} \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_k(\tau) d\tau \right) \right] \right\| + \right. \\ &\quad + \left\| u_{k-1} \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_k(\tau) d\tau \right) \right] - \right. \\ &\quad \left. \left. - u_{k-1} \left[\delta \left(s, \int_{-\infty}^s K_2(s, \tau) u_{k-1}(\tau) d\tau \right) \right] \right\| ds \right\} \cdot P(t, t_1) \leq \\ &\leq \int_{t_1}^t N(t, s) \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| ds + \left[\|u_k(t) - u_{k-1}(t)\| + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + L_1(t) \cdot \int_{t_1}^t \|K_1(t, s)\| \cdot \left(\|u_k(s) - u_{k-1}(s)\| + \right. \\
 & \left. + L_0 L_2(s) \int_{t_1}^s \|K_2(s, \tau)\| \cdot \|u_k(\tau) - u_{k-1}(\tau)\| d\tau \right) ds \Big] \cdot P(t, t_1) \leq \\
 & \leq \rho(t, t_1) \cdot \|u_k(t) - u_{k-1}(t)\|, \quad t \in T_1, \quad (11)
 \end{aligned}$$

где $\rho(t, t_1)$ определяется из следующей формулы:

$$\begin{aligned}
 \rho(t, s) \equiv & \int_s^t \|K_0(t, \tau)\| \cdot N(t, \tau) d\tau + \\
 & + \left[1 + L_1(t) \cdot \int_s^t \|K_1(t, \xi)\| \cdot \left(1 + L_0 L_2(\xi) \int_s^\xi \|K_2(\xi, \tau)\| d\tau \right) d\xi \right] \cdot P(t, s).
 \end{aligned}$$

Функция $0 < K_0(\xi)$ выбирается так, чтобы

$$\varphi(t, s) = \int_s^t K_0(\xi) d\xi \gg 1.$$

А это значит, что $\exp(-\varphi(t)) \ll 1$.

Итак, функции $N(t, s)$ и $P(t, s)$ — малые. Тогда $L_1(t)$ и $L_2(t)$ можно выбрать так, чтобы $\rho(t, s) < 1$.

Отсюда в силу оценок (9) и (11) следует, что оператор в правой части (5) является сжимающим. Следовательно, согласно принципу Шаудера о неподвижной точке, существует единственное решение уравнения (1) с начальным условием (2) на отрезке T_1 .

Теперь покажем устойчивость решения уравнения (1) по начальной функции (2). Пусть $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — две начальные функции на начальном отрезке E_0 . Тогда на отрезке T_1 им соответствуют два решения $u_1(t)$ и $u_2(t)$ уравнения (1).

Положим $\|p(t)\| \equiv \|g_1(t) - g_2(t)\| < \delta$, где $\delta > 0$ — малое число. Тогда из (5) получаем, что

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| \leq \rho(t_1, t_0) \cdot \|p(t)\| + \rho(t, t_1) \cdot \|u_1(t) - u_2(t)\|. \quad (12)$$

Так как $\rho(t, s) < 1$ для всех $(t, s) \in T_0^2$, то из (12) окончательно имеем

$$\|u_1(t) - u_2(t)\| < \varepsilon, \quad \varepsilon = \delta \cdot (1 - \rho(t, t_1))^{-1}. \quad \square$$

Итак, в данной работе впервые рассмотрено неявное интегральное уравнение Вольтерра. Доказана теорема о существовании и единственности непрерывного решения уравнения такого типа с нелинейными интегральными отклонениями при заданном начальном условии и на рассматриваемом отрезке.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Юлдашев Т. К., Артыкова Ж. А. Интегральное уравнение Вольтерра первого рода с нелинейной правой частью // *Складні системи і процеси*, 2005. — № 1, 2. — С. 3–5.
2. Юлдашев Т. К., Артыкова Ж. А. Интегральные уравнения Вольтерра первого рода с нелинейной правой частью и сложным отклонением / В сб.: *Геометрия в Одессе — 2005. Дифференц. геометрия и её приложения*: Тез. международн. семинара (23–29 мая 2005 г.). — Одесса, 2005. — С. 112–113.
3. Yuldashev T. K., Artykova J. A. Volterra functional integral equation of the first kind with nonlinear right-hand side and variable limits of integration // *Укр. мат. журн.*, 2006. — Т. 58, № 9. — С. 1285–1288.
4. Юлдашев Т. К., Артыкова Ж. А. Эволюционное интегральное уравнение Вольтерра с интегральными отклонениями // *Вестн. УлГТУ*, 2006. — № 3. — С. 18–20.
5. Yuldashev T. K. On a summary equation with weak nonlinear right-hand side // *Advanced stud. in contemp. math.*, 2007. — Vol. 15, No. 1. — P. 95–98.

Поступила в редакцию 30/I/2009;
в окончательном варианте — 01/III/2009.

MSC: 45D05

**IMPLICIT EVOLUTION VOLTERRA INTEGRAL EQUATION OF
THE FIRST KIND WITH NONLINEAR INTEGRAL DELAY**

T. K. Yuldashev

Osh State Law Institute,
40 b, Salieva str., Osh, Kyrgyzstan, 714000.

E-mail: tursunbay@rambler.ru

We prove a theorem of existence, uniqueness and stability of solution of the implicit evolution Volterra integral equation with respect to the initial value condition on the given finite segment. Here we use the method of successive approximation in combination with the method of compressing mapping.

Key words: *implicit Volterra integral equation, existence and uniqueness of solutions.*

Original article submitted 30/I/2009;
revision submitted 01/III/2009.

Tursun K. Yuldashev (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Science Education.