Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Зотеев, О сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно параметрической дискретной модели, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 133–141

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:44:58

УДК 681.5.015

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ

*В. Е. Зотеев*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: zoteev@pm.samgtu.ru

Рассматриваются достаточные условия сходимости итерационной процедуры вычисления среднеквадратичных оценок коэффициентов разностных уравнений, описывающих временные ряды результатов эксперимента.

Ключевые слова: обобщенная регрессионная модель, среднеквадратичное оценивание, сходимость итерационной процедуры.

Одним из эффективных методов параметрической идентификации систем различной физической природы является метод, в основе которого лежат линейно параметрические дискретные модели [1, 2]. Эти модели в форме стохастических разностных уравнений связывают результаты измерений нескольких последовательных значений нелинейной функциональной зависимости, описывающей реакцию системы на некоторое типовое тестовое воздействие. Известные соотношения, связывающие коэффициенты разностного уравнения с параметрами системы, позволяют свести задачу параметрической идентификации к среднеквадратичному оцениванию коэффициентов разностного уравнения. Формулировка задачи среднеквадратичного оценивания вектора λ коэффициентов разностного уравнения в виде обобщенной регрессионной модели

$$b = F\lambda + P_{\lambda}\varepsilon,$$

где P_{λ} — невырожденная матрица линейного преобразования вектора ε случайной помехи в результатах наблюдений, позволяющая описать алгоритм численного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения совокупностью рекуррентных формул [1, 2]:

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}^{(k)} &= \left[F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(k-1)}}^{-1} F \right]^{-1} F^T \Omega_{\hat{\lambda}^{(k-1)}}^{-1} b, \quad \Omega_{\hat{\lambda}^{(k-1)}} = P_{\hat{\lambda}^{(k-1)}} P_{\hat{\lambda}^{(k-1)}}^T, \\ P_{\hat{\lambda}^{(k-1)}} &= P_{\lambda} \left(\hat{\lambda}^{(k-1)} \right),\end{aligned}\tag{1}$$

где $\hat{\lambda}^{(k)}$ — среднеквадратичная оценка вектора коэффициентов, вычисленная на k -той итерации ($k \in \mathbb{N}$), $P_{\hat{\lambda}^{(0)}} = E$ — единичная матрица. В данной работе рассматриваются достаточные условия сходимости итерационной процедуры, описываемой формулами (1).

Зотеев Владимир Евгеньевич — доцент кафедры прикладной математики и информатики; к.ф.-м.н., доцент.

Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_1 = q_1(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n), \\ \hat{\lambda}_2 = q_2(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n), \\ \hat{\lambda}_n = q_n(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n), \end{cases}$$

которая в матричной форме имеет вид

$$\hat{\lambda} = q(\hat{\lambda}), \quad (2)$$

где вектор-функция $q(\hat{\lambda})$ описывается выражением

$$q(\hat{\lambda}) = \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) b. \quad (3)$$

В n -мерном пространстве введём норму вектора λ и матрицы W следующим образом ($i = 1, 2, \dots, n$): $\|\lambda\| = \max_i |\lambda_i|$, $\|W\| = \max_i \sum_{j=1}^n |w_{ij}|$.

ТЕОРЕМА 1 (ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ). Пусть функции $q_i(\hat{\lambda})$ и $\frac{\partial q_i(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}_j}$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$) определены и непрерывны в известной замкнутой области G действительного n -мерного пространства E^n , причём в области G выполняется неравенство

$$\alpha = \max_{\hat{\lambda} \in G} \left[\max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} \right| \cdot \left\| \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \right\| \cdot \|e\| \right] < 1, \quad (4)$$

где ω_{ik} — элементы матрицы $\Omega^{-1}(\hat{\lambda})$ размера $N \times N$; $e = b - F\hat{\lambda}$ — вектор остатков. Тогда, если последовательные приближения

$$\hat{\lambda}^{(k)} = q(\hat{\lambda}^{(k-1)}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

не выходят из области G : $\hat{\lambda}^{(k)} \in G$, то:

- 1) независимо от выбора начального приближения $\hat{\lambda}^{(0)} \in G$ процесс итерации (5) сходится, то есть существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k)} = \bar{\lambda}$;
- 2) предельный вектор $\bar{\lambda}$ является единственным решением уравнения (2) в области G ;
- 3) имеет место оценка

$$\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\|. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\hat{\lambda}^{(1)}, \hat{\lambda}^{(2)} \in G$ и $q(\hat{\lambda}^{(1)}), q(\hat{\lambda}^{(2)}) \in G$. Тогда известно, что существует вектор $\xi \in G$ такой, что выполняется неравенство

$$\|q(\hat{\lambda}^{(1)}) - q(\hat{\lambda}^{(2)})\| \leq \|W(\xi)\| \cdot \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(2)}\| \leq \max_{\hat{\lambda} \in G} \|W(\hat{\lambda})\| \cdot \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(2)}\|, \quad (7)$$

где $W(\xi) = \left[\frac{\partial q_i(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}_j} \right]_{\hat{\lambda}=\xi}$ — матрица Якоби системы функций $\{q_i(\hat{\lambda})\}_{i=1}^n$ по переменным $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \dots, \hat{\lambda}_n$, вычисленная в точке $\xi \in G$. В развернутой форме матрица Якоби размера $n \times n$ имеет вид

$$W(\hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial \hat{\lambda}_1} & \frac{\partial q_1}{\partial \hat{\lambda}_2} & \frac{\partial q_1}{\partial \hat{\lambda}_n} \\ \frac{\partial q_n}{\partial \hat{\lambda}_1} & \frac{\partial q_n}{\partial \hat{\lambda}_2} & \frac{\partial q_n}{\partial \hat{\lambda}_n} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Покажем, что при выполнении условия (4) выполняется неравенство

$$\max_{\hat{\lambda} \in G} \|W(\hat{\lambda})\| \leq \alpha < 1,$$

то есть отображение (2) является сжимающим в области G . Действительно, матрицу Якоби (8) можно представить в виде $W(\hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_1} & \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_2} & \dots & \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_n} \end{bmatrix}$, где $\frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_j}$ — вектор-функции. С учётом формулы (3) имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_j} &= \frac{\partial \left[\left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} \right]}{\partial \hat{\lambda}_j} F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) b + \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} \frac{\partial \left[F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) b \right]}{\partial \hat{\lambda}_j} = \\ &= \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \frac{\partial \left[\Omega^{-1}(\hat{\lambda}) \right]}{\partial \hat{\lambda}_j} (b - F \hat{\lambda}). \end{aligned}$$

Обозначая вектор остатков через $e = b - F \hat{\lambda}$, получаем

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_j} = \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \frac{\partial \left[\Omega^{-1}(\hat{\lambda}) \right]}{\partial \hat{\lambda}_j} e, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Тогда матрица Якоби (8) принимает вид

$$W(\hat{\lambda}) = \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T U(\hat{\lambda}), \quad (10)$$

где $U(\hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Omega^{-1}(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}_1} e & \frac{\partial \Omega^{-1}(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}_2} e & \dots & \frac{\partial \Omega^{-1}(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}_n} e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 e & M_2 e & \dots & M_n e \end{bmatrix}$ — матрица размера $N \times n$. Элементы μ_{ik}^j матрицы $M_j = \left[\frac{\partial \Omega^{-1}(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}_j} \right]$, размер которой равен $N \times N$, вычисляются по формуле $\mu_{ik}^j = \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j}$, где ω_{ik} ($i, k = 1, 2, \dots, N$) — элементы матрицы $\Omega^{-1}(\hat{\lambda})$ размера $N \times N$.

Тогда элементы u_{ij} матрицы $U(\hat{\lambda})$ могут быть описаны формулой $u_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} e_k$. Оценим норму матрицы $U(\hat{\lambda})$ ($i = 1, 2, \dots, N$):

$$\begin{aligned} \|U(\hat{\lambda})\| &= \max_i \sum_{j=1}^n |u_{ij}| = \max_i \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^N \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} e_k \right| \leq \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} e_k \right| \leq \|e\| \max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} \right|, \end{aligned}$$

где $\|e\| = \max_k |e_k|$ ($k = 1, 2, \dots, N$). Тогда в соответствии с (10) получаем

$$\begin{aligned} \|W(\hat{\lambda})\| &\leq \left\| \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \right\| \cdot \|U(\hat{\lambda})\| \leq \\ &\leq \left\| \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \right\| \cdot \|e\| \cdot \max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} \right|. \end{aligned}$$

Следовательно, с учётом условия (4) теоремы имеем оценку

$$\max_{\hat{\lambda} \in G} \|W(\hat{\lambda})\| \leq \alpha = \max_{\hat{\lambda} \in G} \left[\max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} \right| \cdot \left\| \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \right\| \cdot \|e\| \right] < 1.$$

Тогда, усиливая неравенство (7), получаем

$$\|q(\hat{\lambda}^{(1)}) - q(\hat{\lambda}^{(2)})\| \leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(2)}\|, \quad (11)$$

где $0 \leq \alpha < 1$. Следовательно, отображение (2) является сжимающим в области G .

Покажем, что при выполнении условия (11), где α описывается равенством (4), итерационный процесс (5) сходится. Для этого используем обобщенный критерий Коши. Имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &= \|q(\hat{\lambda}^{(k)}) - q(\hat{\lambda}^{(k-1)})\| \leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\| \leq \\ &\leq \alpha^2 \|\hat{\lambda}^{(k-1)} - \hat{\lambda}^{(k-2)}\| \leq \dots \leq \alpha^k \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &= \|(\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}) + (\hat{\lambda}^{(k+2)} - \hat{\lambda}^{(k+1)}) + \dots + (\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k+p-1)})\| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \|\hat{\lambda}^{(k+1+i)} - \hat{\lambda}^{(k+i)}\|. \end{aligned} \quad (13)$$

Отсюда с учётом (12) имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &\leq \alpha^k \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\| + \alpha^{k+1} \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\| + \dots + \alpha^{k+p-1} \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\| = \\ &= \alpha^k (1 + \alpha + \dots + \alpha^{p-1}) \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\| = \frac{\alpha^k (1 - \alpha^p)}{1 - \alpha} \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\|. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется неравенство:

$$\|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq \frac{\alpha^k}{1 - \alpha} \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\|. \quad (14)$$

Так как $0 \leq \alpha < 1$ и, следовательно, $\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha^k = 0$, то из (14) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $k > N(\varepsilon)$ и $p > 0$ выполняется неравенство $\|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| < \varepsilon$, то есть для последовательности $\{\hat{\lambda}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$

выполнен критерий Коши. Поэтому существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k)} = \bar{\lambda}$, причём $\bar{\lambda} \in G$ в силу замкнутости области G .

Вектор $\bar{\lambda}$ является решением уравнения (2), так как, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в равенстве (5) и учитывая непрерывность в области G вектор-функции $q(\hat{\lambda})$, имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k)} = q\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k-1)}\right)$ или

$$\bar{\lambda} = q(\bar{\lambda}), \quad (15)$$

то есть $\bar{\lambda}$ — решение уравнения (2).

Это решение единственное в области G . Действительно, пусть $\bar{\bar{\lambda}}$ есть другое решение уравнения (2), то есть

$$\bar{\bar{\lambda}} = q(\bar{\bar{\lambda}}). \quad (16)$$

Тогда, вычитая из (15) равенство (16), получаем выражение

$$\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}} = q(\bar{\lambda}) - q(\bar{\bar{\lambda}}).$$

Отсюда, с учётом формулы (11), имеем $\|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| = \|q(\bar{\lambda}) - q(\bar{\bar{\lambda}})\| \leq \alpha \|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\|$ или $(1 - \alpha) \|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| \leq 0$. Так как $\alpha < 1$, то $1 - \alpha > 0$, следовательно, должно выполняться условие $\|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| \leq 0$. А это возможно только в случае $\|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| = 0$, то есть когда $\bar{\lambda} = \bar{\bar{\lambda}}$.

Так как в соответствии с (12) имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+2)} - \hat{\lambda}^{(k+1)}\| &\leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\|, \\ \|\hat{\lambda}^{(k+3)} - \hat{\lambda}^{(k+2)}\| &\leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(k+2)} - \hat{\lambda}^{(k+1)}\| \leq \alpha^2 \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\|, \\ &\dots, \\ \|\hat{\lambda}^{(k+i+1)} - \hat{\lambda}^{(k+i)}\| &\leq \alpha^i \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\|, \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то из формулы (13) получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \|\hat{\lambda}^{(k+1+i)} - \hat{\lambda}^{(k+i)}\| \leq \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \cdot \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^i = \\ &= \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \cdot \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} \leq \frac{\alpha(1 - \alpha^p)}{1 - \alpha} \cdot \|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\|. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем оценку

$$\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\|,$$

где α определяется соотношением (4). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1.1. При заданной погрешности ε , то есть выполнения неравенства $\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\| < \varepsilon$, достаточно выполнения условия

$$\|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\| < \varepsilon_0 = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \varepsilon, \quad (17)$$

где α определяется формулой (4). Формула (17) описывает апостериорную оценку погрешности k -того приближения.

СЛЕДСТВИЕ 1.2. Вектор остатков e в формуле (4) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} e &= b - F\hat{\lambda} = F(\lambda - \hat{\lambda}) + P_{\lambda}\varepsilon = \\ &= -F\left(F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})P_{\lambda}\varepsilon + P_{\lambda}\varepsilon = \\ &= \left[E - F\left(F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})\right]P_{\lambda}\varepsilon = \\ &= (E - M)P_{\lambda}\varepsilon = HP_{\lambda}\varepsilon. \end{aligned}$$

Здесь матрицы

$$\begin{aligned} M &= F\left(F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda}), \\ H &= E - M = E - F\left(F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda}) \end{aligned} \quad (18)$$

идемпотентны, то есть $M = M^2$ и $H = H^2$. Действительно, имеем

$$\begin{aligned} M^2 &= F\left(F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\left(F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda}) = \\ &= F\left(F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda})F\right)^{-1}F^T\Omega^{-1}(\hat{\lambda}) = M. \end{aligned}$$

Аналогично,

$$HH = (E - M)(E - M) = E - 2M + M^2 = E - 2M + M = E - M = H.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|e\| \leq \|HP_{\lambda}\| \cdot \|\varepsilon\| \approx \|HP_{\hat{\lambda}}\| \cdot \|\varepsilon\|.$$

Отсюда, используя (4), можно сформулировать ограничение на величину случайной помехи в результатах наблюдений, позволяющее обеспечить достаточное условие сходимости итерационной процедуры (5):

$$\|\varepsilon\| < \left(\max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} \right| \cdot \left\| \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \right\| \cdot \|HP_{\hat{\lambda}}\| \right)^{-1}, \quad (19)$$

где матрица H описывается выражением (18), $i = 1, 2, \dots, n$.

Известно, что с вероятностью 0,997 все значения нормально распределенной центрированной случайной величины ε_k попадают в интервал $\pm 3\sigma_{\varepsilon}$. Поэтому с учётом равенства $M[\varepsilon_k] = 0$ имеем

$$\|\varepsilon\| = \max_k |\varepsilon_k| \approx 3\sigma_{\varepsilon}, \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (20)$$

Тогда, используя (19), получаем оценку

$$\sigma_\varepsilon^2 < \left(3 \max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial \hat{\lambda}_j} \right| \cdot \left\| \left(F^T \Omega^{-1}(\hat{\lambda}) F \right)^{-1} F^T \right\| \cdot \|HP_{\hat{\lambda}}\| \right)^{-2}. \quad (21)$$

В условиях теоремы 1 требуется, чтобы все последовательные приближения $\hat{\lambda}^{(k)}$ принадлежали области G . Однако на практике, как правило, это проверить достаточно сложно. Введём дополнительное условие, обеспечивающее принадлежность всех приближений $\hat{\lambda}^{(k)}$ замкнутой области G : $\hat{\lambda}^{(k)} \in G$, $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняются условия теоремы 1 и множество

$$S(\lambda, r) = \{ \hat{\lambda} : \|\hat{\lambda} - \lambda\| \leq r \}$$

(замкнутый шар радиуса r с центром в точке λ) — замкнутая ограниченная область, целиком лежащая в G , причём

$$\|q(\lambda) - \lambda\| \leq (1 - \alpha) r, \quad (22)$$

где λ — вектор истинных значений коэффициентов разностного уравнения; $\alpha < 1$ — коэффициент сжатия, который определяется соотношением (4).

Пусть $\hat{\lambda}^{(0)} \in S$, где $\hat{\lambda}^{(0)} = (F^T F)^{-1} F^T b$ — первоначальная оценка, найденная методом наименьших квадратов. Тогда итерационный процесс (5) сходится, предельный вектор $\bar{\lambda}$ является единственным решением уравнения (2) в области G , и имеет место оценка (6).

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что все последовательные приближения $\hat{\lambda}^{(k)}$ ($k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$) содержатся в области S и, следовательно, в области G .

Начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)} \in S$ и, следовательно, выполняется неравенство $\|\hat{\lambda}^{(0)} - \lambda\| \leq r$. Методом математической индукции покажем, что для всех $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|\hat{\lambda}^{(k)} - \lambda\| \leq r$. Для этого сначала покажем, что $\|\hat{\lambda}^{(1)} - \lambda\| \leq r$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(1)} - \lambda\| &\leq \|\hat{\lambda}^{(1)} - q(\lambda)\| + \|q(\lambda) - \lambda\| = \\ &= \|q(\hat{\lambda}^{(0)}) - q(\lambda)\| + \|q(\lambda) - \lambda\| \leq \\ &\leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(0)} - \lambda\| + (1 - \alpha)r \leq \alpha r + (1 - \alpha)r = r. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что $\hat{\lambda}^{(k-1)} \in S$, то есть справедливо неравенство $\|\hat{\lambda}^{(k-1)} - \lambda\| \leq r$. Покажем, что отсюда следует $\|\hat{\lambda}^{(k)} - \lambda\| \leq r$, то есть, что $\hat{\lambda}^{(k)} \in S$:

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k)} - \lambda\| &\leq \|\hat{\lambda}^{(k)} - q(\lambda)\| + \|q(\lambda) - \lambda\| = \\ &= \|q(\hat{\lambda}^{(k-1)}) - q(\lambda)\| + \|q(\lambda) - \lambda\| \leq \\ &\leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(k-1)} - \lambda\| + (1 - \alpha)r \leq \alpha r + (1 - \alpha)r = r. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $\hat{\lambda}^{(k)} \in S$ при любых $k \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ и, следовательно, $\hat{\lambda}^{(k)} \in G$, так как $S \in G$. Тогда на основании теоремы 1 процесс итерации (5) сходится к единственному на множестве S решению уравнения (2) и имеет место оценка (6). $\square$

Следствие 2.1. При выполнении условий теоремы 2 справедливо неравенство

$$\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq 2\alpha^k r, \quad (23)$$

где α определяется соотношением (4).

Действительно, так как предельная точка $\bar{\lambda} \in S$ и начальное приближение $\hat{\lambda}^{(0)} \in S$, то

$$\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(0)}\| \leq \|\bar{\lambda} - \lambda\| + \|\lambda - \hat{\lambda}^{(0)}\| \leq r + r = 2r.$$

При $0 \leq \alpha < 1$ имеем:

$$\begin{aligned} \|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &= \|q(\bar{\lambda}) - q(\hat{\lambda}^{(k-1)})\| \leq \\ &\leq \alpha \|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\| \leq \alpha^2 \|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k-2)}\| \leq \dots \leq \alpha^k \|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(0)}\| \leq \\ &\leq \alpha^2 \|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k-2)}\| \leq \dots \leq \alpha^k \|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(0)}\|. \end{aligned}$$

Следовательно, выполняется (23).

Формула (23) позволяет получить априорную оценку погрешности k -того приближения и найти число итераций, необходимое для достижения заданной точности ε : $\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq 2\alpha^k r < \varepsilon$. Отсюда следует, что $k > \frac{\ln \varepsilon - \ln 2r}{\ln \alpha}$.

Следствие 2.2. Для сходимости итерационной процедуры (5) достаточно, чтобы величина случайной помехи в результатах наблюдений удовлетворяла неравенству

$$\|\varepsilon\| \leq \frac{(1 - \alpha) r}{\|(F^T \Omega^{-1}(\lambda) F)^{-1} F^T (P_\lambda^{-1})^T\|}. \quad (24)$$

В соответствии с формулой (3) имеем

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= (F^T \Omega^{-1}(\lambda) F)^{-1} F^T \Omega^{-1}(\lambda) b = \\ &= (F^T \Omega^{-1}(\lambda) F)^{-1} F^T \Omega^{-1}(\lambda) (F\lambda + P_\lambda \varepsilon) = \\ &= \lambda + (F^T \Omega^{-1}(\lambda) F)^{-1} F^T (P_\lambda^{-1})^T \varepsilon. \end{aligned}$$

Тогда при выполнении условий теоремы 2 неравенство (22) принимает вид

$$\|q(\lambda) - \lambda\| = \|(F^T \Omega^{-1}(\lambda) F)^{-1} F^T (P_\lambda^{-1})^T \varepsilon\| \leq (1 - \alpha) r.$$

Отсюда получаем оценку (24).

С учётом формулы (20) установим ограничение на величину дисперсии случайной помехи в результатах наблюдений, обеспечивающее выполнение неравенства (22) и, следовательно, сходимость итерационной процедуры (5):

$$\sigma_\varepsilon^2 \leq \frac{(1 - \alpha)^2 r^2}{9 \|(F^T \Omega^{-1}(\lambda) F)^{-1} F^T (P_\lambda^{-1})^T\|^2}.$$

Таким образом, рассмотрены достаточные условия сходимости итерационной процедуры среднеквадратического оценивания коэффициентов разностного уравнения. На основе полученных результатов представлены априорная и апостериорная оценки погрешности k -того приближения; сформулированы ограничения на величину случайной помехи в результатах наблюдений, обеспечивающие сходимость итерационной процедуры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП. 2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Радченко В. П., Зотеев В. Е. Определение динамических характеристик механической системы на основе стохастических разностных уравнений колебаний // *Извест. вузов. Машиностроение*, 2007. — № 1. — С. 3–10.
2. Зотеев В. Е. Параметрическая идентификация линейной динамической системы на основе стохастических разностных уравнений // *Математ. моделирование*, 2008. — Т. 20, № 9. — С. 120–128.

Поступила в редакцию 05/II/2009;
в окончательном варианте — 17/II/2009.

MSC: 65P40, 34C15, 37M05

ON CONVERGENCE OF ITERATION PROCEDURE FOR MEAN-SQUARE ESTIMATION OF COEFFICIENTS OF A LINEAR PARAMETRIC DISCRETE MODEL

V. E. Zoteev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: zoteev@pm.samgtu.ru

Sufficient conditions for convergence of the iteration procedure for mean-square estimation of coefficients of difference equations is studied.

Key words: *generalized regression model, mean-square estimation, the convergence of the iteration procedure.*

Original article submitted 05/II/2009;
revision submitted 17/II/2009.

Zoteev Vladimir Eugenievich, Ph. D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.