Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Столяров, Н. И. Дедов, Единообразная форма представления основных зависимостей теории пластичности, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 286–289

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu679>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.206.68

26 апреля 2023 г., 12:34:01

5. Стружанов В. В. Свойства разупрочняющихся материалов и определяющие соотношения при одноосном напряжённом состоянии // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2007. — № 2(15). — С. 69–78.
6. Стружанов В. В., Башуров Вяч. В. Модификационная модель Мазинга // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2007. — № 1(14). — С. 29–39.
7. Пугачёв В. С. Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1968. — 368 с.

Поступила в редакцию 22/I/2009;
в окончательном варианте — 13/II/2009.

MSC: 74H55

ON CONSTRUCTION OF MATERIAL STRUCTURAL MODEL ON THE BASIS OF MACRO EXPERIMENT RESULTS

V. V. Struzhanov

Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Science,
34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620219.

E-mails: stru@imach.uran.ru

Procedure allowing providing correspondence of a real material and its structural model is proposed.

Key words: macro experiment, allocation density, structural sub elements, elastic–brittle material, stress–strain diagram.

Original article submitted 22/I/2009;
revision submitted 13/II/2009.

Struzhanov Valeriy Vladimirovich, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Division of Machines Mechanics and Technology.

УДК 539.374.1

ЕДИНООБРАЗНАЯ ФОРМА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н. Н. Столяров, Н. И. Дедов

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244

E-mail: tpm@samgtu.ru

Представлены определяющие соотношения в матричной форме для задач численного исследования пластического деформирования различных теорий пластичности при простом и сложном нагружении. Приведены выражения для коэффициентов матриц для деформационной теории, теории течения, двухзвенных процессов.

Ключевые слова: напряжение, деформация, упругость, пластичность, пластическое течение, матрица, численные методы.

Использование пятимерного девиаторного пространства А. А. Ильюшина [1] позволяет единообразно представить соотношение различных теорий пластичности. Это имеет важное значение для численного исследования неупругого поведения оболочек по разным теориям пластичности.

Столяров Николай Николаевич — профессор каф. механики; д.ф.-м.н., профессор.
Дедов Николай Иванович — профессор каф. механики; к.т.н., профессор.

В единообразной форме приводятся соотношения трансляционно-изотропной теории течения, деформационной, теории двухзвенных процессов.

Введем пятимерные девиаторные пространства А.А.Ильюшина: напряжений $\vec{\sigma}$, деформаций $\vec{\varepsilon}$, деформаций средней поверхности $\vec{\varepsilon}^c$, изменения кривизны срединной поверхности $\vec{\chi}$. Для пластин и оболочек рассмотрим трёхмерные подпространства этих пространств. Введём ортонормированный базис $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ и каждый из выше перечисленных векторов представим в виде

$$\begin{aligned}\vec{\sigma} &= \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3, \\ \sigma_1 &= \sqrt{\frac{3}{2}} s_{11}, \quad \sigma_2 = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} s_{11} + s_{22} \right), \quad \sigma_3 = \sqrt{2} s_{12}, \\ s_{11} &= \sigma_{11} - \sigma_0, \quad s_{22} = \sigma_{22} - \sigma_0, \quad s_{12} = \sigma_{12}, \quad \sigma_0 = \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22})}{3},\end{aligned}$$

где s_{ij} — компоненты девиатора напряжений, σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, σ_0 — среднее напряжение. Здесь выписаны соотношения связи компонентов вектора $\vec{\sigma}$ с компонентами девиатора напряжений. Аналогичные соотношения будут иметь место и для других векторов.

В дальнейшем будем использовать векторы активных напряжений $\vec{\sigma}^*$, остаточных микронапряжений $\vec{s}$, пластических деформаций $\vec{\varepsilon}^p$. Использование векторного представления тензоров позволяет придать соотношениям применяемых теорий прочности наглядный геометрический смысл.

На основании постулата изотропии [1] общая форма связи вектора напряжений $\vec{\sigma}$ с вектором деформаций $\vec{\varepsilon}$ имеет вид

$$d\vec{\sigma} = N d\vec{\varepsilon} - (N - P) \frac{\vec{\sigma} d\vec{\varepsilon}}{\sigma^2} \vec{\sigma}, \quad (1)$$

где N и P — неизвестные функционалы по длине дуги траектории деформаций S от кривизны этой траектории. Среднее напряжение σ_0 связано со средней деформацией ε_0 линейно:

$$d\sigma_0 = 3K d\varepsilon_0,$$

где $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ — модуль объёмного сжатия, E — модуль упругости, ν — коэффициент поперечного сжатия.

Из (1) могут быть получены различные частные теории пластичности.

Приведём основные соотношения теории течения с трансляционно-изотропным упрочнением. Принимается, что полное приращение вектора деформаций $d\vec{\varepsilon}$ складывается из приращений векторов упругой деформации $d\vec{\varepsilon}^e$ и пластической деформации $d\vec{\varepsilon}^p$:

$$d\vec{\varepsilon} = d\vec{\varepsilon}^e + d\vec{\varepsilon}^p.$$

Приращение вектора упругой деформации связано с приращением вектора напряжений $d\vec{\sigma}$ законом Гука:

$$d\vec{\varepsilon}^e = \frac{d\vec{\sigma}}{2G}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

где G — модуль сдвига.

Уравнение поверхности текучести в пространстве вектора напряжений для случая трансляционно-изотропного упрочнения принимается в виде

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}^* \vec{\sigma}^* - \frac{2}{3} \tilde{\sigma}^2 (\varepsilon_n^p) &= 0, \\ \tilde{\sigma} (\varepsilon_n^p) &= \alpha \sigma_T + (1 - \alpha) \sigma (\varepsilon_n^p), \quad \sigma_n = f(\varepsilon_n^p), \\ 0 &\leq \alpha \leq 1, \quad \vec{\sigma}^* = \vec{\sigma} - \vec{s},\end{aligned}$$

где σ_T — предел текучести, $\sigma (\varepsilon_n^p)$ — наибольшая интенсивность напряжений за всю историю деформирования.

Приращение вектора пластических деформаций записывается следующим образом:

$$d\vec{s} = K(\varepsilon^p) d\vec{\varepsilon}^p.$$

Закон связи вектора приращения пластической деформации $d\vec{\varepsilon}$ с вектором активных напряжений $\vec{\sigma}$ следует из градиентальности вектора скорости пластической деформации к мгновенной поверхности текучести в точке нагружения [2] и того факта, что мгновенная поверхность текучести представляет собой в пространстве вектора напряжений гиперсферу с центром в конце вектора $\vec{s}$:

$$d\vec{\varepsilon}^p = d\lambda \vec{\sigma}^x,$$

где $d\lambda$ — скалярный множитель.

Из соотношения теории течения получаем для случая активного нагружения

$$d\vec{\sigma} = N d\vec{\varepsilon} - (N - P) \frac{\vec{\sigma}^* \vec{\sigma}^*}{\sigma^* \sigma^*} d\vec{\varepsilon}, \quad (2)$$

где $N = 2G$, $P = E'_k \left(1 + \frac{E'_k}{2G}\right)^{-1}$, $E'_k = \frac{2}{3} \frac{d\sigma_k}{d\varepsilon_k}$.

Представляя (2) в координатной форме, зависимость между $d\vec{\sigma}$ и $d\vec{\varepsilon}$ запишем в матричном виде:

$$d\vec{\sigma} = A d\vec{\varepsilon},$$

где $d\vec{\sigma} = (d\sigma_1, d\sigma_2, d\sigma_3)$, $d\vec{\varepsilon} = (d\varepsilon_1, d\varepsilon_2, d\varepsilon_3)$ — векторы приращения напряжений и деформаций, A — симметричная матрица с элементами

$$a_{ij} = N \delta_{ij} - (N - P) \frac{\sigma_i^* \sigma_j^*}{(\sigma^x)^2}, \quad i, j \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Компоненты векторов $\vec{\sigma}$ и $\vec{\varepsilon}$ линейно выражаются соответственно через компоненты девиаторов напряжений и деформаций.

В деформационной теории пластичности при вычислении α_{ij} материальные функции берутся в виде

$$N = \frac{2}{3} \frac{\sigma_n}{\varepsilon_n^p + \frac{\sigma_n}{3G}}, \quad P = \frac{E'_k}{1 + \frac{E'_k}{2G}}. \quad (4)$$

В теории двухзвенных процессов [1] связь между вектором напряжений и вектором деформаций задаётся соотношением

$$\alpha_{ij} = A_1 \delta_{ij} - (A_1 - B_1) \frac{\varepsilon_i^0 \varepsilon_j^0}{(\varepsilon^0)^2}, \quad i, j \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

где $A_1 = N + \frac{dN}{dS} \Delta S$, $B_1 = P + \frac{dP}{dS} \Delta S$.

При этом $|\Delta \vec{\varepsilon}| = |\vec{\varepsilon} - \vec{\varepsilon}^0| = \Delta s$, $N = N(\Delta s)$, $P = P(\varepsilon^0, \theta, \Delta s)$; $\vec{\varepsilon}^0$ — вектор деформаций в точке излома траектории; θ — угол излома траектории деформации; N , P — материальные функции, свойства которых исследуются на основе экспериментальных данных [3].

Таким образом, связь между напряжениями и деформациями для разных теорий пластичности записывается в единообразной форме (3), где α_{ij} вычисляется согласно одному из соотношений (4)–(6).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Основы общей математической теории. — М.: АН СССР, 1963. — 272 с.
2. *Коротких Ю. Г.* Математическая модель упруго-пластической среды, основанная на концепции кинематического и изотропного упрочнения и её реализация в статических и динамических задачах / В сб.: *Тр. Второй Всесоюз. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности.* — Новосибирск: СО АН СССР, 1971. — С. 156–169.

3. Васин Р. А. Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении / В сб.: *Упругость и неупругость. Вып. 1.* — М.: МГУ, 1971. — С. 69–126.

Поступила в редакцию 06/II/2009;
в окончательном варианте — 25/II/2009.

MSC: 74C05

UNIFORM REPRESENTATION OF THE BASIC CONSTRAINTS OF PLASTICITY THEORY

N. N. Stolayrov, N. I. Dedov

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: tpm@samgtu.ru

Matrix presentation of the basic constraints for the problems of plastic deformation numerical analysis in various plasticity theories at simple and complex loading is given. Matrix parameters are obtained for the strain rate hardening and Ilyushin's theories.

Key words: stress, strain, elastic, plastic, deformation, plastic flow, matrix, numerical analysis.

Original article submitted 06/II/2009;
revision submitted 25/II/2009.

*Stolayrov Nikolay Nikolayevich. Dr. Sci. (Phys. & Math.), Prof., Dep. of Mechanics.
Dedov Nikolay Ivanovich, Ph. D. (Techn.), Ass. Prof., Dep. of Mechanics.*

УДК 539.3

МНОГОПОЛЕВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНОЙ МНОГОЗВЕННОЙ И СТРУКТУРНОЙ ОБОЛОЧЕЧНОЙ СИСТЕМ

А. А. Васильев

Тверской государственный университет,
170100, Тверь, ул. Желябова, 33.

E-mail: alvasiliev@yandex.ru

На примерах дискретной многозвенной системы и периодически подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки представлены методика и возможности многополевого подхода для моделирования устойчивости структурных упругих систем.

Ключевые слова: устойчивость, многозвенная система, оболочка, многополевая модель.

Введение. Одним из направлений фундаментальных исследований в механике в настоящее время является разработка обобщённых континуальных моделей. Такие модели развиваются и используются для моделирования структурных систем, в частности, конструкций, композитных материалов, гранулированных сред, наноматериалов и др. Широкое использование обобщённых моделей определяется тем, что они, в частности, позволяют находить обобщённые материальные функции (константы), характеризующие систему, их выражения через структурные параметры,

Васильев Алексей Анатольевич — доцент кафедры математического моделирования; к.ф.-м.н., доцент.