Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин, Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 276–279

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 16:00:47

УДК 517.968.72:517.589

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ В РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДРОБНОГО ОСЦИЛЛЯЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ

*Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: eugen.ogo@gmail.com, nik-yashagin@yandex.ru

*Вводятся некоторые специальные функции, связанные с функцией типа Миттаг—Леффлера, в терминах которых найдено решение задачи Коши для одного линейного неоднородного дробного осцилляционного уравнения.***Ключевые слова:** функции типа Миттаг—Леффлера, задача Коши для дробного осцилляционного уравнения.

Основное внимание в настоящем кратком сообщении уделено задаче Коши для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и младшими дробными производными

$$\ddot{u} + \sum_{k=0}^n a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{k=0}^m b_k D_{0t}^{\beta_k} u = f(t), \quad (1)$$

где $u = u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции, $\dot{u} = \frac{du}{dt} (t \geq 0)$; $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \in [0, 1)$, $\beta_k \in [0, 2)$; $D_{0t}^{\alpha_k}, D_{0t}^{\beta_k}$ — левосторонние дробные производные Римана—Лиувилля [1, 2].

Очевидно, задача Коши $u(0) = u_0, \dot{u}(0) = \dot{u}_0$ для уравнения (1) редуцируется к интегральному уравнению вольтерровского типа, решение которого для $f(t) \in L(0, T)$ ($T > 0$) всегда существует и единственно в классе функций $u(t) \in AC^2[0, T]$. Поэтому основная проблема заключается в построении резольвенты этого интегрального уравнения в терминах тех или иных специальных функций, удобных для анализа полученного решения.

Пусть $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел, $z, \mu \in \mathbb{C}$, $\sigma > 0$. Для функции типа Миттаг—Леффлера [3] используем обозначение $E_\sigma(z; \mu)$.

Хорошо известно, что эта функция естественным образом возникает при решении интегрального уравнения Вольтерра второго рода с ядром Абеля [4], которое в терминах дробного интеграла Римана—Лиувилля записывается в виде

$$\varphi(t) - \lambda I_{at}^\alpha \varphi = f(t) \quad (\alpha > 0, \lambda \in \mathbb{C}), \quad (2)$$

где I_{at}^α — левосторонний оператор дробного интегрирования порядка $\alpha > 0$ [1].

Пусть $\alpha \in (0, 1)$. Нетрудно показать, что интегральное уравнение (2) при $f(t) = \varphi(0)$ эквивалентно в смысле разрешимости задачи Коши для дифференциального уравнения с младшей дробной производной:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lambda D_{0t}^{1-\alpha} \varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0,$$

Огородников Евгений Николаевич — доцент кафедры прикладной математики и информатики, к.ф.-м.н., доцент.

Яшагин Николай Сергеевич — аспирант кафедры прикладной математики и информатики.

решением которой является собственно функция Миттаг—Леффлера $\varphi(t) = \varphi_0 E(\lambda t^\alpha)$.

То же интегральное уравнение с $f(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ эквивалентно задаче Коши для дифференциального уравнения дробного порядка с нелокальным начальным условием [2]

$$D_{0t}^\alpha \varphi = \lambda \varphi, \quad D_{0t}^{-(1-\alpha)} \varphi = \lim_{t \rightarrow +0} I_{0t}^{1-\alpha} \varphi = 1.$$

Её решением является функция $\varphi(t) = t^{\alpha-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \alpha)$, принятая автором работы [5] в качестве обобщённой экспоненциальной функции $\text{Exp}_\alpha(t)$.

В настоящей работе предлагается в качестве обобщённой (дробной) экспоненциальной функции выбрать функцию

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu), \quad (3)$$

где $\alpha, \mu > 0$, λ — комплексный параметр, $t \geq 0$, являющуюся решением задачи Коши для уравнения

$$D_{0t}^\mu \varphi = \lambda D_{0t}^{\mu-\alpha} \varphi, \quad \lim_{t \rightarrow +0} I_{0t}^{1-\mu} \varphi = 1,$$

где $\alpha, \mu \in [0, 1]$, $D_{0x}^{\mu-\alpha}$ — интегро-дифференциальный оператор Римана—Лиувилля. Введём также следующие функции:

$$\text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} \text{Ec}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu), \quad \text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} \text{Es}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu), \quad (4)$$

где $\text{Ec}_\alpha(z; \mu) = \frac{1}{2} [\text{E}_\alpha(z; \mu) + \text{E}_\alpha(\bar{z}; \mu)]$, $\text{Es}_\alpha(z; \mu) = \frac{1}{2i} [\text{E}_\alpha(z; \mu) - \text{E}_\alpha(\bar{z}; \mu)]$. Для $z = \lambda t^\alpha$, $\lambda = \sigma + \omega i$ они являются дробными аналогами функций $e^{\sigma t} \cos \omega t$ и $e^{\sigma t} \sin \omega t$, совпадая с последними при $\alpha = \mu = 1$.

Для введённых функций справедлив аналог формулы Эйлера:

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = \text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu; \lambda; t) + i \text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu; \lambda; t).$$

Для функций (3) и (4) формулы дифференцирования имеют вид:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^m \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) &= \text{Exp}(\alpha, \mu - m; \lambda; t), \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^m \text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu; \lambda; t) &= \text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu - m; \lambda; t), \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^m \text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu; \lambda; t) &= \text{Exp}_\alpha(\alpha, \mu - m; \lambda; t). \end{aligned}$$

В терминах этих функций нетрудно найти решение задачи Коши $u(0) = u_0$, $\dot{u}(0) = \dot{u}_0$ для модельного дробного осцилляционного уравнения

$$\ddot{u} + p D_{0t}^\beta \dot{u} + q D_{0t}^{2\beta} u = f(t) \quad (t > 0), \quad (5)$$

где $p, q \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0, \frac{1}{2})$, $f(t)$ — заданная функция. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если $f(t) \in L[0, T]$, то существует единственное решение $u(t)$ уравнения (5) в классе $AC^2[0, T]$.

В частности, если $\lambda = \sigma + \omega i$ — один из корней многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$, $\alpha = 1 - \beta$, решение уравнения (5) записывается в виде

$$\begin{aligned} u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega} \text{Exp}_\alpha(\alpha, 2 - \alpha; \lambda; t) + u_0 \left[\text{Exp}_\alpha(\alpha, 1; \lambda; t) - \frac{\sigma}{\omega} \text{Exp}_\alpha(\alpha, 1; \lambda; t) \right] + \\ + \frac{1}{\omega} \int_0^t \text{Exp}_\alpha(\alpha, 2 - \alpha; \lambda; t - s) f(s) ds. \quad (6) \end{aligned}$$

При $\beta = 0$ ($\alpha = 1$) уравнение (5) и его решение (6) совпадают соответственно с дифференциальным уравнением возмущенного осциллятора с вязким демпфированием и его хорошо известным решением [6].

Авторами данной работы найдены решения и для случаев $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ или $\lambda_1 = \lambda_2$, где λ_k — корни многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$. Случай $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$ совпадает с рассмотренным в работах [2, 5] примером однородного дробного осцилляционного уравнения

$$\ddot{u} + \omega^\alpha D_{0t}^{2-\alpha} u = 0, \quad (7)$$

решение задачи Коши для которого предъявлено в виде

$$u(t) = u_0 \cos_\alpha(\omega t) + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin_\alpha(\omega t),$$

где $\sin_\alpha(z) = z E_\alpha(-z^\alpha; 2)$ и $\cos_\alpha(z) = E_\alpha(-z^\alpha; 1)$ обобщённые (по терминологии автора [5]) тригонометрические функции. Однако, как отмечено в монографии [2], свойства функций $\cos_\alpha(z)$ и $\sin_\alpha(z)$ существенно отличаются от свойств тригонометрических функций $\cos z$ и $\sin z$.

В частности, $\sin'_\alpha(z) = \cos_\alpha(z)$, а $\cos'_\alpha(z) = -z^{\alpha-1} E_\alpha(-z^\alpha; \alpha) \neq \sin_\alpha(z)$. Формула Эйлера для функций $\cos_\alpha(z)$ и $\sin_\alpha(z)$ справедливы в редакции [7]:

$$E_{2\alpha}(iz^{\alpha/2}) = \cos_\alpha(z) + i D_{0z}^{1-\alpha/2} \sin_\alpha(z).$$

Не трудно показать, что

$$\begin{aligned} \cos_{2\alpha}(\omega x) &= \text{Exps}(\alpha, 1; i\omega^\alpha; x) = \text{Ec}_\alpha[(\omega x)^\alpha; 1] = C_\alpha[(\omega x)^\alpha; 1], \\ \sin_{2\alpha}(\omega x) &= \omega^{1-\alpha} \text{Exps}(\alpha, 2-\alpha; i\omega^\alpha; x) = (\omega x)^{1-\alpha} S_\alpha[(\omega x)^\alpha; 2-\alpha], \end{aligned}$$

где $C_\alpha(z; \mu) = \frac{1}{2} [E_\alpha(iz; \mu) + E_\alpha(-iz; \mu)]$, $S_\alpha(z; \mu) = \frac{1}{2i} [E_\alpha(iz; \mu) - E_\alpha(-iz; \mu)]$ — естественные дробные аналоги $\cos z$ и $\sin z$.

Отметим работу авторов [8], в которой в случае $\lambda_{1,2} = \pm \omega i$ проведён качественный анализ решения задачи Коши для уравнения (5) с периодическим возмущением $f(t) = H \sin \omega_1 t$ ($\omega_1 \neq \omega$) и работу [9], в которой была предпринята попытка построения общего решения уравнения (5) методом факторизации дифференциальных операторов дробного порядка.

Выводы. По мнению авторов, использование введённых в данной работе специальных функций позволяет удобно и единообразно выписывать решения задач Коши для дифференциальных уравнений с дробными производными, вообще говоря, любого порядка, и, по-видимому, они могут быть использованы как базисная система функций для параметрического представления различных нелинейных колебаний [10]. Идея факторизации интегральных операторов, использованная авторами в данной работе для построения решения задачи Коши, имеет ряд преимуществ перед методом факторизации дифференциальных операторов, позволяет сразу выписать решение задачи Коши.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по образованию (проект РНП.2.1.1.745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
3. Бейтман Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции в 3-х т: Т. 3. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье. — М.: Наука, 1967. — 299 с.
4. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 672 с.

5. *Нахушева В. А.* Математическое моделирование нелокальных физических процессов в средах с фрактальной структурой: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Таганрог, 2008. — 30 с.
6. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. — М.: Наука, 1968. — 560 с.
7. *Гутов А. З.* Аналог формулы Эйлера для обобщенного синуса и обобщенного косинуса / В сб.: *Мат. моделирование и краевые задачи*: Тр. Третьей Всерос. научн. конф. — Ч. 3. — Самара: СамГТУ, 2006. — С. 97–98.
8. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Вынужденные колебания дробных осцилляторов / В сб.: *Мат. моделирование и краевые задачи*: Тр. Пятой Всерос. научн. конф. — Ч. 1. — Самара: СамГТУ, 2008. — С. 215–221.
9. *Огородников Е. Н., Яшагин Н. С.* Анализ вынужденных колебаний дробных осцилляторов / В сб.: *Международная конференция по математической физике и её приложениям*: Тез. докл. — Самара: СамГУ, 2008. — С. 141–143.
10. *Мейланов Р. П., Янполов М. С.* Особенности фазовой траектории «фрактального» осциллятора // *Письма в ЖТФ*, 2002. — Т. 28, № 1. — С. 67–73.

Поступила в редакцию 05/X/2008;
в окончательном варианте — 12/II/2009.

MSC: 56U78

SOME SPECIAL FUNCTIONS IN THE SOLUTION TO CAUCHY PROBLEM FOR A FRACTIONAL OSCILLATING EQUATION

E. N. Ogorodnikov, N. S. Yashagin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mails: eugen.ogo@gmail.com, nik-yashagin@yandex.ru

Some special functions, concerning Mittag-Leffler type function, are introduced. The solution to Cauchy problem for some linear non-homogeneous fractional oscillating equation in terms of these functions are given.

Key words: *Mittag-Leffler type function, Rieman-Liouville's fractional integrals and derivatives, Cauchy problem for a fractional oscillating equation.*

Original article submitted 05/X/2008;
revision submitted 12/II/2009.

Ogorodnikov Eugeny Nikolaevich, Ph. D. (Phis. & Math.), Ass. Prof., Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.

Yashagin Nikolay Sergeevich, Postgraduate student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.