Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Лексина, Начальные задачи для системы волновых уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 1(), 280–282

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 17:08:38

УДК 517.95

НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ВОЛНОВЫХ УРАВНЕНИЙ

С. В. Лексина

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: lesveta@rambler.ru

*Представлены решения задачи Коши и задачи Гурса для системы волновых уравнений, выписан аналог формулы Даламбера для системы волновых уравнений.***Ключевые слова:** задача Коши, задача Гурса, аналог формулы Даламбера.**Введение.** Объектом исследования в данной работе является система волновых уравнений вида

$$w_{tt} - Aw_{xx} = 0, \quad (1)$$

где $w(x, t) = \text{colon}(w_1, w_2, \dots, w_m)$ — вектор-функция, A — действительная постоянная квадратная матрица порядка m с действительными положительными собственными значениями.

Отметим, что при $m = 2$ система (1) является моделью естественно закрученной нити. Под естественно закрученной нитью подразумевается нить, обладающая продольной и крутильной жесткостями. При составлении уравнений движения естественно закрученной нити были введены следующие обозначения: $w_1(x, t)$ — продольные деформации (полное удлинение части нити), $w_2(x, t)$ — поворот нити. Уравнения движения естественно закрученной нити логично называть уравнениями продольно-крутильных колебаний естественно закрученной нити.

1. Начальные задачи. Рассмотрим систему волновых уравнений (1) в области $Q_{l,T} = [0, l] \times [0, T]$.

Известно, что характеристическое уравнение матрицы A имеет вид

$$\det \|A - \lambda E\| = 0,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — его корни. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ и соответствующие им элементарные делители обладают соответственно кратностями $k_1, k_2, \dots, k_s$ ($k_1 + k_2 + \dots + k_s = m$), тогда существует [1] матрица S такая, что

$$\Lambda = S^{-1}AS,$$

где Λ — жорданова форма, подобная матрице A ; S — матрица перехода при диагонализации матрицы A [2]. При введенных ограничениях на матрицу A среди блоков матрицы Λ можно выделить блоки двух видов:

$\Lambda^* = \lambda_i E + E_{k_i}$, k_i — степень элементарного делителя, отвечающего жордановой клетке $\Lambda(\lambda_i)$ (порядок блока $\Lambda_i(\lambda_i)$), E_k — матрица сдвига [1];

$\Lambda^{**} = \lambda_i E$ — диагональная матрица, $i = p+1, p+1, \dots, s$.

Матрица S , приводящая матрицу A к виду Λ , составляется из всех векторов всех серий, соответствующих всем корням характеристического уравнения [2].

2. Аналог формулы Даламбера. Рассмотрим систему (1) в треугольной области с вершинами в точках $(0, 0)$, $(0, l)$, $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2\lambda})$, где $\lambda = \min\{\lambda_i\}$.

Лексина Светлана Валентиновна — аспирант кафедры прикладной математики и информатики.

ЗАДАЧА КОШИ. Найти в характеристической треугольной области $D_1 = \{(x, y): 0 \leq \hat{\lambda}t \leq x \leq l - \hat{\lambda}t \leq l, 0 \leq t \leq \frac{l}{2\lambda}\}$ классическое решение $w(x, t)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям

$$w(x, 0) = \varphi(x), \quad w_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ — заданные вектор-функции размерности m , $\hat{\lambda} = \max\{\lambda_i\}$.

Выполним в системе (1) замену $w = S^{-1}u$, тогда начальные условия (2) запишутся так:

$$u(x, 0) = S \cdot w(x, 0) = \tilde{\varphi}(x), \quad u_t(x, 0) = S \cdot w_t(x, 0) = \tilde{\psi}(x). \quad (3)$$

Выделим группу уравнений, соответствующих матрице Λ^* , и соответствующие им условия (3). Решение задачи Коши для системы, соответствующей матрице Λ^* , имеет вид

$$u_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \frac{1}{(i-k)!} \delta^{(i-k)} F_\lambda(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k), \quad i \in [1, k_1], \quad i \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где $F_\lambda(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k)$ — решение задачи Коши для соответствующего однородного волнового уравнения, определяемое формулой [3]

$$F_\lambda(\tilde{\varphi}_k, \tilde{\psi}_k) = \frac{\tilde{\varphi}_k(x + \lambda t) + \tilde{\varphi}_k(x - \lambda t)}{2} + \frac{1}{2\lambda} \int_{x-\lambda t}^{x+\lambda t} \tilde{\psi}_k ds, \quad (5)$$

$$\delta \equiv \frac{1}{2\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \delta^n = \delta(\delta^{(n-1)}), \quad \delta^0 \equiv 1. \quad (6)$$

Равенство (4) является аналогом формулы Даламбера для системы неоднородных волновых уравнений, соответствующих матрице Λ^* .

ТЕОРЕМА. Если функция $\tilde{\varphi}_k(x) \in C^{k-1}[0, l]$, $\tilde{\psi}_k(x) \in C^{k-1}[0, l]$, то существует решение задачи Коши для системы неоднородных волновых уравнений, которое определяется формулой (4), где F_λ — классическое решение задачи Коши для однородного волнового уравнения, с волновым числом λ .

Возвращаясь к системе (1), получаем, что решение задачи Коши (1), (2) в области D_1 представимо в виде $w(x, t) = S^{-1}u(x, y)$, где $u(x, t) = \text{colon}(u_1, \dots, u_{k_1}, u_{k_1+1}, \dots, u_{k_2+k_1}, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_s)$; для $i \in [1, k_1]$, $u_i(x, t)$ определяется формулой (4) с F_λ :

$$F_\lambda = \frac{\langle l_i, \varphi(x + \lambda t) + \varphi(x - \lambda t) \rangle}{2} + \frac{1}{2\lambda} \int_{x-\lambda t}^{x+\lambda t} \langle l_i, \psi(s) \rangle ds;$$

аналогичным образом, определяются все $u_i(x, t)$, соответствующие другим кратным собственным значениям матрицы A ; для $i \in [p, s]$

$$u_i(x, t) = F_\lambda(\langle l_i, \varphi \rangle, \langle l_i, \psi \rangle),$$

где l_i — i -тая строка матрицы S , $\langle *, * \rangle$ — обозначение скалярного произведения двух векторов.

3. Задача с данными на характеристиках. Рассмотрим систему (1) в треугольной области с вершинами $(0, \frac{l}{\lambda})$, $(l, \frac{l}{2\lambda})$, $(\frac{l}{2}, \frac{l}{2\lambda})$.

ЗАДАЧА ГУРСА. Найти в характеристической треугольной области $D_2 = \{(x, y): 0 \leq l - \lambda t \leq x \leq \lambda t \leq l, \frac{l}{2\lambda} \leq t \leq \frac{l}{\lambda}\}$ вектор-функцию $w(x, t)$, удовлетворяющую системе (1) и условиям

$$w(x, t) \Big|_{t=\frac{x}{\lambda}} = \xi(x), \quad w(x, t) \Big|_{t=\frac{l-x}{\lambda}} = \eta(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (7)$$

где $\xi(x)$, $\eta(x)$ — заданные вектор-функции и $\xi(\frac{l}{2}) = \eta(\frac{l}{2})$.

Решение задачи Гурса (1), (7) в области D_2 , представимо в виде $w(x, t) = S^{-1}u(x, y)$, где $u(x, t) = \text{col}(u_1, \dots, u_{k_1}, u_{k_1+1}, \dots, u_{k_2+k_1}, \dots, u_p, u_{p+1}, \dots, u_s)$; при $i \in [1, k_1]$, $u_i(x, t)$ определяется формулой

$$u_i(x, t) = \sum_{k=1}^i \frac{1}{(i-k)!} \delta^{(i-k)} G_\lambda(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k), \quad i \in [1, k_1], \quad i \in \mathbb{N}, \quad (8)$$

где

$$G_\lambda(\tilde{\xi}_k, \tilde{\eta}_k) = \left\langle l_k, \xi \left(\frac{x + \lambda t}{2} \right) + \eta \left(\frac{x - \lambda t + l}{2} \right) - \xi \left(\frac{l}{2} \right) \right\rangle.$$

Аналогичным образом, определяются все $u_i(x, t)$, соответствующие другим кратным собственным значениям матрицы A ; при $i \in [p, s]$:

$$u_i(x, t) = G_\lambda(\langle l_i, \xi \rangle, \langle l_i, \eta \rangle),$$

G_λ — решение задачи Гурса для соответствующего однородного уравнения.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абрамян К. А. Матричное исчисление с приложениями в теории динамических систем. — М.: Физматлит, 1994. — 544 с.
2. Лившиц Н. А., Виноградов В. Н., Голубев Г. А. Корреляционная теория оптимального управления многомерными процессами. — М.: Советское радио, 1974. — 328 с.
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 735 с.

Поступила в редакцию 10/X/2008;
в окончательном варианте — 15/II/2009.

MSC: 35L05, 35E15, 35L15

INITIAL VALUE PROBLEMS FOR SYSTEM OF WAVE EQUATIONS

S. V. Lexina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.
E-mails: lesveta@rambler.ru

We present solutions to the Cauchy problem and the Goursat problem for system of wave equations. Discharged analogue d'Alembert formula for system of wave equations.

Key words: *problem of Cauchy, problem of Goursat, analogue of the formulae of D'Alembert.*

Original article submitted 10/X/2008;
revision submitted 15/II/2009.

Lexina Svetlana Valentinovna, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics and Computer Science.