Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Э. Сеницкий, Динамическая задача для неоднородного стержня из неустойчивого материала при действии продольно-поперечной нагрузки, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 78–89

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 17:13:06

УДК 539.3:517.956

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО СТЕРЖНЯ ИЗ НЕСТАБИЛЬНОГО МАТЕРИАЛА ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНОЙ НАГРУЗКИ

Ю. Э. Сеницкий

Самарский государственный архитектурно-строительный университет,
443001, Самара, ул. Молодогвардейская, 194

E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

Построено новое аналитическое решение начально-краевой задачи для неоднородного упругого призматического стержня, нагруженного продольно-поперечной динамической нагрузкой. Модуль упругости материала является произвольной функцией времени. Используется обобщенный метод конечных интегральных преобразований, при этом трансформанта представляется в фазовых интегралах. В частном случае рассмотрено действие на стержень внезапно приложенной нагрузки при заданном законе изменения (всплеске) его модуля упругости.

Ключевые слова: неоднородный стержень, модуль упругости, функция времени, динамическое нагружение, метод конечных интегральных преобразований, пучок оператора, фазовые интегралы, спектральные разложения.

Физико-механические характеристики материалов конструкций при определенных условиях могут оказаться переменными. Это имеет место в случаях высокоскоростного деформирования, действия на элементы конструкций температурных или химических полей, а также радиационного облучения (факторов наведенной неоднородности). Если конструкция взаимодействует с указанными выше однородными полями, то её механические характеристики изменяются во времени.

В настоящем исследовании рассматривается динамическая задача для призматического стержня из нестабильного материала с переменным во времени модулем упругости. При этом предполагаются справедливыми известные допущения технической теории тонких стержней. Следует учесть, что наряду с произвольной поперечной динамической нагрузкой приложенная на торцах стержня продольная сжимающая сила является также функцией времени. Рассматривается достаточно общий случай упругого относительно углов поворота закрепления стержня по концам.

Математическую модель представляет дополненное системой краевых условий дифференциальное уравнение четвёртого порядка в частных производных с переменными коэффициентами, являющимися функциями времени. Аналитическое решение задачи строится путем применения разработанного автором обобщённого структурного алгоритма метода конечных интегральных преобразований (КИП) [1, 2]. Особенность алгоритмической процедуры заключается в формулировке операционного свойства для пучка оператора [3] и условия, определяющего набор положительных параметров, соответствующих собственным значениям однородной краевой задачи для ядра преобразования. Трансформанта (изображение) при этом представляется в фазовых

Юрий Эдуардович Сеницкий (д.т.н., проф., заслуж. деятель науки РФ), зав. кафедрой, каф. сопротивления материалов и строительной механики.

интегралах, которые являются частными решениями в методе ВКБ (Венцеля, Кремерса, Бриллюэна) неавтономной счетной системы ОДУ, предусмотренной алгоритмической процедурой КИП. Окончательное решение для произвольных законов изменения динамической нагрузки и модуля упругости получено в виде спектральных разложений по полным системам собственных функций ядровой краевой задачи.

В качестве примера рассмотрено действие приложенной поперечной нагрузки на стержень при всплеске его модуля упругости в процессе скоростного деформирования.

1. Постановка задачи. Пусть неоднородный призматический стержень $x \in [0, l]$ (см. рис. 1), модуль упругости которого

$$E(t) = E_0 f(t), \quad (1)$$

загружен произвольной поперечной динамической нагрузкой $q(x, t)$ и продольной силой

$$P(t) = P_0 r(t). \quad (2)$$

Рис. 1. Расчётная схема упруго защемленного стержня при действии поперечной продольно-динамической нагрузки

Концевые сечения стержня упруго защемлены относительно углов поворота. При этом α — коэффициент жёсткости упругого закрепления; $f(t)$, $r(t)$ — известные безразмерные положительно определенные функции времени t ; $E_0 = \text{const}$, $P_0 = \text{const}$ — соответствуют однородному стержню при действии постоянной продольной силы.

Дифференциальное уравнение движения неоднородного стержня и краевые (начальные и граничные) условия рассматриваемой динамической задачи записываются в следующем виде [4]:

$$\frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + k^2 g(t) \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \frac{m}{E_0 J} [f(t)]^{-1} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = \frac{1}{E_0 J} [f(t)]^{-1} q(x, t); \quad (3)$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \quad \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{t=0} = V_0(x) \quad \text{при } t = 0; \quad (4)$$

$$y \Big|_{x=0, l} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \Big|_{x=0, l} = \pm \frac{\alpha}{E_0 J} [f(t)]^{-1} \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=0, l} \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l, \quad (5)$$

где

$$g(t) = r(t) [f(t)]^{-1}; \quad k^2 = \frac{P_0}{E_0 J}; \quad (6)$$

$y(x, t)$ — динамические прогибы; $y_0(x)$, $V_0(x)$ — начальные перемещения и скорости перемещений стержня; J — момент инерции поперечного сечения стержня; m — погонная масса стержня.

Равенство (3) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных четвёртого порядка с переменными коэффициентами.

Соотношения (3)–(5) представляют математическую формулировку рассматриваемой начально-краевой задачи.

2. Построение общего решения. Применяем структурный алгоритм метода конечных интегральных преобразований (КИП). На сегменте $x \in [0, l]$ вводим КИП, определяемое парой формул [1, 2]:

$$\bar{y}(\lambda_i t) = \int_0^l y(x, t) G(\lambda_i, x) dx, \quad (7)$$

$$y(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{y}(\lambda_i, t) G(\lambda_i, x) \|G_i\|^{-2}, \quad (8)$$

где

$$\|G_i\|^2 = \int_0^l G^2(\lambda_i, x) dx \quad (9)$$

— квадрат нормы ядра интегрального преобразования $G(\lambda_i, x)$; $\bar{y}(\lambda_i, t)$ — трансформанта (изображение) функции $y(x, t)$; λ_i — параметры, образующие счётное множество ($i \in \mathbb{N}$).

Равенство (7) представляет прямое преобразование, а (8), соответственно, — формулу обращения для ортогональной системы функций $\{G(\lambda_i, x)\}$.

Ядро КИП $G(\lambda_i, x)$ и трансформанта $\bar{y}(\lambda_i, t)$ определяются в дальнейшем в процессе решения задачи.

Подвергая дифференциальное уравнение (3) и начальные условия (4) КИП (7), интегрируя затем по частям члены, содержащие частные производные по пространственной переменной x , получаем

$$\begin{aligned} \phi(y, G) \Big|_0^l + \int_0^l y G^{IV} dx + k^2 g(t) \int_0^l y G'' dx + \frac{m}{E_0 J} [f(t)]^{-1} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^l y G dx = \\ = \frac{1}{E_0 J} [f(t)]^{-1} \int_0^l q G dx, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\phi(y, G) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} G - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} G' + \frac{\partial y}{\partial x} G'' - y G''' + k^2 g(t) \left(\frac{\partial y}{\partial x} G - y G' \right) \quad (11)$$

— билинейная форма (штрих в (10) и (11) означает дифференцирование по x);

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^l y(x, t) G(\lambda_i, x) dx &= \int_0^l y_0(x) G(\lambda_i, x) dx, \quad \text{при } t = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_0^l y(x, t) G(\lambda_i, x) dx &= \int_0^l V_0(x) G(\lambda_i, x) dx. \end{aligned} \right. \quad (12)$$

Вводим два условия структурного алгоритма метода КИП [1, 2]:

$$\phi(y, G) \Big|_0^l = 0, \quad (13)$$

$$\int_0^l y G^{IV} dx + k^2 g(t) \int_0^l y G'' dx = [\lambda_i^4 - \lambda_i^2 k^2 g(t)] \int_0^l y G dx. \quad (14)$$

Операционное свойство (14) сформулировано для пучка дифференциального оператора [3], и, по определению Л. Коллатца [5], представляет неодночленный класс.

Если принять во внимание соотношения (13), (14) и учесть обозначения трансформант (7), то уравнение (10) и условия (12) преобразуются следующим образом:

$$\frac{d^2 \bar{y}(\lambda_i, t)}{dt^2} + \lambda_i^4 \frac{E_0 J}{m} f(t) \left[1 - \frac{k^2}{\lambda_i^2} g(t) \right] \bar{y}(\lambda_i, t) = \frac{1}{m} \bar{q}(\lambda_i, t), \quad (15)$$

$$\bar{y}(\lambda_i, t) = \bar{y}_0(\lambda_i), \quad \frac{d\bar{y}(\lambda_i, t)}{dt} = \bar{V}_0(\lambda_i) \quad \text{при } t = 0. \quad (16)$$

Здесь $\bar{q}(\lambda_i, t)$, $\bar{y}_0(\lambda_i)$, $\bar{V}_0(t)$ — аналогичные (7) трансформанты соответствующих функций:

$$\bar{q}(\lambda_i, t) = \int_0^l q(x, t) G(\lambda_i, x) dx, \quad \bar{y}_0(\lambda_i) = \int_0^l y_0(x) G(\lambda_i, x) dx,$$

$$\bar{V}_0(\lambda_i) = \int_0^l V_0(x) G(\lambda_i, x) dx.$$

Равенства (13), (14) совместно с условиями (5) позволяют сформулировать краевую задачу для ядра преобразования $G(\lambda_i, x)$. Действительно, из операторного свойства (14) следует дифференциальное уравнение

$$G^{IV}(\lambda_i, x) + k^2 g(t) [G''(\lambda_i, x) + \lambda_i^2 G(\lambda_i, x)] - \lambda_i^4 G(\lambda_i, x) = 0. \quad (17)$$

Соотношение (13) для билинейной формы с учётом (5) приводит к таким граничным условиям:

$$G(\lambda_i, x) = 0, \quad G''(\lambda_i, x) \mp \frac{\alpha}{E_0 J} [f(t)]^{-1} G(\lambda_i, x) = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l. \quad (18)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. При соответствиях

$$G \sim y, \quad \lambda_i^4 - k^2 g(t) \lambda_i^2 \sim \frac{m}{E_0 J} [f(t)]^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

дифференциальное уравнение (3) и условия (5) инвариантны соответственно (17), (18) относительно КИП (7). Отсюда следует [1], что рассматриваемая начально-краевая задача является самосопряжённой, а система $\{G(\lambda_i, x)\}$, $i \in \mathbb{N}$, является ортогональной, т. е. справедлива формула обращения (8).

Из уравнения (17) находим

$$-\frac{G^{IV}(\lambda_i, x) - \lambda_i^4 G(\lambda_i, x)}{G''(\lambda_i, x) + \lambda_i^2 G(\lambda_i, x)} = k^2 g(t) = \Omega_i^2, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (19)$$

где параметры $\Omega_i = \text{const}$ образуют счётное множество.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При исследовании динамического поведения стержня за период $(0, t^*)$, оставляя в разложении (8) необходимое число членов « n », соответствующие каждому члену ряда моменты времени t_i и параметры Ω_i определяют следующими равенствами:

$$t_i = \frac{it^*}{n}, \quad \Omega_i = k^2 g(t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (20)$$

Окончательно дифференциальное уравнение для ядра КИП (19) принимает следующий вид:

$$G^{IV}(\lambda_i, x) + \Omega_i^2 G''(\lambda_i, x) - \lambda_i^2 (\lambda_i^2 - \Omega_i^2) G(\lambda_i, x) = 0, \quad (21)$$

где Ω_i определяются равенством (20).

Таким образом, исходная начально-краевая задача (3)–(5) распалась на счётное множество задач Коши (15), (16) для трансформанты $\bar{y}(\lambda_i, t)$ и однородную краевую задачу (21), (18) для ядра интегрального преобразования $G(\lambda_i, x)$. Рассмотрим каждую из них.

Возвращаясь к равенствам (15), (16), представим уравнение (15) следующим образом:

$$\frac{d^2 \bar{y}(h_i, t)}{dt^2} + h_i^2 S(h_i, t) \bar{y}(h_i, t) = \frac{1}{m} \bar{q}(h_i, t), \quad (22)$$

где

$$S(h_i, t) = \frac{E_0 J}{m} f(t) \left[1 - \frac{k^2}{h_i} g(t) \right], \quad h_i = \lambda_i^2. \quad (23)$$

Ввиду самосопряжённости краевой задачи (17), (18) (замечание 1), λ_i ($i \in \mathbb{N}$) представляет возрастающую последовательность положительных чисел, а с учётом (23)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} h_i \rightarrow \infty, \quad \lim_{h_i \rightarrow \infty} S(h_i, t) = \frac{E_0 J}{m} f(t) < \infty, \quad (24)$$

поскольку $g(t)$ и $f(t)$ — ограниченные функции аргумента t .

Для произвольных функций $\bar{q}(h_i, t)$, $f(t)$, $g(t)$ и $S(h_i, t)$ решение неоднородного дифференциального уравнения при условии (24) осуществляем методом ВКБ [6]. При этом в соответствии с (23), h_i можно считать большим параметром.

Решение уравнения (22), как обычно, полагаем в виде суммы:

$$\bar{y}(h_i, t) = y_1(h_i, t) + y_2(h_i, t), \quad (25)$$

где y_1 , y_2 — общее решение однородного и частное решение неоднородного дифференциального уравнения (22).

Разыскивая теперь $y_1(h_i, t)$ в виде

$$y_1(h_i, t) = \exp \left[\int_0^t \varphi(h_i, \tau) d\tau \right], \quad (26)$$

подставляем выражение (26) в соответствующее (22) однородное уравнение (27):

$$\frac{d^2 y_1(h_i, t)}{dt^2} + h_i^2 S(h_i, t) y_1(h_i, t) = 0. \quad (27)$$

В результате получаем для $\varphi(h_i, t)$ неполное уравнение Рикатти

$$\frac{d\varphi(h_i, t)}{dt} + \varphi^2(h_i, t) + h_i^2 S(h_i, t) = 0. \quad (28)$$

Раскладывая $\varphi(h_i, t)$ в асимптотический ряд по степеням большого параметра h_i и оставляя три члена разложения, находим

$$\varphi(h_i, t) = \varphi_0(h_i, t)h_i + \varphi_1(h_i, t) + \varphi_2(h_i, t)h_i^{-1} + \dots \quad (29)$$

Подставив представление (29) в уравнение (28), немедленно получаем

$$\begin{aligned} \varphi_0(h_i, t) &= \pm j S^{\frac{1}{2}}(h_i, t), & \varphi_1(h_i, t) &= -\frac{1}{4S(h_i, t)} \frac{dS(h_i, t)}{dt}, \\ \varphi_2(h_i, t) &= \pm j \frac{1}{32S^{\frac{5}{2}}(h_i, t)} \left[5 \left(\frac{dS(h_i, t)}{dt} \right)^2 - 4S(h_i, t) \frac{d^2 S(h_i, t)}{dt^2} \right], \\ j &= \sqrt{-1}. \end{aligned} \quad (30)$$

Оставляя в дальнейшем в разложении (29) два первых члена (30), имеем:

$$\varphi(h_i, t) \approx \left[\pm j S^{\frac{1}{2}}(h_i, t) \right] h_i - \frac{1}{4S(h_i, t)} \frac{dS(h_i, t)}{dt}. \quad (31)$$

С учётом (31) выражение (26) с точностью до постоянной определяется следующим равенством:

$$y_1(h_i, t) = S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \exp \left[\pm j h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right].$$

Если теперь воспользоваться формулами Эйлера, то из последнего равенства следуют такие два линейно независимых решения однородного уравнения (27):

$$S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \cos \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right], \quad S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \sin \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right].$$

Окончательно имеем

$$\begin{aligned} y_1(h_i, t) &= C_{1i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \cos \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right] + \\ &+ C_{2i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \sin \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right], \end{aligned} \quad (32)$$

где C_{1i}, C_{2i} — произвольные постоянные интегрирования.

Частное решение $y_2(h_i, t)$ неоднородного дифференциального уравнения (22) для произвольной его правой части определяется методом Коши. Имеем

$$y_2(h_i, t) = \frac{1}{mh_i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, 0) \int_0^t \bar{q}(h_i, \tau) S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t - \tau) \times \\ \times \sin \left[h_i \int_0^{t-\tau} S^{\frac{1}{2}}(h_i, u) du \right] d\tau. \quad (33)$$

Складывая равенства (32), (33) в соответствии с (25), получаем общее решение дифференциального уравнения (22):

$$\bar{y}(h_i, t) = C_{1i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \cos \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right] + \\ + C_{2i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \sin \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right] + \\ + \frac{1}{mh_i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, 0) \int_0^t \bar{q}(h_i, \tau) S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t - \tau) \sin \left[h_i \int_0^{t-\tau} S^{\frac{1}{2}}(h_i, u) du \right] d\tau. \quad (34)$$

Постоянные C_{1i} , C_{2i} определяются в результате подстановки выражения (34) в начальные условия (16), т. е.

$$C_{1i} = \bar{y}(h_i) S^{\frac{1}{4}}(h_i, 0),$$

$$C_{2i} = \frac{1}{h_i} \left[\bar{V}_0(h_i) S^{-\frac{1}{4}}(h_i, 0) + \frac{1}{4} \bar{y}_0(h_i) S^{-\frac{5}{4}}(h_i, 0) \frac{dS(h_i, t)}{dt} \Big|_{t=0} \right].$$

Располагая этими равенствами, решение (34) уравнения (22) при условиях (16) представим в следующем виде:

$$\bar{y}(h_i, t) = \bar{y}_0(h_i) S^{\frac{1}{4}}(h_i, 0) S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \cos \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right] + \\ + \frac{1}{h_i} \left[\frac{1}{4} \bar{y}_0(h_i) S^{-\frac{5}{4}}(h_i, 0) \frac{dS(h_i, t)}{dt} \Big|_{t=0} + \bar{V}_0(h_i) S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \right] \times \\ \times S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t) \sin \left[h_i \int_0^t S^{\frac{1}{2}}(h_i, \tau) d\tau \right] + \frac{1}{mh_i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, 0) \int_0^t \bar{q}(h_i, \tau) \times \\ \times S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t - \tau) \sin \left[h_i \int_0^{t-\tau} S^{\frac{1}{2}}(h_i, u) du \right] d\tau. \quad (35)$$

Переходим теперь к ядровой задаче. Общее решение однородного дифференциального уравнения (21) записывается в виде

$$G(\lambda_i, x) = C_{1i}^* \cos \lambda_i x + C_{2i}^* \sin \lambda_i x + \\ + \begin{cases} C_{3i}^* \operatorname{ch} x \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} + C_{4i}^* \operatorname{sh} x \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} & \text{при } \lambda_i > \Omega_i, \\ C_{3i}^* \cos x \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} + C_{4i}^* \sin x \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} & \text{при } \lambda_i < \Omega_i. \end{cases} \quad (36)$$

Здесь C_{1i}^* , C_{2i}^* , C_{3i}^* , C_{4i}^* — постоянные интегрирования.

Ниже рассмотрим подробнее идеализированные схемы закрепления стержня.

3. Частные случаи общего решения. Соотношения (18), (21) представляют задачу на собственные значения, т. е. необходимо определить параметры λ_i ($i \in \mathbb{N}$) и постоянные C_{1i}^* , C_{2i}^* , C_{3i}^* , C_{4i}^* для различных граничных условий в соответствии с характером опирания стержня по концам.

3.1. Шарнирное закрепление стержня. В этом случае коэффициент жёсткости $\alpha = 0$, и граничные условия (18) принимают следующий вид:

$$G(\lambda_i, x) = 0, \quad G''(\lambda_i, x) = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l. \quad (37)$$

При подстановке выражения (36) в равенства (37) получаем однородную систему алгебраических уравнений относительно C_{1i}^* , C_{2i}^* , C_{3i}^* , C_{4i}^* . Разыскивая её нетривиальные решения, приравниваем главный детерминант нулю. В результате формируется трансцендентное уравнение для нахождения λ_i ($i \in \mathbb{N}$) и определяются постоянные интегрирования. Имеем

$$(2\lambda_i - \Omega_i^2) \sin \lambda_i l \operatorname{sh} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} = 0, \quad (38)$$

причём из (36) $\lambda_i \neq \Omega_i$.

Из (38) следует, что

при $\lambda_i \geq \Omega_i$ —

$$\lambda_i = \frac{i\pi}{l}; \quad (39)$$

при $\lambda_i > \Omega_i$ —

$$\lambda_i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_i, \quad C_{1i}^* = C_{3i}^* = 0, \quad C_{2i}^* = 1, \quad C_{4i}^* = -\sin \lambda_i l \left[\operatorname{sh} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} \right]^{-1};$$

при $\lambda_i < \Omega_i$ —

$$\lambda_i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_i, \quad C_{1i}^* = C_{3i}^* = 0, \quad C_{2i}^* = 1, \quad C_{4i}^* = -\sin \lambda_i l \left[\sin l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} \right]^{-1}. \quad (40)$$

Если учесть равенства (40) и трансцендентное уравнение (38) ($\sin \lambda_i l = 0$), то ядро КИП (36) при $\lambda_i \neq \Omega_i$, $\lambda_i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}\Omega_i$ принимает такой вид:

$$G(\lambda_i, x) = \sin \lambda_i x. \quad (41)$$

Соответственно квадрат нормы ядра преобразования (9) определяется соотношением

$$\|G_i\|^2 = \int_0^l G^2(\lambda_i, x) dx = \int_0^l \sin^2 \lambda_i x dx = \frac{1}{2} \left(l - \frac{1}{2\lambda_i} \sin 2\lambda_i l \right). \quad (42)$$

Таким образом, в случае шарнирного опирания стержня в формуле обращения (8) собственные значения λ_i ($i \in \mathbb{N}$), ядро $G(\lambda_i, x)$ и квадрат нормы $\|G_i\|^2$ находятся по формулам (39), (41), (42).

3.2. *Стержень, жёстко защемлённый по концам.* Коэффициент жёсткости такого закрепления $\alpha \rightarrow \infty$. Поделив второе равенство (18) на α и осуществив предельный переход $\alpha \rightarrow \infty$, получаем соответствующие граничные условия:

$$G(\lambda_i, x) = 0, \quad G'(\lambda_i, x) = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = l. \quad (43)$$

После подстановки выражения (36) в соотношения (43) и исследования нетривиального решения полученной однородной системы четырёх алгебраических уравнений находим, что

при $\lambda_i > \Omega_i$ —

$$2\lambda_i \left(1 - \cos \lambda_i l \operatorname{ch} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} \right) - \frac{\Omega_i^2}{\sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2}} \sin \lambda_i l \operatorname{sh} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} = 0; \quad (44)$$

при $\lambda_i < \Omega_i$ —

$$2\lambda_i \left(1 - \cos \lambda_i l \cos l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} \right) - \frac{\Omega_i^2}{\sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2}} \sin \lambda_i l \sin l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} = 0.$$

Откуда при $\lambda_i > \Omega_i$ —

$$C_{1i}^* = -C_{3i}^* = \lambda_i \left(\cos \lambda_i l - \operatorname{ch} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} \right), \quad (45)$$

$$C_{4i}^* = -C_{2i}^* \lambda_i (\lambda_i^2 - \Omega_i^2)^{-\frac{1}{2}} = \lambda_i (\lambda_i^2 - \Omega_i^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda_i \sin \lambda_i l + (\lambda_i^2 - \Omega_i^2)^{\frac{1}{2}} \operatorname{sh} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} \right];$$

при $\lambda_i < \Omega_i$ —

$$C_{1i}^* = -C_{3i}^* = \lambda_i \left(\cos \lambda_i l - \cos l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} \right),$$

$$C_{4i}^* = -C_{2i}^* \lambda_i (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} = \lambda_i (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} \left[\lambda_i \sin \lambda_i l - (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \sin l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} \right].$$

Трансцендентные уравнения (40) и выражения (45) совместно с (36) определяют соответственно параметры λ_i ($i \in \mathbb{N}$), ядро интегрального преобразования $G(\lambda_i, x)$, а затем по квадратуре (9) и квадрат нормы $\|G_i\|^2$.

3.3. *Стержень с одним жёстко, а другим — шарнирно закреплённым концом.* Граничные условия (18) в этом случае принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} G(\lambda_i, x) &= 0, & G''(\lambda_i, x) &= 0 & \text{при } x = 0, \\ G(\lambda_i, x) &= 0, & G'(\lambda_i, x) &= 0 & \text{при } x = l. \end{aligned} \quad (46)$$

В результате подстановки выражения (36) в равенства (46) формируется однородная алгебраическая система уравнений относительно C_{1i}^* , C_{2i}^* , C_{3i}^* , C_{4i}^* , нетривиальные решения которой приводят к таким соотношениям:

при $\lambda_i > \Omega_i$ —

$$(\lambda_i^2 - \Omega_i^2)^{\frac{1}{2}} \sin \lambda_i l \operatorname{ch} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} - \lambda_i \cos \lambda_i l \operatorname{sh} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} = 0,$$

при $\lambda_i < \Omega_i$ —

$$(2\lambda_i^2 - \Omega_i^2) \sin \lambda_i l \cos l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} - \lambda_i \Omega_i^2 (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} \cos \lambda_i l \sin l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} + \\ + 2\lambda_i (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{\frac{1}{2}} \sin l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} \cos l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} = 0; \quad (47)$$

при $\lambda_i > \Omega_i$ —

$$C_{1i}^* = -C_{3i}^* = \sin \lambda_i l - \lambda_i (\lambda_i^2 - \Omega_i^2)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sh} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2},$$

$$C_{4i}^* = -C_{2i}^* \lambda_i (\lambda_i^2 - \Omega_i^2)^{-\frac{1}{2}} = \lambda_i (\lambda_i^2 - \Omega_i^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \lambda_i l - \operatorname{ch} l \sqrt{\lambda_i^2 - \Omega_i^2} \right),$$

при $\lambda_i < \Omega_i$ —

$$C_{1i}^* = -C_{3i}^* = \sin \lambda_i l - \lambda_i (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} \sin l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2},$$

$$C_{4i}^* = -C_{2i}^* \lambda_i (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} = \lambda_i (\Omega_i^2 - \lambda_i^2)^{-\frac{1}{2}} \left(\cos \lambda_i l - \cos l \sqrt{\Omega_i^2 - \lambda_i^2} \right). \quad (48)$$

Аналогично предыдущему, равенства (36), (48) представляют ядро КИП (7), (8), а (47) являются трансцендентными уравнениями для определения собственных значений λ_i ($i \in \mathbb{N}$). Квадрат нормы $\|G_i\|^2$ при этом вычисляется в соответствии с квадратурой (9).

4. Действие внезапно приложенной поперечной нагрузки. Построенное выше общее решение задачи (8), (35) справедливо для произвольных динамических воздействий $q(x, t)$, $P(t)$ (см. рис. 2). В качестве примера рассмотрим действие на стержень внезапно приложенной равномерно распределённой нагрузки интенсивностью $q_0 = \text{const}$. При этом стержень находится в покое $y_0(x) = V_0(x) = 0$ и сжат продольной силой P_0 .

Таким образом, имеем

$$P(t) = P_0 = \text{const}, \quad r(t) = 1, \\ q(x, t) = q_0 \chi(t), \quad (49)$$

где $\chi(t)$ — функция Хэвисайда.

В процессе мгновенного приложения поперечной нагрузки модуль упругости $E(t)$ согласно (1) изменяется во времени от 0 до T :

$$f(t) = at + b, \quad (50)$$

где $a = (a_1 + a_2)/T$, $b = b_1 + b_2$, $a_1 = -a_2 = 2(m - 1)$, $b_1 = 1$, $b_2 = 2m - 1$, причём $a_2 = b_2 = 0$ при $t \leq T/2$, $a_1 = b_1 = 0$ при $t > T/2$ (см. рис. 2).

Для нулевых начальных условий и возмущения (49) трансформанты нагрузки $\bar{q}(\lambda_i, t) = \bar{q}(h_i, t)$ и перемещений $\bar{y}(\lambda_i, t) = \bar{y}(h_i, t)$ определяются следующими равенствами:

$$\bar{q}(h_i, t) = q_0 \chi(t) \int_0^l G(\lambda_i, x) dx,$$

Рис. 2. Изменение модуля упругости материала

$$\begin{aligned} \bar{y}(h_i, t) = \frac{q_0}{mh_i} S^{-\frac{1}{4}}(h_i, 0) \int_0^t \chi(\tau) S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t - \tau) \times \\ \times \sin \left[h_i \int_0^{t-\tau} \sqrt{S(h_i, u)} du \right] d\tau \int_0^l G(\lambda_i, x) dx, \end{aligned} \quad (51)$$

где в соответствии с (23) и (50)

$$S(h_i, t) = A_i(at + b), \quad A_i = \frac{E_0 J}{m} \left(1 - \frac{k^2}{h_i} \right), \quad h_i = \lambda_i^2. \quad (52)$$

Имея в виду (50), вычисляем последовательно квадратуры, содержащиеся в выражении (51):

$$\begin{aligned} \int_0^{t-\tau} \sqrt{S(h_i, u)} du = \sqrt{A_i} \int_0^{t-\tau} (au + b)^{\frac{1}{2}} du = \frac{2}{3} \sqrt{A_i} (au + b)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{t-\tau}, \\ \int_0^t \chi(\tau) S^{-\frac{1}{4}}(h_i, t - \tau) \sin \left[h_i \int_0^{t-\tau} \sqrt{S(h_i, u)} du \right] d\tau = \\ = A_i^{-\frac{1}{4}} \left\{ \cos \beta_i b^{\frac{3}{2}} \int_0^t [a(t - \tau) + b]^{-\frac{1}{4}} \sin \beta_i [a(t - \tau) + b]^{\frac{3}{2}} d\tau - \right. \\ \left. - \sin \beta_i b^{\frac{3}{2}} \int_0^t [a(t - \tau) + b]^{-\frac{1}{4}} \cos \beta_i [a(t - \tau) + b]^{\frac{3}{2}} d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (53)$$

где

$$\beta_i = \frac{2}{3} \frac{h_i}{a} \sqrt{A_i}.$$

Квадратуры, содержащиеся в правой части равенства (53), вычисляются путём замены

$$[a(t - \tau) + b]^{\frac{3}{2}} = x$$

и последующего разложения в ряды Тейлора функций $\sin \beta_i x$ и $\cos \beta_i x$.

Окончательно трансформанта (51) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} \bar{y}(h_i, t) = \frac{2}{3} \frac{q_0 A_i}{mh_i a} \left[\frac{E_0 J}{m} b \left(1 - \frac{k^2}{h_i} \right) \right]^{-\frac{1}{4}} \times \\ \times \left\{ \cos(\beta_i b^{\frac{3}{2}}) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\beta_i^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-\frac{1}{2})} \left[(at+b)^{3(n-\frac{1}{4})} - b^{3(n-\frac{1}{4})} \right] + \right. \\ \left. + \sin(\beta_i b^{\frac{3}{2}}) \left[2(at+b)^{\frac{3}{4}} - 2b^{\frac{3}{4}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_i^{2n}}{2n!(2n+\frac{1}{2})} (at+b)^{3(n+\frac{1}{2})} - \right. \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_i^{2n}}{2n!(2n+\frac{1}{2})} b^{3(n+\frac{1}{2})} \right] \right\} \int_0^l G(\lambda_i, x) dx. \end{aligned} \quad (54)$$

Перемещения сжатого стержня $y(x, t)$, подверженного действию внезапно приложенной поперечной нагрузки при всплеске (50) модуля упругости его материала, определяются по формуле обращения (8), в которой трансформанта $\overline{y}(h_i, t)$ вычисляется в соответствии с (54). При этом собственные значения $\lambda_i = \sqrt{h_i}$ ($i \in \mathbb{N}$), ядро $G(\lambda_i, x)$ и квадрат нормы $\|G_i\|^2$ находятся по соотношениям, приведённым в п. 3 в зависимости от концевых условий закрепления стержня.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Сеницкий Ю. Э. Исследование упругого деформирования элементов конструкций при динамических воздействиях методом конечных интегральных преобразований. — Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1985. — 176 с.
2. Сеницкий Ю. Э. Метод конечных интегральных преобразований. Его перспективы в исследовании краевых задач механики (Обзорная статья) // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Математическая*, 2003. — № 22. — С. 10–39.
3. Лычев С. А., Сеницкий Ю. Э. Несимметричные интегральные преобразования и их приложения к задачам вязкоупругости // *Вестн. Сам. гос. ун-та. Естественнонаучн. серия. Специальный выпуск*, 2002. — С. 16–38.
4. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
5. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. — М.: Наука, 1968. — 503 с.
6. Хединг Дж. Введения в метод фазовых интегралов (метод ВКБ). — М.: Мир, 1965. — 237 с.

Поступила в редакцию 08/VII/2009;
в окончательном варианте — 13/VIII/2009.

MSC: 74S05

DYNAMIC PROBLEM FOR INHOMOGENEOUS CANTILEVER MADE OF UNSTABLE MATERIAL UNDER THE INFLUENCE OF COMBINED BENDING COMPRESSION

Yu. É. Senitsky

Samara State University of Architecture and Civil Engineering,
194, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443001

E-mail: sgasu@sgasu.smr.ru

New analytical solution of initial-boundary value problem for inhomogeneous elastic prismatic cantilever loaded by combined bending compression is developed. Modulus of volume elasticity of the material is arbitrary time function. General method of final integral transformation is used, in which transformant is a phase integral. In a special case the influence of unexpectedly applied pressure in the considered law is analyzed and the changes of modulus of volume elasticity are shown.

Key words: *inhomogeneous cantilever, elastic modulus, function of time, dynamic loading, finite integral transformations method, beam operator, phase integrals, spectral decomposition.*

Original article submitted 08/VII/2009;
revision submitted 13/VIII/2009.

Yuriy É. Senitsky (Dr. Sci. (Techn.), Honoured Worker of Science), Head of Dept., Dept. of Resistance of Materials & Construction Mechanics.