Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Мамедов, Об одной трёхмерной задаче Гурса нового типа для гиперболического уравнения с разрывными коэффициентами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 209–213

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:35:37

УДК 517.956

НЕКЛАССИЧЕСКАЯ ТРЁХМЕРНАЯ ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

*И. Г. Мамедов*Институт Кибернетики им. А. И. Гусейнова НАН Азербайджана,
AZ1141, Азербайджан, Баку, ул. Ф. Агаева, 9.E-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru

Для одного дифференциального уравнения гиперболического типа с разрывными коэффициентами рассмотрена трёхмерная задача Гурса с неклассическими краевыми условиями, не требующими условий согласования. Обоснована эквивалентность этих условий классическим краевым условием в случае, если решение поставленной задачи ищется в анизотропном пространстве С. Л. Соболева.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, трёхмерная задача Гурса, уравнение с разрывными коэффициентами.

Постановка задачи. За последние годы существенно повысился интерес к многомерным краевым задачам для дифференциальных уравнений с частными производными [1–6]. Это связано с их появлением в различных задачах прикладного характера.

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned} (V_{2,2,1}u)(x) \equiv & D_1^2 D_2^2 D_3 u(x) + a_{2,2,0}(x) D_1^2 D_2^2 u(x) + \\ & + a_{2,1,1}(x) D_1^2 D_2 D_3 u(x) + a_{1,2,1}(x) D_1 D_2^2 D_3 u(x) + \\ & + \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3 \leq 4; \\ i_1 \equiv 0,1,2; \\ i_2 \equiv 0,1,2; \\ i_3 \equiv 0,1}} a_{i_1,i_2,i_3}(x) D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(x) = Z_{2,2,1}(x) \in L_p(G). \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь $u(x) \equiv u(x_1, x_2, x_3)$ — искомая функция, определенная на G ; $a_{i_1,i_2,i_3}(x)$ — заданные измеримые функции на $G = G_1 \times G_2 \times G_3$, где $G_\xi = (0, h_\xi)$, $\xi \equiv 1, 2, 3$; $Z_{2,2,1}(x)$ — заданная измеримая функция на G ; $D_\xi \equiv \partial/\partial x_\xi$ — оператор обобщённого дифференцирования в смысле С. Л. Соболева.

Уравнение (1) является гиперболическим уравнением, которое обладает тремя действительными характеристиками $x_1 = \text{const}$, $x_2 = \text{const}$, $x_3 = \text{const}$, первая и вторая из которых двукратная, а третья — простая. Поэтому уравнение (1) в некотором смысле можно рассматривать как псевдопараболическое уравнение [7, 8]. Это уравнение возникает, например, при изучении вопросов фильтрации жидкости в пористых средах, влагопереноса в почвогрунтах, распространения импульсных лучевых волн, моделировании различных биологических процессов и явлений, а также в теории обратных задачах.

В данной работе рассматривается уравнение (1) в общем случае, когда коэффициенты $a_{i_1,i_2,i_3}(x)$ являются негладкими функциями, удовлетворяющими лишь следующим условиям:

$$\begin{aligned} a_{i_1,i_2,0}(x) \in L_p(G), \quad a_{2,i_2,0}(x) \in L_{\infty,p,p}^{x_1,x_2,x_3}(G), \quad a_{i_1,2,0}(x) \in L_{p,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3}(G), \\ a_{i_1,i_2,1}(x) \in L_{p,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3}(G), \quad a_{2,2,0}(x) \in L_{\infty,\infty,p}^{x_1,x_2,x_3}(G), \quad a_{i_1,2,1}(x) \in L_{p,\infty,\infty}^{x_1,x_2,x_3}(G), \end{aligned}$$

Ильгар Гурбат Мамедов (к.ф.-м.н.), ведущий научный сотрудник.

$$a_{2,i_2,1}(x) \in L_{\infty,p,\infty}^{x_1,x_2,x_3}(G),$$

где $i_1 \equiv 0, 1$, $i_2 \equiv 0, 1$. При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает разрывными коэффициентами, которые удовлетворяют только некоторым условиям типа p -интегрируемости и ограниченности, т. е. рассмотренный гиперболический дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряжённого оператора. Иначе говоря, функция Римана для такого уравнения не может быть исследована классическим методом характеристик. В работах [9, 10] функция Римана определяется как решение интегрального уравнения. Это более естественно, чем классический способ введения функции Римана. Дело в том, что в классическом варианте для определения функции Римана требуются жёсткие гладкие условия на коэффициенты уравнения (см. напр. [11, 12]).

При этих условиях решение $u(x)$ уравнения (1) будем искать в пространстве С. Л. Соболева

$$W^{(2,2,1)}(G) \equiv \{u(x) : D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3^{i_3} u(x) \in L_p(G); i_\eta \equiv 0, 1, 2, \eta \equiv 1, 2, i_3 \equiv 0, 1\},$$

где $1 \leq p \leq \infty$. Для уравнения (1) условия Гурса классического вида можно задать в виде

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3)|_{x_1=0} &= F(x_2, x_3), & \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1}|_{x_1=0} &= h(x_2, x_3), \\ u(x_1, x_2, x_3)|_{x_2=0} &= S(x_1, x_3), & \frac{\partial u(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_2}|_{x_2=0} &= P(x_1, x_3), \\ u(x_1, x_2, x_3)|_{x_3=0} &= Q(x_1, x_2), \end{aligned} \quad (2)$$

где $F(x_2, x_3)$, $h(x_2, x_3)$, $S(x_1, x_3)$, $P(x_1, x_3)$, $Q(x_1, x_2)$ — заданные измеримые функции на G . Очевидно, что в случае условий (2) заданные функции кроме условий $F(x_2, x_3) \in W_p^{(2,1)}(G_2 \times G_3)$, $h(x_2, x_3) \in W_p^{(2,1)}(G_2 \times G_3)$, $S(x_1, x_3) \in W_p^{(2,1)}(G_1 \times G_3)$, $P(x_1, x_3) \in W_p^{(2,1)}(G_1 \times G_3)$, $Q(x_1, x_2) \in W_p^{(2,2)}(G_1 \times G_2)$ должны удовлетворять также следующим условиям согласования:

$$\begin{aligned} F(0, x_3) &= S(0, x_3), & Q(0, x_2) &= F(x_2, 0), & Q(x_1, 0) &= S(x_1, 0), \\ h(0, x_3) &= S_{x_1}(0, x_3), & h(x_2, 0) &= Q_{x_1}(0, x_2), & P(x_1, 0) &= Q_{x_2}(x_1, 0), \\ P(0, x_3) &= F_{x_2}(0, x_3), & h_{x_2}(0, x_3) &= P_{x_1}(0, x_3). \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим следующие неклассические начально-краевые условия:

$$\begin{aligned} V_{i_1,i_2,0}u &\equiv D_1^{i_1} D_2^{i_2} u(0) = Z_{i_1,i_2,0} \in \mathbb{R}, \quad i_k \equiv 0, 1, \quad k \equiv 1, 2; \\ (V_{2,i_2,0}u)(x_1) &\equiv D_1^2 D_2^{i_2} u(x_1, 0, 0) = Z_{2,i_2,0}(x_1) \in L_p(G_1), \quad i_2 \equiv 0, 1; \\ (V_{i_1,2,0}u)(x_2) &\equiv D_1^{i_1} D_2^2 u(0, x_2, 0) = Z_{i_1,2,0}(x_2) \in L_p(G_2), \quad i_1 \equiv 0, 1; \\ (V_{2,2,0}u)(x_1, x_2) &\equiv D_1^2 D_2^2 u(x_1, x_2, 0) = Z_{2,2,0}(x_1, x_2) \in L_p(G_1 \times G_2); \\ (V_{i_1,i_2,1}u)(x_3) &\equiv D_1^{i_1} D_2^{i_2} D_3 u(0, 0, x_3) = Z_{i_1,i_2,1}(x_3) \in L_p(G_3), \quad i_k \equiv 0, 1, \quad k \equiv 1, 2; \\ (V_{i_1,2,1}u)(x_2, x_3) &\equiv D_1^{i_1} D_2^2 D_3 u(0, x_2, x_3) = Z_{i_1,2,1}(x_2, x_3) \in L_p(G_2 \times G_3), \quad i_1 \equiv 0, 1; \\ (V_{2,i_2,1}u)(x_1, x_3) &\equiv D_1^2 D_2^{i_2} D_3 u(x_1, 0, x_3) = Z_{2,i_2,1}(x_1, x_3) \in L_p(G_1 \times G_3), \quad i_2 \equiv 0, 1. \end{aligned} \quad (4)$$

Если функция $u \in W_p^{(2,2,1)}(G)$ является решением трёхмерной задачи Гурса классического вида (1), (2), то она является также решением задачи (1), (4) для Z_{i_1,i_2,i_3} , определяемых следующими равенствами:

$$\begin{aligned} Z_{0,0,0} &= F(0, 0) = S(0, 0) = Q(0, 0); & Z_{1,0,0} &= h(0, 0) = Q_{x_1}(0, 0) = S_{x_1}(0, 0); \\ Z_{0,1,0} &= P(0, 0) = Q_{x_2}(0, 0) = F_{x_2}(0, 0); & Z_{1,1,0} &= h_{x_2}(0, 0) = P_{x_1}(0, 0) = Q_{x_1 x_2}(0, 0); \\ Z_{2,0,0}(x_1) &= Q_{x_1 x_1}(x_1, 0) = S_{x_1 x_1}(x_1, 0); & Z_{2,1,0}(x_1) &= Q_{x_1 x_1 x_2}(x_1, 0) = P_{x_1 x_1}(x_1, 0); \\ Z_{0,2,0}(x_2) &= F_{x_2 x_2}(x_2, 0) = Q_{x_2 x_2}(0, x_2); & Z_{1,2,0}(x_2) &= h_{x_2 x_2}(x_2, 0) = Q_{x_1 x_2 x_2}(0, x_2); \\ Z_{0,0,1}(x_3) &= F_{x_3}(0, x_3) = S_{x_3}(0, x_3); & Z_{1,0,1}(x_3) &= h_{x_3}(0, x_3) = S_{x_1 x_3}(0, x_3); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Z_{0,1,1}(x_3) &= P_{x_3}(0, x_3) = F_{x_2 x_3}(0, x_3); \quad Z_{1,1,1}(x_3) = h_{x_2 x_3}(0, x_3) = P_{x_1 x_3}(0, x_3); \\
 Z_{2,2,0}(x_1, x_2) &= Q_{x_1 x_1 x_2 x_2}(x_1, x_2); \quad Z_{0,2,1}(x_2, x_3) = F_{x_2 x_2 x_3}(x_2, x_3); \\
 Z_{1,2,1}(x_2, x_3) &= h_{x_2 x_2 x_3}(x_2, x_3); \quad Z_{2,0,1}(x_1, x_3) = S_{x_1 x_1 x_3}(x_1, x_3); \\
 Z_{2,1,1}(x_1, x_3) &= P_{x_1 x_1 x_3}(x_1, x_3).
 \end{aligned}$$

Легко доказать, что верно и обратное. Другими словами, если функция $u \in W_p^{(2,2,1)}(G)$ является решением задачи (1), (4), то она является также решением задачи (1), (2) для следующих функций:

$$\begin{aligned}
 F(x_2, x_3) &= Z_{0,0,0} + x_2 Z_{0,1,0} + \int_0^{x_2} (x_2 - \beta_2) Z_{0,2,0}(\beta_2) d\beta_2 + \int_0^{x_3} Z_{0,0,1}(\beta_3) d\beta_3 + \\
 &+ x_2 \int_0^{x_3} Z_{0,1,1}(\beta_3) d\beta_3 + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_2 - \beta_2) Z_{0,2,1}(\beta_2, \beta_3) d\beta_2 d\beta_3; \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h(x_2, x_3) &= Z_{1,0,0} + x_2 Z_{1,1,0} + \int_0^{x_2} (x_2 - \alpha_2) Z_{1,2,0}(\alpha_2) d\alpha_2 + \int_0^{x_3} Z_{1,0,1}(\alpha_3) d\alpha_3 + \\
 &+ x_2 \int_0^{x_3} Z_{1,1,1}(\alpha_3) d\alpha_3 + \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} (x_2 - \alpha_2) Z_{1,2,1}(\alpha_2, \alpha_3) d\alpha_2 d\alpha_3; \quad (6)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S(x_1, x_3) &= Z_{0,0,0} + x_1 Z_{1,0,0} + \int_0^{x_1} (x_1 - \gamma_1) Z_{2,0,0}(\gamma_1) d\gamma_1 + \int_0^{x_3} Z_{0,0,1}(\gamma_3) d\gamma_3 + \\
 &+ x_1 \int_0^{x_3} Z_{1,0,1}(\gamma_3) d\gamma_3 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_1 - \gamma_1) Z_{2,0,1}(\gamma_1, \gamma_3) d\gamma_1 d\gamma_3; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(x_1, x_3) &= Z_{0,1,0} + x_1 Z_{1,1,0} + \int_0^{x_1} (x_1 - \tau_1) Z_{2,1,0}(\tau_1) d\tau_1 + \int_0^{x_3} Z_{0,1,1}(\tau_3) d\tau_3 + \\
 &+ x_1 \int_0^{x_3} Z_{1,1,1}(\tau_3) d\tau_3 + \int_0^{x_1} \int_0^{x_3} (x_1 - \tau_1) Z_{2,1,1}(\tau_1, \tau_3) d\tau_1 d\tau_3; \quad (8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q(x_1, x_2) &= Z_{0,0,0} + x_1 Z_{1,0,0} + x_2 Z_{0,1,0} + x_1 x_2 Z_{1,1,0} + \\
 &+ \int_0^{x_1} (x_1 - \xi_1) Z_{2,0,0}(\xi_1) d\xi_1 + x_2 \int_0^{x_1} (x_1 - \xi_1) Z_{2,1,0}(\xi_1) d\xi_1 + \\
 &+ \int_0^{x_2} (x_2 - \xi_2) Z_{0,2,0}(\xi_2) d\xi_2 + x_1 \int_0^{x_2} (x_2 - \xi_2) Z_{1,2,0}(\xi_2) d\xi_2 +
 \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} (x_1 - \xi_1)(x_2 - \xi_2) Z_{2,2,0}(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2. \quad (9)$$

Отметим, что функции (5)–(9) обладают одним важным свойством, а именно, для них выполняются автоматическим образом условия согласования (3) при всех Z_{i_1, i_2, i_3} , обладающих вышеуказанными свойствами. Поэтому равенства (5)–(9) можно рассматривать как общий вид всех функций $F(x_2, x_3)$, $h(x_2, x_3)$, $S(x_1, x_3)$, $P(x_1, x_3)$, $Q(x_1, x_2)$, удовлетворяющих условиям согласования (3).

Итак, трёхмерные задачи Гурса классического вида (1), (2) и вида (1), (4) в общем случае эквивалентны. Однако трёхмерная неклассическая начально-краевая задача (1), (4) по постановке более естественна, чем задача (1), (2). Это связано с тем, что в постановке задачи (1), (4) правые части краевых условий не требуют никаких дополнительных условий типа согласования.

Отметим, что для обоснования корректности неклассической начально-краевой задачи (1), (4) в соболевском пространстве доказывается теорема о гомеоморфизме, которая аналогична методу, предложенному автором в работе [13].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Березин А. В., Воронцов А. С., Марков М. Б., Плющенко Б. Д. О выводе и решении уравнений Максвелла в задачах с заданным волновым фронтом // *Матем. моделирование*, 2006. — Т. 18, № 4. — С. 43–60.
2. Кошечева О. А. О построении функции Римана для уравнения Бианки в n -мерном пространстве // *Изв. вуз. Матем.*, 2008. — № 9. — С. 40–46; англ. пер.: Koshcheeva O. A. Construction of the Riemann function for the Bianchi equation in an n -dimensional space // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008. — Vol. 52, No. 9. — P. 35–40.
3. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Задача Гурса для одного трехмерного уравнения со старшей производной // *Изв. вуз. Матем.*, 2001. — № 11. — С. 77–81; англ. пер.: Zhegalov V. I., Utkina E. A. The Goursat problem for a three-dimensional equation with a higher derivative // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2001. — Vol. 45, No. 11. — P. 74–78.
4. Уткина Е. А. Об одной трёхмерной задаче Гурса // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001. — № 12. — С. 30–35.
5. Джохадзе О. М. О трёхмерной обобщённой задаче Гурса для уравнения третьего порядка и связанные с ней общие двумерные интегральные уравнения Вольтерра первого рода // *Дифференц. уравнения*, 2006. — Т. 42, № 3. — С. 385–394; англ. пер.: Jokhadze O. M. The three-dimensional generalized Goursat problem for a third-order equation and related general two-dimensional Volterra integral equations of the first kind // *Differential Equations*, 2006. — Vol. 42, No. 3. — P. 412–421.
6. Midodashvili B. Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // *Proc. of A. Razmadze Mathematical Institute*, 2005. — Vol. 138. — P. 43–54.
7. Мамедов И. Г. Фундаментальное решение задачи Коши, связанной с псевдопараболическим уравнением четвертого порядка // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2009. — Т. 49, № 1. — С. 99–110; англ. пер.: Mamedov I. G. A fundamental solution to the Cauchy problem for a fourth-order pseudoparabolic equation // *J. Comput. Math. Math. Phys.* Vol. 49, No. 1. — P. 93–104.
8. Mamedov I. G. On correct solvability of a problem with loaded boundary conditions for a fourth order pseudoparabolic equation // *Mem. Differential Equations Math. Phys.*, 2008. — Vol. 43. — P. 107–118.
9. Жегалов В. И. Трёхмерный аналог задачи Гурса / В сб.: *Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа*. — Новосибирск, 1990. — С. 94–98.
10. Жегалов В. И., Уткина Е. А. Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // *Изв. вуз. Матем.*, 1999. — № 10. — С. 73–76; англ. пер.: Zhegalov V. I., Utkina E. A. Pseudoparabolic equation of the third order // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 1999. — Vol. 43, No. 10. — P. 70–73.
11. Лернер М. Е. О качественных свойствах функции Римана // *Дифференц. уравнения*, 1991. — Т. 27, № 12. — С. 2106–2119.

12. *Троицкая С. Д.* О первой краевой задаче для гиперболического уравнения на плоскости // *Матем. заметки*, 1999. — Т. 65, № 2. — С. 294–306; англ. пер.: *Troitskaya S. D.* On a first boundary value problem for hyperbolic equations in the plane // *Mathematical Notes*, 1999. — Vol. 65, No. 2. — P. 242–252.
13. *Mamedov I. G.* The local boundary value problem for an integro-differential equation // *Proc. Inst. Math. Mech., Azerb. Acad. Sci.*, 2002. — Vol. 17. — P. 96–101.

Поступила в редакцию 18/V/2009;
в окончательном варианте — 10/II/2010.

MSC: 35S15, 35L35, 35L25, 47G30

NON-CLASSIC 3D GOURSAT PROBLEM FOR ONE HYPERBOLIC EQUATION WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

I. G. Mamedov

A. I. Huseynov Institute of Cybernetics of NAS of Azerbaijan,
9, F. Agaev str., Baku, Azerbaijan, AZ1141.

E-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru

For a differential equation of a hyperbolic type with discontinuous coefficients a 3D Goursat problem with nonclassical boundary conditions which requires no matching conditions is studied. Equivalence of these conditions to classical boundary condition is justified, in the case when the solution of the problem in the anisotropic $S. L.$ Sobolev's space is found.

Key words: *hyperbolic equation, 3D Goursat problem, equation with discontinuous coefficients.*

Original article submitted 18/V/2009;
revision submitted 10/II/2010.

Ilgar G. Mamedov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Leading Research Scientist.