Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Никитенко, Плоская задача установившейся ползучести элементов конструкций, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 45–52

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu694>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 10:48:16

Механика деформируемого твёрдого тела

УДК 539.376+539.4

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

А. Ф. Никитенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Лаврентьева, 15.

E-mails: naf@hydro.nsc.ru

В полярных координатах с использованием метода малого параметра решена задача плоского деформированного состояния равномерно нагретых элементов конструкций в предположении установившейся ползучести материала; при этом в качестве эквивалентного напряжения в соответствующих соотношениях принимается критерий Мизеса—Шлейхера.

Ключевые слова: установившаяся ползучесть, плоское деформированное состояние, критерий Мизеса—Шлейхера.

Введение. Методика расчета напряжённно-деформированного состояния (НДС) элементов конструкций в условиях установившейся ползучести их материала достаточно хорошо разработана [1–3] и по праву вошла в справочную литературу [4]. В качестве физических соотношений установившейся ползучести конструкционных материалов при этом используют ассоциированный закон течения к поверхности $\sigma_e = \text{const}$, т. е.

$$\eta_{ij} = h \frac{\partial \sigma_e}{\partial \sigma_{ij}}, \quad i, j \equiv 1, 2, 3, \quad (1)$$

где η_{ij} , σ_{ij} — компоненты тензоров скоростей деформаций ползучести и напряжений; σ_e — однородная относительно напряжений функция первой степени. Учитывая это и то, что удельная мощность рассеяния энергии при ползучести есть $W = \eta_{ij}\sigma_{ij}$, из (1) получаем $h = W/\sigma_e$. В большинстве случаев принимают [1–4]

$$W = B\sigma_e^{n+1}. \quad (2)$$

Здесь B , n — характеристики ползучести материала. В упомянутой выше методике расчета НДС элементов конструкций эквивалентное напряжение σ_e отождествляют, как правило, с критерием Мизеса, т. е. с интенсивностью напряжений. В отличие от этого ниже будем полагать, что эквивалентное напряжение есть критерий Мизеса—Шлейхера, т. е.

$$\sigma_e = \sigma_i + \beta\sigma_0, \quad (3)$$

Анатолий Фёдорович Никитенко (д.ф.-м.н., профессор), ведущий научный сотрудник.

где σ_0 — гидростатическая составляющая тензора напряжений ($\sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3$), σ_i — интенсивность напряжений ($\sigma_i = \sqrt{3s_{ij}s_{ij}/2}$), s_{ij} — компоненты девиатора напряжений $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0\delta_{ij}$, δ_{ij} — символ Кронекера, $\beta \geq 0$ — коэффициент внутреннего трения.

Ограничимся расчетом НДС элементов конструкций в условиях плоского деформированного состояния и, более конкретно, всю совокупность необходимых уравнений будем записывать в полярной системе координат r, φ (третья ось z перпендикулярна плоскости $r\varphi$). Из условия $\eta_z = 0$, что служит определением плоского деформированного состояния [1–4], получаем, используя (1), (3):

$$\sigma_z = \frac{\sigma_\varphi + \sigma_r}{2} - \frac{\beta}{3}\sigma_i. \quad (4)$$

Одновременно с этим легко показать, что $\sigma_0 = \sigma_z + (2\beta\sigma_i)/9$, а интенсивность напряжений есть

$$\sigma_i = \frac{3\beta_0}{2\beta} \sqrt{(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2}, \quad \beta_0 = \frac{\sqrt{3}\beta}{\sqrt{9 - \beta^2}}. \quad (5)$$

Очевидно, что $\beta_0 \rightarrow 0$ и $(\beta_0/\beta) \rightarrow (1/\sqrt{3})$ при $\beta \rightarrow 0$. С учётом полученного определяющие соотношения (1) примут вид:

$$\eta_\varphi = \frac{W}{\sigma_e} \left(\frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{\sigma_i} + \frac{\beta}{2} \right), \quad \eta_r = \frac{W}{\sigma_e} \left(-\frac{3}{4} \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{\sigma_i} + \frac{\beta}{2} \right), \quad \eta_z = 0, \quad (6)$$

$$2\eta_{r\varphi} = \frac{W}{\sigma_e} \left(3 \frac{\sigma_{r\varphi}}{\sigma_i} \right), \quad W = B\sigma_e^{n+1}.$$

Эквивалентное напряжение (3) с использованием (4) и (5) будет

$$\sigma_e = \frac{\beta}{2\beta_0} \left[\sqrt{(\sigma_\varphi - \sigma_r)^2 + 4\sigma_{r\varphi}^2} + \beta_0(\sigma_\varphi + \sigma_r) \right]. \quad (7)$$

Из (6) следует, что $\eta_\varphi + \eta_r + \eta_z = \beta \cdot (W/\sigma_e)$, т. е. соотношения (6) описывают ползучесть дилатирующей среды.

К уравнениям (6), (7) необходимо добавить уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (8)$$

с соответствующими граничными условиями, соотношения Коши

$$\eta_r = \frac{\partial \dot{u}}{\partial r}, \quad \eta_\varphi = \frac{\dot{u}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{v}}{\partial \varphi}, \quad 2\eta_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{u}}{\partial \varphi} - \frac{\dot{v}}{r} + \frac{\partial \dot{v}}{\partial r}$$

($\dot{u}, \dot{v}$ — компоненты вектора скорости перемещений) и уравнение неразрывности скоростей деформации

$$\frac{\partial^2 \eta_r}{\partial^2 \varphi} + r^2 \frac{\partial^2 \eta_\varphi}{\partial r^2} - r \frac{\partial \eta_r}{\partial r} + 2r \frac{\partial \eta_\varphi}{\partial r} = \frac{\partial^2 (2r\eta_{r\varphi})}{\partial r \partial \varphi}. \quad (9)$$

Введём функцию напряжений $\Phi = \Phi(r, \varphi)$ такую, что [1, 2]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}, \quad \sigma_\varphi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right). \quad (10)$$

Очевидно, что уравнения равновесия при этом тождественно удовлетворяются. Подставляя (6) с использованием (10) в (9), получаем для функции напряжений нелинейное дифференциальное уравнение, интегрирование которого весьма затруднительно.

В связи с этим линеаризуем задачу и запишем функцию напряжений в виде

$$\Phi(r, \varphi) = \Phi_0(r) + \delta \Phi_1(r, \varphi), \quad (11)$$

где $\Phi_0(r)$ есть функция, описывающая осесимметричное напряжённое состояние, $\Phi_1(r, \varphi)$ — функция, корректирующая отклонение напряжённого состояния от осесимметричного; δ — малый параметр. Линеаризация упрощает сформулированную выше задачу и позволяет свести её к двум самостоятельным — определению функций $\Phi_0(r)$ и $\Phi_1(r, \varphi)$.

1. Определение функции напряжений $\Phi_0(r)$. Осесимметричное напряжённое состояние характеризуется тем, что напряжения и, естественно, скорости деформаций не зависят от полярного угла. Для обозримости результатов будем предполагать еще, что касательное напряжение равно нулю. В этом случае

$$\sigma_\varphi^0(r) = \frac{d^2 \Phi_0}{dr^2}, \quad \sigma_r^0(r) = \frac{1}{r} \frac{d\Phi_0}{dr}, \quad \sigma_{r\varphi}^0 = 0, \quad (12)$$

система уравнений (4)–(7) существенно упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_i^0 &= \frac{3\beta_0}{2\beta} (\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0), \quad \sigma_e^0 = \frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} [\sigma_\varphi^0 - (\nu_1 - 1)\sigma_r^0], \\ \sigma_z^0 &= \frac{(\nu_1 - 1)\sigma_\varphi^0 + \sigma_r^0}{\nu_1}, \quad \sigma_0^0 = \frac{(2\nu_1 - 1)\sigma_\varphi^0 + (\nu_1 + 1)\sigma_r^0}{3\nu_1}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\eta_\varphi^0 = \frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} \cdot \frac{W^0}{\sigma_e^0}, \quad \eta_r^0 = (1 - \nu_1)\eta_\varphi^0, \quad W^0 = B\sigma_e^{0n+1}, \quad (14)$$

где

$$\nu_1 = \frac{2}{1 + \beta_0}, \quad \nu_2 = \frac{\nu_1}{n}, \quad 0 < \nu_1 \leq 2. \quad (15)$$

В случае $\nu_1 = 2$ соотношения (13)–(15) переходят в уже известные [1–4], если в качестве эквивалентного напряжения в (1)–(3) использовать интенсивность напряжений.

Уравнение неразрывности скоростей деформации (9) с учётом, что $\eta_r^0 = (1 - \nu_1)\eta_\varphi^0$, будет

$$r^2 \frac{d^2 \eta_\varphi^0}{dr^2} + (1 + \nu_1)r \frac{d\eta_\varphi^0}{dr} = 0.$$

Решение этого уравнения представим в следующем виде:

$$\eta_\varphi^0 = \frac{1}{\nu_1} \left[\left(\frac{C_3}{r} \right)^{\nu_2 n} + C \right], \quad \nu_1 = \nu_2 n. \quad (16)$$

Далее соотношения (14) с учётом (13) и (12) запишутся так:

$$\eta_\varphi^0 = B \left(\frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} \right)^{n+1} \left[\frac{d^2 \Phi_0}{dr^2} - (\nu_1 - 1) \frac{1}{r} \frac{d\Phi_0}{dr} \right]^n, \quad \eta_r^0 = (1 - \nu_1) \eta_\varphi^0. \quad (17)$$

Из (16) и (17) получаем

$$r^2 \frac{d^2 \Phi_0}{dr^2} - (\nu_1 - 1) r \frac{d\Phi_0}{dr} = \nu_1 \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^{\frac{n+1}{n}} \cdot r^2 \left[\left(\frac{C_3}{r} \right)^{\nu_2 n} + \left(C^{\frac{1}{n}} \right)^n \right]^{\frac{1}{n}}, \quad (18)$$

откуда

$$\Phi_0(r) = C_1 + C_2 r^{\nu_1} + \bar{\Phi}(r), \quad (19)$$

где $\bar{\Phi}(r)$ — частное решение неоднородного уравнения (18). Чтобы получить это решение в достаточно простом виде, используем, например, следующую методику. При $n = 1$ правая часть уравнения (18) будет

$$f(r)^{(1)} = \nu_1 \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 r^2 \left[\left(\frac{C_3}{r} \right)^{\nu_2} + C \right],$$

при $n \rightarrow \infty$ и ограничениях $(C_3/r)^{\nu_2} > C^{1/n}$ при любых r —

$$f(r)^{(\infty)} = \nu_1 \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right) r^2 \left(\frac{C_3}{r} \right)^{\nu_2},$$

а для $1 \leq n < \infty$ положим

$$f(r)^{(n)} = f^{(1)} + \frac{n-1}{n} (f^{(\infty)} - f^{(1)}).$$

В результате этого получаем:

$$f(r)^{(n)} = \frac{\nu_1}{n} \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 C r^2 + \frac{\nu_1}{n} \left[\left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 + (n-1) \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right) \right] C_3 r^{2-\nu_2}. \quad (20)$$

Теперь очевидно, что общее решение (19) неоднородного уравнения (18), правая часть которого аппроксимирована выражением (20), будет

$$\Phi_0(r) = C_1 + C_2 r^{\nu_1} + \bar{C}_3 r^{2-\nu_2} + \bar{C} r^2, \quad (21)$$

где

$$\bar{C}_3 = \frac{\nu_1}{n} \frac{\beta_0}{\beta} \left(\frac{\beta_0}{\beta} + n - 1 \right) \frac{C_3}{(2 - \nu_2)(2 - \nu_1 - \nu_2)}, \quad \bar{C} = \frac{\nu_1}{n(2 - \nu_1)} \left(\frac{\beta_0}{\beta} \right)^2 C. \quad (22)$$

Согласно (12) напряжения запишутся как

$$\sigma_\varphi^0 = \nu_1(\nu_1 - 1) C_2 r^{\nu_1-2} + (2 - \nu_2)(1 - \nu_2) \bar{C}_3 r^{-\nu_2} + 2\bar{C},$$

$$\sigma_r^0 = \nu_1 C_2 r^{\nu_1-2} + (2 - \nu_2) \bar{C}_3 r^{-\nu_2} + 2\bar{C}, \quad (23)$$

а эквивалентное напряжение и интенсивность напряжений в соответствии с (13) будут

$$\sigma_e^0 = \frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} \left[(2 - \nu_2)(2 - \nu_1 - \nu_2) \bar{C}_3 r^{-\nu_2} + (2 - \nu_1) 2\bar{C} \right], \quad (24)$$

$$\sigma_i^0 = \frac{3}{2} \frac{\beta_0}{\beta} \left[\nu_1 (\nu_1 - 2) C_2 r^{\nu_1-2} - \nu_2 (2 - \nu_2) \bar{C}_3 r^{-\nu_2} \right]. \quad (25)$$

Постоянные C_2 , $\bar{C}_3$, $\bar{C}$ вычисляются из граничных условий применительно к каждой конкретной задаче. Если этих условий меньше трёх, то полагаем, как и в теории упругости, $\bar{C} = 0$.

2. Определение функции напряжений $\Phi_1(r, \varphi)$. Учитывая (10) и (12), из (11) получаем

$$\sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0 + \delta\sigma'_\varphi, \quad \sigma_r = \sigma_r^0 + \delta\sigma'_r, \quad \sigma_{r\varphi} = \delta\sigma'_{r\varphi}. \quad (26)$$

Подставим (26) в (5), (7) и разложим полученные выражения в ряды, удерживая в них члены только с первой степенью δ . Учитывая (13), будем иметь следующее:

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \sigma_i^0 + \delta\sigma'_i, \quad \sigma_i^0 = \frac{3}{2} \frac{\beta_0}{\beta} (\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0), \quad \sigma'_i = \frac{3}{2} \frac{\beta_0}{\beta} (\sigma'_\varphi - \sigma'_r); \\ \sigma_e &= \sigma_e^0 + \delta\sigma'_e, \quad \sigma_e^0 = \frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} [\sigma_\varphi^0 - (\nu_1 - 1)\sigma_r^0], \quad \sigma'_e = \frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} [\sigma'_\varphi - (\nu_1 - 1)\sigma'_r]. \end{aligned} \quad (27)$$

Далее, используя (27), разложим $\sigma_e^n = (\sigma_e^0 + \delta\sigma'_e)^n$ в ряд по δ , учтём, что $[3(\sigma_\varphi^0 - \sigma_r^0)/4\sigma_i^0] = (\beta/2\beta_0)$, и положим $(3\sigma_e^0/\sigma_i^0) \approx 2\nu_1(\beta/\nu_1\beta_0)^2$. В результате всего этого получим из (6):

$$\begin{aligned} \eta_\varphi &= \eta_\varphi^0 + \delta\eta'_\varphi, \quad \eta'_\varphi = n \left(\frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} \right)^2 B \sigma_e^{0^{n-1}} [\sigma'_\varphi - (\nu_1 - 1)\sigma'_r]; \\ \eta_r &= (1 - \nu_1)\eta_\varphi = (1 - \nu_1)\eta_\varphi^0 + \delta(1 - \nu_1)\eta'_\varphi; \end{aligned} \quad (28)$$

$$2\eta_{r\varphi} = \delta 2\eta'_{r\varphi}, \quad 2\eta'_{r\varphi} = \frac{3\sigma_e^0}{\sigma_i^0} B \sigma_e^{0^{n-1}} \cdot \sigma'_{r\varphi} = 2\nu_1 \left(\frac{\beta}{\nu_1 \beta_0} \right)^2 B \sigma_e^{0^{n-1}} \sigma'_{r\varphi}.$$

Обозначая $f(r) = (\beta/\nu_1\beta_0)^2 B \sigma_e^{0^{n-1}}$, из (28) с использованием (10) имеем

$$\begin{aligned} \eta'_\varphi &= n f(r) \left[\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} - (\nu_1 - 1) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} \right) \right], \\ \eta'_r &= (1 - \nu_1)\eta'_\varphi, \quad 2\eta'_{r\varphi} = 2\nu_1 f(r) \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Подставим (28) с учётом (12), (19) и (29) в уравнение сплошности (9). Учитывая, что $f(r)$ при $\bar{C} = 0$ является согласно (24) однородной относительно r

функцией степени « $-\nu$ », где $\nu = (n-1)\nu_2 \equiv \nu_1 - \nu_2$, и выполняя громоздкие стандартные операции, получаем для $\Phi_1(r, \varphi)$ однородное дифференциальное уравнение четвертого порядка:

$$\begin{aligned} & a_4 r^4 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial r^4} + a_3 r^3 \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r^3} + a_2' r^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial r^2} + a_1' r \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} + \\ & + a_2'' r^2 \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial r^2 \partial \varphi^2} + a_1'' r \frac{\partial^3 \Phi_1}{\partial r \partial \varphi^2} + a_0' \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \varphi^2} + a_0'' \frac{\partial^4 \Phi_1}{\partial \varphi^4} = 0, \end{aligned} \quad (30)$$

при этом

$$\begin{aligned} & a_4 = 1, \quad a_3 = 2(1 - \nu), \quad a_2' = \nu(\nu + \nu_1 - 2) - (\nu_1 - 1)^2; \\ & a_1' = (\nu_1 - 1)(\nu + 1)(\nu_1 - 1 - \nu), \quad a_2'' = 2(1 - \nu), \quad a_1'' = 2(\nu^2 - 1); \\ & a_0' = (\nu_1 - 1)[(\nu_1 + 1)(\nu + 2) - \nu(\nu + 1) - 2(2\nu + 3)] + 2(\nu + 1)(\nu_1 - \nu); \quad (31) \\ & a_0'' = (\nu_1 - 1)^2. \end{aligned}$$

Будем решение уравнения (30) искать в виде $\Phi_1(r, \varphi) = R(r) \cdot \Psi(\varphi)$, причём $d^2\Psi/d\varphi^2$ и $d^4\Psi/d\varphi^4$ должны быть подобны $\Psi(\varphi)$. Именно поэтому положим, например, $\Psi(\varphi) = \cos(m\varphi)$, и тогда $\Phi_1(r, \varphi) = R(r) \cos(m\varphi)$. С учётом этого получаем из (30):

$$a_4 r^4 \frac{d^4 R}{dr^4} + a_3 r^3 \frac{d^3 R}{dr^3} + a_2 r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + a_1 r \frac{dR}{dr} + a_0 R = 0, \quad (32)$$

где

$$a_2 = a_2' - m^2 a_2'', \quad a_1 = a_1' - m^2 a_1'', \quad a_0 = -m^2 a_0' + m^4 a_0''. \quad (33)$$

Пусть $m = 1$. В этом случае коэффициенты уравнения (32) с использованием (31) и (33) будут следующими:

$$\begin{aligned} & a_4 = 1, \quad a_3 = 2(1 - \nu), \quad a_2 = \nu(\nu + \nu_1 - 2) - 2(1 - \nu) - (\nu_1 - 1)^2; \\ & a_1 = -\left\{(\nu_1 + 1)\nu^2 - (\nu_1 - 2)(\nu_1 - 1)\nu - [\nu_1(\nu_1 - 2) + 3]\right\}, \quad a_0 = -a_1. \end{aligned} \quad (34)$$

Характеристическое уравнение для уравнения (32) запишется как

$$\begin{aligned} & k(k-1)(k-2)(k-3) + 2(1-\nu)k(k-1)(k-2) - \\ & - [2(1-\nu) + (\nu_1 - 1)^2 - \nu(\nu + \nu_1 - 2)]k(k-1) - \\ & - [(\nu_1 + 1)\nu^2 - (\nu_1 - 2)(\nu_1 - 1)\nu - \nu_1(\nu_1 - 2) - 3](k-1) = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

будет иметь следующие корни:

$$\begin{aligned} & k_1 = 1, \quad k_2 = \nu_1 + 1, \quad k_{3,4} = \nu - \frac{(\nu_1 - 2)(\nu_1 - 1)}{2(\nu_1 + 1)} \pm \\ & \pm \frac{\sqrt{4(\nu_1 + 1)(3 - \nu_1) + (\nu_1 - 1)[(\nu_1 - 1)(\nu_1 - 2)^2 + 4\nu_1(\nu_1 + 1)]}}{2(\nu_1 + 1)}. \end{aligned} \quad (36)$$

Если $\nu_1 = 2$, что соответствует использованию в качестве σ_e интенсивности напряжений σ_i , то из (36) имеем

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 3, \quad k_3 = \nu - 1, \quad k_4 = \nu + 1.$$

Функция напряжений $\Phi_1(r, \varphi)$ будет такой:

$$\Phi_1(r, \varphi) = (C'_1 r + C'_2 r^3 + C'_3 r^{\nu-1} + C'_4 r^{\nu+1}) \cos \varphi,$$

а дополнительные напряжения в соответствии с (10) запишутся как

$$\sigma'_r = [2C'_2 r + (\nu - 2)C'_3 r^{\nu-3} + \nu C'_4 r^{\nu-1}] \cos \varphi,$$

$$\sigma'_\varphi = [6C'_2 r + (\nu - 1)(\nu - 2)C'_3 r^{\nu-3} + \nu(\nu + 1)C'_4 r^{\nu-1}] \cos \varphi,$$

$$\sigma'_{r\varphi} = [2C'_2 r + (\nu - 2)C'_3 r^{\nu-3} + \nu C'_4 r^{\nu-1}] \sin \varphi,$$

что совпадает с уже известным результатом, полученным в [1] применительно к анализу ползучести овальных и разностенных труб.

Пусть теперь $\nu_1 = 1$, что соответствует случаю $\beta = 1,5$. Из (36) имеем

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = \nu - 1, \quad k_4 = \nu + 1,$$

функция напряжений будет

$$\Phi_1(r, \varphi) = (C'_1 r + C'_2 r^2 + C'_3 r^{\nu-1} + C'_4 r^{\nu+1}) \cos \varphi,$$

а дополнительные напряжения в соответствии с (10) запишутся как

$$\sigma'_r = [C'_2 + (\nu - 2)C'_3 r^{\nu-3} + \nu C'_4 r^{\nu-1}] \cos \varphi,$$

$$\sigma'_\varphi = [2C'_2 + (\nu - 1)(\nu - 2)C'_3 r^{\nu-3} + \nu(\nu + 1)C'_4 r^{\nu-1}] \cos \varphi, \quad (37)$$

$$\sigma'_{r\varphi} = [C'_2 + (\nu - 2)C'_3 r^{\nu-3} + \nu C'_4 r^{\nu-1}] \sin \varphi.$$

При других значениях ν_1 ($0 < \nu_1 \leq 2$) корни k_3, k_4 находятся из (36) численно.

Постоянные C'_2, C'_3, C'_4 определяем из граничных условий, которые в самом общем случае имеют вид [1, 2]:

$$\sigma_n = \sigma_r \cos^2 \alpha + \sigma_\varphi \sin^2 \alpha + \sigma_{r\varphi} \sin 2\alpha,$$

$$\tau_n = 0,5(\sigma_\varphi - \sigma_r) \sin 2\alpha + \sigma_{r\varphi} \cos 2\alpha,$$

где σ_n, τ_n — нормальное и касательное напряжения на контуре $r = r(\varphi)$, нормаль к которому в соответствующей точке составляет с радиусом-вектором угол α , причём

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{r(\varphi)} \frac{dr}{d\varphi}.$$

3. Заключение. Полученные результаты могут быть использованы в расчетах элементов конструкций по предельному равновесию, в основе которых лежат соответствующие расчёты в предположении установившейся ползучести материала [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 08-08-000316).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Качанов Л. М. Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960. — 456 с.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. — М.: Наука, 1966. — 752 с.
3. Бойл Дж., Спенс Дж. Анализ напряжений в конструкциях при ползучести: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 360 с.
4. Писаренко Г. С., Можаровский Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести: Справочное пособие. — Киев: Наукова думка, 1981. — 496 с.
5. Никитенко А. Ф. Кинетическая теория ползучести и расчёт элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 2. Предельное состояние неравномерно нагретых элементов конструкций // *Пробл. прочности*, 2005. — № 6. — С. 5–14.

Поступила в редакцию 04/V/2009;
в окончательном варианте — 24/VII/2009.

MSC: 74C10, 74F05, 74G10

FLAT PROBLEM OF STEADY STATE CREEP OF STRUCTURAL ELEMENTS

A. F. Nikitenko

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,
630090, Novosibirsk, Lavrentyev av., 15.
E-mails: naf@hydro.nsc.ru

The problem of a flat strain state of equally heated structural elements for a steady state creep condition with a small parameter method in polar coordinates is solved, Mises–Schleicher criteria is used as equivalent stress in corresponding properties.

Key words: steady state creep, flat strain state, Mises–Schleicher criteria.

Original article submitted 04/V/2009;
revision submitted 24/VII/2009.

Anatoliy F. Nikitenko (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Leading Research Scientist.