Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Семенова, Поле направленного излучателя в полупространстве с волноводным распространением звука, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 168–176

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu698>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 08:23:38

УДК 534.231

ПОЛЕ НАПРАВЛЕННОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ С ВОЛНОВОДНЫМ РАСПРОСТРАНЕНИЕМ ЗВУКА

И. В. Семенова

Самарский государственный университет,
443011, Самара, ул. ак. Павлова, 1.

E-mail: semenirina@list.ru

На основании метода вычисления поля акустического излучателя в стратифицированном полупространстве, предложенного Л. М. Бреховских, получены соотношения, позволяющие рассчитывать поля для мультипольной модели излучателей. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие возможность применения полученных выражений при вычислении полей излучателей в атмосфере для случаев, когда должна быть учтена их направленность.

Ключевые слова: мультипольная модель излучателя, поле излучателя в полупространстве, волноводное распространение звука.

Введение. Для определения звуковых полей излучателей используются различные модели направленных источников. Направленность излучателя может быть задана, например, в виде функции распределения поля давления или в виде диаграммной функции. Однако, несмотря на все преимущества таких подходов, существенным их недостатком являются затруднения, возникающие при построении и исследовании таких функций. Избежать этих трудностей позволяет предложенная в [1] точечная параметрическая мультипольная модель направленных излучателей.

Из всего многообразия представлений неоднородных реальных сред в работе выбрана модель, учитывающая только вертикальную неоднородность среды (скорость звука в ней есть функция вертикальной координаты $c = c(z)$).

Анализ скоростей звука в атмосфере при разных условиях показал, что во многих практически важных случаях можно использовать линейную аппроксимацию квадрата показателя преломления вида $n^2(z) = 1 - az$, где безразмерная величина $n(z) = c(0)/c(z)$. Из справочной модели атмосферы MSIS-E-90, полученной на основании спутниковых данных и являющейся обобщением знаний о пространственно-временном распределении термодинамических параметров и их изменчивости в атмосфере, были взяты среднемесячные значения температуры в году над некоторым усредненным участком земной поверхности западного полушария (http://omniweb.gsfc.nasa.gov/vitmo/msis_vitmo.html), на основании которых были получены значения скорости звука (www.grc.nasa.gov/WWW/K-12/airplane/atmos.html). Анализ значений квадрата показателя преломления показал возможность применения указанной линейной аппроксимации для этой модели атмосферы, например, в январе для высот в диапазоне от 27 до 40 км ($a = 0,000004$), а в августе — для высот в диапазоне от 20 до 50 км ($a = 0,000003$) (см. рис. 1). На остальных высотах также возможна линейная аппроксимация, но не вида $n^2(z) = 1 - az$.

Ирина Владимировна Семенова, аспирант, каф. информатики и прикладной математики.

Рис. 1. Аппроксимация (сплошная линия) и экспериментальные данные (точки) $n^2(z)$ в августе на высоте 20–50 км

1. Материалы и методы. Согласно параметрической мультипольной модели, предложенной в [1], поле направленного излучателя в однородном неограниченном пространстве описывается выражением

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n C_{nm} h_n^{(1)}(kr) P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad r > 0,$$

где ψ — потенциал поля скоростей звукового давления; r, θ, φ — сферические координаты точки наблюдения, центр системы координат совмещен с излучателем; C_{nm} — комплексные мультипольные моменты, описывающие направленные свойства излучателя; N — порядок мультипольности модели; i — мнимая единица; $k = \omega/c$ — волновое число, ω — круговая частота излучателя, c — скорость звука в среде; $h_n^{(1)}$ — сферические функции Бесселя третьего рода порядка n ; $P_n^{|m|}$ — присоединённые полиномы Лежандра.

Опираясь на аналогичное выражение для поля мультипольного излучателя в однородном волноводе с неидеальными границами [1] и используя предложенную в [2] методику вычисления поля монопольного источника в непрерывно-слоистых средах при наличии волновода, можно получить выражение для потенциала поля мультипольного источника в слоистой среде. Пусть непрерывно-слоистая среда характеризуется показателем преломления $n(z) = c(0)/c(z)$ ($c(0)$ — скорость на произвольном горизонте), непрерывным вместе со своей первой производной. Поле источника, расположенного в точке $r = 0, z = z_1$ и имеющего особенность вида $1/R$ при $R = \sqrt{r^2 + (z - z_1)^2} \rightarrow 0$, описывается волновым уравнением

$$\Delta \psi'' + k^2(z) \psi = 4\pi \sigma(z - z_1) \delta_1(r), \quad (1)$$

где $k(z) = k_0 n(z)$, $\delta_1(z)$ — дельта-функция. Обозначим результат применения к (1) преобразования Фурье—Бесселя как $\varphi(\xi, z)$. Функция $\varphi(\xi, z)$ при всех $z \neq z_1$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi'' + (k^2 - \xi^2) \varphi = 0, \quad (2)$$

где штрих означает дифференцирование по z . При $z = z_1$ производная φ' имеет разрыв, а сама функция $\varphi(\xi, z)$ в этой точке непрерывна. Решения (2) должны удовлетворять определённым условиям при $z \rightarrow \pm\infty$ или на границах, если пространство ограничено по z . Пусть $\tilde{\varphi}_1(z)$ и $\tilde{\varphi}_2(z)$ два линейно независимых решения (2), выбранные таким образом, чтобы $\tilde{\varphi}_1(z)$ удовлетворяло условию при $z \rightarrow -\infty$ (или на границе, расположенной при $z < z_1$), а $\tilde{\varphi}_2(z)$ — условию при $z \rightarrow +\infty$ (или на границе, расположенной при $z > z_1$).

Тогда решением (2), удовлетворяющим всем условиям [2], является

$$\tilde{\varphi}(\xi, z) = \frac{2\tilde{\varphi}_1(z_1, \xi)\tilde{\varphi}_2(z, \xi)}{W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)} \quad \text{для } z \geq z_1$$

и

$$\tilde{\varphi}(\xi, z) = \frac{2\tilde{\varphi}_1(z, \xi)\tilde{\varphi}_2(z_1, \xi)}{W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)} \quad \text{для } z < z_1,$$

где $W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) = \tilde{\varphi}_1'(0, \xi)\tilde{\varphi}_2(0, \xi) - \tilde{\varphi}_1(0, \xi)\tilde{\varphi}_2'(0, \xi)$ — не равный нулю вронскиан. С учётом того, что поле мультипольного источника в однородном неограниченном пространстве можно записать в виде разложения в совокупность плоских волн

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n D_{nm} e^{im\varphi} \int_{-\pi/2+i\infty}^{\pi/2-i\infty} H_m^{(1)}(k\rho \sin \beta) e^{ik \cos \beta |z|} P_n^{(m)}(\cos \beta) \sin \beta d\beta,$$

где $H_m^{(1)}(k\rho \sin \beta)$ — функция Ханкеля первого рода порядка m , $\rho = r \sin \theta$ — горизонтальное расстояние до точки наблюдения, $D_{nm} = 1/2C_{nm}e^{i\pi(m-n)/2}$, получим следующий вид решения уравнения (1):

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{2i}{k} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n \chi_{nm} D_{nm} I_{nm}(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad (3)$$

где

$$I_{nm}(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(1)}(\xi\rho) P_n^{(m)}\left(\frac{b}{ik}\right) \frac{\tilde{\varphi}_1(z_1, \xi)\tilde{\varphi}_2(z, \xi)\xi d\xi}{W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)} \quad \text{для } z \geq z_1,$$

$$I_{nm}(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(1)}(\xi\rho) P_n^{(m)}\left(\frac{b}{ik}\right) \frac{\tilde{\varphi}_2(z_1, \xi)\tilde{\varphi}_1(z, \xi)\xi d\xi}{W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)} \quad \text{для } z < z_1,$$

$$\chi_{nm} = (-1)^{n+m}, \quad \xi = k \sin \beta, \quad b = i\sqrt{k^2 - \xi^2}.$$

Конкретизируем соотношение (3) для случая полупространства. Пусть модельный излучатель находится на некотором горизонте $z = z_1$ в полупространстве $0 < z < \infty$, ограниченном при $z = 0$ абсолютно отражающей границей. При этом возможны два случая: $\psi = 0$ и $\partial\psi/\partial z = 0$. Первый случай важен для гидроакустики, однако наибольший интерес представляет менее исследованный второй случай. Таким образом, в качестве краевого условия для поставленной выше задачи возьмем требование равенства нулю на рассматриваемой границе нормальной производной от потенциала $(\partial\psi/\partial z)_{z=0} = 0$. Пусть $u(\xi, z)$ и $v(\xi, z)$ — два линейно независимых решения уравнения (2), причём $v(z) = 0$ при $z \rightarrow \infty$. Тогда в качестве $\tilde{\varphi}_1(z)$, $\tilde{\varphi}_2(z)$, удовлетворяющих необходимым условиям при $z = 0$, $z = \infty$, можно взять

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(z) &= u(z) - u'(0)v(z)/v'(0), \quad 0 \leq z \leq z_1; \\ \tilde{\varphi}_2(z) &= v(z), \quad z_1 \leq z \leq \infty. \end{aligned} \quad (4)$$

После подстановки (4) в (3) получим

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{2i}{k} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n D_{nm} I_{nm}(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad (5)$$

где

$$I_{nm}(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(1)}(\xi \rho) P_n^{|m|}\left(\frac{b}{ik}\right) \frac{\chi_{nm}(u(z)v'(0) - v(z)u'(0))v(z_1)\xi d\xi}{W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)v'(0)} \text{ для } z \leq z_1,$$

$$I_{nm}(r, \theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} H_m^{(1)}(\xi \rho) P_n^{|m|}\left(\frac{b}{ik}\right) \frac{\chi_{nm}(u(z_1)v'(0) - v(z_1)u'(0))v(z)\xi d\xi}{W(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2)v'(0)} \text{ для } z > z_1,$$

$$W = u'(z)v(z) - v'(z)u(z).$$

Основу исследования звуковых полей в непрерывно-слоистых средах составляют приближенные методы, использующие близость стратификации рассматриваемой среды к той или иной модели [3]. В настоящей работе для вычисления (5) предлагается использовать эффективный и хорошо исследованный метод разложения по нормальным волнам, учитывающий вклады от полюсов подынтегральной функции ξ_l ($l \in \mathbb{N}$), местоположение которых дается уравнением $v'(0) = 0$. Учитывая наличие сколь угодно малого поглощения в среде, можно считать, что интеграл, взятый по полуокружности бесконечного радиуса в верхней полуплоскости ξ , равен нулю. Тогда значения интегралов (5) находятся обходом точек ветвления и полюсов подынтегрального выражения в верхней полуплоскости. Предполагая, что полюса простые, получим

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{2i}{k} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n D_{nm} I_{nm}(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad (6)$$

где

$$I_{nm}(r, \theta) = -\pi i \sum_l \frac{v(\xi_l, z_1)v(\xi_l, z)H_m^{(1)}(\rho\xi_l)P_n^{|m|}\left(\frac{b_l}{ik}\right)\xi_l}{v(\xi_l, 0)\left[\frac{\partial^2 v(\xi, z)}{\partial \xi \partial z}\right]_{\xi=\xi_l}^{z=0}}, \quad b_l = i\sqrt{k^2 - \xi_l^2},$$

суммирование ведётся по ξ_l , лежащим в верхней полуплоскости ξ . Выражение (6) не изменится при замене z на z_1 и обратно и справедливо при всех z в интервале $0 \leq z < \infty$.

Известно [2], что частными решениями уравнения (2) являются функции Эйри $u(t)$ и $v(t)$, причём используется лишь $v(t)$, удовлетворяющая условию $t \rightarrow \infty, v \rightarrow 0$. Тогда выражение (6) может быть преобразовано к виду

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \frac{2i}{k} \sum_{n=0}^N \sum_{m=-n}^n D_{nm} I_{nm}(r, \theta) e^{im\varphi}, \quad (7)$$

где

$$I_{nm}(r, \theta) = \frac{\pi i}{H} \sum_l \frac{\chi_{nm} v(t_1) v(t_{1l}) H_m^{(1)}(\rho \xi_l) P_n^{|m|}(\frac{b_l}{ik})}{x_l v^2(-x_l)}, \quad H = (ak_0)^{-1/3},$$

$$t_1 = z/H - x_l, \quad t_{1l} = z_1/H - x_l, \quad \xi_l^2 = k_0^2 - x_l/H^2, \quad x_l = -t_0, \quad t_0 = H^2(\xi^2 - k_0^2).$$

Таким образом, полученная формула (7) является решением уравнения (1) и позволяет выполнять расчёт поля мультипольного излучателя в неоднородном полупространстве.

2. Численный эксперимент. При проведении численного эксперимента вычисление функций Ханкеля $H_\nu^{(1)}(z)$ производилось по соотношению [4, с. 180, 9.1.3] с использованием асимптотических разложений [4, с. 191, 9.4.1–9.4.6]. Нули производной функции Эйри взяты из [4, с. 292–293, табл. 10.11]. Вычисление значений функции $v(t)$ и $v'(t)$ при некотором значении t проводилось с использованием асимптотических разложений следующего вида [2, с. 125–126, 21.11–21.13]:

для $t > 0$ —

$$\omega \equiv \frac{2}{3}t^{3/2},$$

$$v(t) = \frac{1}{2}t^{-1/4}e^{-\omega} \left(1 - \frac{a_1}{\omega} + \frac{a_2}{\omega^2} - \frac{a_3}{\omega^3} + \dots \right),$$

$$v'(t) = -\frac{1}{2}t^{1/4}e^{-\omega} \left(1 + \frac{b_1}{\omega} - \frac{b_2}{\omega^2} + \frac{b_3}{\omega^3} \right) - \dots;$$

для $t < 0$ —

$$\omega \equiv \frac{2}{3}(-t)^{3/2},$$

$$v(t) = (-t)^{1/4} \left[\sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 - \frac{a_2}{\omega^2} + \frac{a_4}{\omega^4} - \frac{a_6}{\omega^6} + \dots \right) - \cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{a_1}{\omega} - \frac{a_3}{\omega^3} + \frac{a_5}{\omega^5} - \frac{a_7}{\omega^7} + \dots \right) \right],$$

$$v'(t) = (-t)^{1/4} \left[-\cos\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + \frac{b_2}{\omega^2} - \frac{b_4}{\omega^4} + \frac{b_6}{\omega^6} + \dots \right) + \sin\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right) \left(\frac{b_1}{\omega} - \frac{b_3}{\omega^3} + \frac{b_5}{\omega^5} - \frac{b_7}{\omega^7} + \dots \right) \right],$$

где

$$a_1 = \frac{5}{72}, \quad a_2 = \frac{(5 \cdot 11) \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot (72)^2}, \quad a_3 = \frac{(5 \cdot 11 \cdot 17) \cdot (7 \cdot 13)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (72)^3}, \quad \dots,$$

$$a_n = \frac{5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6n-1) \cdot 7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n-5)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (72)^n},$$

$$b_1 = \frac{7}{72}, \quad b_2 = \frac{(7 \cdot 13) \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot (72)^2}, \quad b_3 = \frac{(7 \cdot 13 \cdot 19) \cdot (5 \cdot 11)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (72)^3}, \quad \dots,$$

$$b_n = \frac{7 \cdot 13 \cdot \dots \cdot (6n+1) \cdot 5 \cdot 11 \cdot \dots \cdot (6n-7)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (72)^n}.$$

При больших значениях $|t|$ производная функции Эйри вычислялась с помощью следующего асимптотического разложения [4, с. 264, 10.4.2–10.4.5]:

$$v(t) = 1/\sqrt{\pi}(c_1 f(t) - c_2 g(t)),$$

где

$$c_1 = 0,3550280538878, \quad c_2 = 0,2588194037928;$$

$$f(t) = \sum_0^{\infty} 3^k \left(\frac{1}{3}\right)_k \frac{z^{3k}}{(3k)!}, \quad g(t) = \sum_0^{\infty} 3^k \left(\frac{2}{3}\right)_k \frac{z^{3k+1}}{(3k+1)!};$$

$$3^k \left(\alpha + \frac{1}{3}\right)_k = (3\alpha+1)(3\alpha+4) \dots (3\alpha+3k-2),$$

α — произвольное, $k \in \mathbb{N}$.

В качестве среды была выбрана атмосфера, описываемая моделью MSIS-E-90 в августе на высотах 20–50 км. При этом использовались три излучателя: S1 ($C_{nm} = 1 + i$, для $n = m = 0$), S2 ($C_{nm} = 1 + i$, для $n \equiv 0, 1, m \equiv -1, 1$) и S3 ($C_{nm} = 1 + i$, для $n \equiv 0, 1, 2, m \equiv -2, -1, 0, 1, 2$). Для всех источников предполагалось: частота 20 Гц, высота 100 м. Приёмники звука (100 шт.) располагались вдоль прямой, параллельной поверхности земли на высоте 0,5 м при отсутствии шума.

В ходе численного эксперимента исследовалось влияние на амплитуду и фазу излучателя таких факторов, как неоднородность среды, направленность и частота излучателя. Кроме того, проводилось сравнение амплитуд излучателя, полученных с использованием формулы (7) и формулы для однородного полупространства, предложенной в [1] для различных случаев. Для оценки точности предложенного метода была использована дисперсия σ^2 , при вычислении которой находился квадрат разности между амплитудой, полученной с помощью формулы для однородного полупространства, и амплитудой, полученной с использованием (7).

В первой серии численных экспериментов исследовалась зависимость величины амплитуды и фазы излучателя от степени неоднородности пространства. С учётом того, что в рассматриваемой модели среды её неоднородность характеризуется показателем преломления вида $n^2(z) = 1 - az$, исследование проводилось для различных значений параметра a в диапазоне от 10^{-5} до 10^{-1} . В табл. 1 приведены результаты сравнения амплитуды излучателя в однородном и неоднородном полупространствах, а изменения безразмерных амплитуды и фазы излучателя в неоднородном полупространстве для указанных значений параметра a и y — горизонтального расстояния от источника до приемников — приведены на рис. 2 и 3.

Вторая серия экспериментов была направлена на исследование влияния направленности источника на его поле. Изменения безразмерных амплитуды и фазы излучателя в неоднородном полупространстве с изменением его направленности для указанного значения y приведены на рис. 4 и 5.

В последней серии численных экспериментов изучалась зависимость амплитуды и фазы излучателя от его частоты ν . В табл. 2 приведены результаты

Таблица 1

Значения σ^2 для различных значений параметра a

a	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
Источник S1	0,0001008	0,0000252	0,0000173	0	0
Источник S2	0,0002380	0,0000648	0,0000423	0	0
Источник S3	0,0013379	0,0008920	0,0001261	0,0000002	0

Рис. 2. Амплитуды звуковых полей S3 при различных значениях параметра a :
 1 — $a = 0,001$; 2 — $a = 0,0001$; 3 — $a = 0,00001$

Рис. 3. Фазы звуковых полей S3 при различных значениях параметра a :
 1 — $a = 0,001$; 2 — $a = 0,0001$; 3 — $a = 0,00001$

сравнения амплитуд излучателя в однородном и неоднородном полупространствах для частот источника в диапазоне от 3 до 50 Гц.

Заключение. Как видно из рис. 3 и 4, при уменьшении значения параметра a , то есть при приближении пространства к однородному, амплитуда и фаза источника приближаются к значениям, характерным для однородного пространства, что свидетельствует об адекватности модели. Кроме того,

Рис. 4. Амплитуды звуковых полей S1, S2 и S3

Рис. 5. Фазы звуковых полей S1, S2 и S3

Таблица 2

Значения σ^2 для различных значений частоты источника ν

ν , Гц	3	5	8	10	15	20	50
Источник S1	0,0000006	0	0	0	0	0	0
Источник S2	0,0000027	0,0000003	0,0000001	0	0	0	0
Источник S3	0,0000176	0,0000030	0,0000005	0,0000003	0	0	0

результаты численных экспериментов (см. рис. 4 и 5) позволяют сделать вывод о том, что направленность источника оказывает существенное влияние на поле акустического излучателя.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Степанов А. Н. Мультипольная модель гидроакустических излучателей. — Самара:

- Самарский университет, 2000. — 212 с.
2. Бреховский Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. — 343 с.
 3. Бреховский Л. М., Годин О. А. Акустика слоистых сред. — М.: Наука, 1989. — 412 с.
 4. Справочник по специальным функциям / ред. М. Абрамовиц, И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Поступила в редакцию 25/V/2009;
в окончательном варианте — 15/IX/2009.

MSC: 92F05

DIRECTIONAL RADIATOR FIELD IN WAVE-GUIDED SOUND SPREADING SEMISPACE

I. V. Semenova

Samara State University,
1, Pavlova str., Samara, 443011.
E-mail: semenirina@list.ru

On the basis of the acoustic radiator field calculation method in the stratified space that was suggested by L. M. Brekhovskikh, we obtained field calculation correlation for a multifield model of radiators. Moreover, the results of numerical experiments are quoted which prove the possibility of application of expression when calculating radiator fields in space in case their direction should be taken into consideration.

Key words: multifield model of radiators, radiator field in the semispace, wave-guided sound spreading.

Original article submitted 25/V/2009;
revision submitted 15/IX/2009.