Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Чадаев, Задача Коши в локально-нелокальной постановке для нелинейного уравнения дробного порядка в определенном классе, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 214–217

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu702>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 12:38:39

УДК 517.968.74

ЗАДАЧА КОШИ В ЛОКАЛЬНО-НЕЛОКАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ОПРЕДЕЛЁННОМ КЛАССЕ

В. А. Чадаев

Чеченский государственный университет,
364907, Грозный, ул. А. Шерипова, д. 32.

E-mail: chadaev53@mail.ru

Доказана теорема существования и единственности решения задачи Коши в локально-нелокальной постановке для нелинейного уравнения дробного порядка.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения дробного порядка, локально-нелокальная постановка задачи Коши.

Рассмотрим нелинейное уравнение дробного порядка

$$D_{0x}^{\alpha}y(t) = f\left(x, y(x), D_{0x}^{\beta}y(t)\right), \quad (1)$$

где D_{0x}^{α} — оператор дробного дифференцирования порядка α , причём $n-1 < \alpha \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \beta < \min\{1, \alpha\}$, $x \in [0, l]$ [1, 2].

Пусть $C_{\gamma}^{\alpha}[0, l]$ — класс функций $y(x)$, имеющих суммируемую дробную производную порядка α во всех точках $x \in (0, l]$ и представимых в виде

$$y(x) = x^{-\gamma}\varphi(x), \quad (2)$$

где $\varphi(x) \in C[0, l]$ [3].

ЗАДАЧА ТИПА КОШИ. Найти решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$D_{0x}^{\alpha-k}y(t)|_{x=0} = b_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-\alpha}y(x) = y_0 < \infty \quad (3)$$

в классе $C_{\gamma}^{\alpha}[0, l]$.

Сформулируем и докажем теорему о существовании и единственности решения этой задачи. Обозначим через D множество точек (x, y, z) из области G , лежащей в $\mathbb{R}^3$:

$$D = \left\{ (x, y, z) \in G : 0 < x \leq l, \left| x^{n-\alpha}y(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \leq a, \right. \\ \left. \left| x^{n-\alpha+\beta}z(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha - n - \beta + 1)} \right| \leq b \right\},$$

где $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{l^{n-k}b_k}{\Gamma(\alpha-k+1)} < a$, $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{l^{n-k}b_k}{\Gamma(\alpha-k-\beta+1)} < b$; $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера; $z(x) = D_{0x}^{\beta}y(t)$; a, b, l, b_0 — постоянные.

ТЕОРЕМА. Пусть $f(x, y, z)$ — вещественнозначная, непрерывная в области G функция, удовлетворяющая условию Липшица по z :

$$|f(x, y_1, z_1) - f(x, y_2, z_2)| \leq N(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|) \quad (4)$$

Ваха Абдулмуслимович Чадаев (к.ф.-м.н., доц.), зав. кафедрой, каф. математики и механики.

и ограничению

$$\max_{0 < x \leq l} |f(x, y, z)| = b_0 < \infty. \quad (5)$$

Тогда решение задачи (3) для уравнения (1) в области $D \subset G$ существует, принадлежит классу $C_{n-\alpha}^\alpha[0, l]$ и единственно.

Доказательство. Для любой функции, представимой в виде (2), имеем

$$\Gamma(n - \alpha) D_{0x}^{\alpha-n} y(t) = \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}} = x^{n-\alpha-\gamma} \int_0^1 \frac{\varphi(xt) dt}{t^\gamma (1-t)^{\alpha+1-n}}. \quad (6)$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{\alpha+\gamma-n} D_{0x}^{\alpha-n} y(t) = \frac{\varphi(0) \Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(n+1-\alpha-\gamma)}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) можно заключить, что необходимым условием разрешимости задачи для уравнения (1) в классе $C_\gamma^\alpha[0, l]$ является условие $\alpha + \gamma < n$, если $y_0 = 0$, и условие $\alpha + \gamma = n$ — для произвольного y_0 .

Применяя к уравнению (1) оператор $D_{0x}^{-\alpha}$ [3], имеем

$$y(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} D_{0x}^{\alpha-k} y(t) \Big|_{x=0} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t), D_{0t}^\beta y(s)) dt.$$

Учитывая (3), получим $b_n = y_0 \Gamma(\alpha - n + 1)$, тогда

$$y(x) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y(t), D_{0t}^\beta y(s)) dt. \quad (8)$$

Для метода последовательных приближений, полагая

$$y_0(x) = \sum_{k=1}^n b_k \frac{x^{\alpha-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)},$$

имеем

$$y_m(x) = y_0(x) + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} f(t, y_{m-1}(t), D_{0t}^\beta y_{m-1}(s)) dt, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (9)$$

При $0 < x \leq l$ необходимо, чтобы точки (x, y_m, z_m) оставались в D . Из условия (5) и уравнения (9) вытекает оценка

$$x^{n-\alpha} y_m(x) - \sum_{k=1}^n b_k \frac{x^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \leq b_0 \frac{x^n}{\Gamma(\alpha+1)},$$

следовательно,

$$\left| x^{n-\alpha} y_m(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha-n+1)} \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{x^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} \leq \sum_{k=0}^{n-1} b_k \frac{l^{n-k}}{\Gamma(\alpha-k+1)} < a. \quad (10)$$

Для $z_m(x) = D_{0x}^\beta y_m(t)$ имеем

$$\left| x^{n-\alpha+\beta} z_m(x) - \frac{b_n}{\Gamma(\alpha-n-\beta+1)} \right| < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k l^{n-k}}{\Gamma(\alpha-n-\beta+1)} < b. \quad (11)$$

Из (10), (11) очевидно, что точки $(x, y_m, z_m) \in D$. Из уравнения (9) и условия (5) получим оценку

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leq \frac{b_0 x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \leq \frac{b_0 l^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}. \quad (12)$$

Используя оценку (12) и условие (4), получим

$$\begin{aligned} |y_2(x) - y_1(x)| &= \left| \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} [f(t, y_1(t), D_{0t}^\beta y_1(s)) - f(t, y_0(t), D_{0t}^\beta y_0(s))] dt \right| \leq \\ &\leq \frac{N}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} [|y_1(t) - y_0(t)| + |D_{0t}^\beta y_1(s) - D_{0t}^\beta y_0(s)|] dt \leq \\ &\leq \frac{Nb_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha+1)} (t^\alpha + D_{0t}^\beta s^\alpha) dt \leq Nb_0 x^{2\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{x^{-\beta}}{\Gamma(2\alpha+1-\beta)} \right) \leq \\ &\leq Nb_0 l^{2\alpha} \left(\frac{1}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{l^{-\beta}}{\Gamma(2\alpha+1-\beta)} \right). \end{aligned}$$

Продолжая процесс итерации, получим

$$|y_{m+1}(x) - y_m(x)| \leq N^m b_0 l^{(m+1)\alpha} \sum_{k=0}^b C_m^k \frac{l^{-k\beta}}{\Gamma((m+1)\alpha + 1 - k\beta)} = T(m, l).$$

Таким образом, показано, что для достаточно малых значений l

$$\lim_{x \rightarrow \infty} T(m, l) = 0,$$

а это значит, что последовательность функций $y_m(x)$ сходится к функции $y(x)$. Эта функция при $0 < x \leq l$ принадлежит классу $C_{n-\alpha}^\alpha[0, l]$ и удовлетворяет неравенству

$$|y(x) - y_0 x^{\alpha-n}| \leq ax^{\alpha-n},$$

которое следует из (10) при $m \rightarrow \infty$. $\square$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев А. М. К теории дробного исчисления // *Дифференц. уравнения*, 1988. — Т. 24, № 2. — С. 313–324; англ. пер.: Nakhushhev A. M. On the theory of fractional calculus // *Differential Equations*, 1988. — Vol. 24, No. 2. — P. 239–247.
2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
3. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies, 204; ed. J. van Mill. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 pp.

Поступила в редакцию 28/VI/2009;
в окончательном варианте — 9/III/2010.

MSC: 35R11

**CAUSHY PROBLEM FOR FRACTIONAL NONLINEAR EQUATION
IN DEFINED CLASS WITH LOCAL-NONLOCAL SETTING**

V. A. Chadaev

Chechen State University,
32, A. Sheripova str., Grozny, 364907.

E-mail: chadaev53@mail.ru

Theorem of existence and uniqueness of Cauchy problem solution for fractional non-linear equation with local-nonlocal setting is proven.

Key words: *fractional differential equation, local-nonlocal setting of Cauchy problem.*

Original article submitted 28/VI/2009;
revision submitted 9/III/2010.

Vakha A. Chadaev (Ph. D. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematic & Mechanic.