Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Бейбалаев, Решение начальной задачи для дифференциального уравнения фрактального осциллятора, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 240–242

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:05:33

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.968

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ФРАКТАЛЬНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В. Д. Бейбалаев

Дагестанский государственный университет,
443100, г. Махачкала, ул. Магомеда—Гаджиева, 43 а.

E-mails: kaspj_03@mail.ru

Дается обобщение задачи гармонического осциллятора с затуханием на основе дифференциальных уравнений с дробным дифференцированием и показана возможность рассмотрения на их основе нелинейных колебательных процессов.

Ключевые слова: *фрактал, фрактальная среда, дифференциальное уравнение, фрактальный осциллятор.*

Развитие физики фракталов и использование математического аппарата интегро-дифференцирования дробного порядка вызвало повышенный интерес к обобщению хорошо известных математических моделей динамических систем. При изучении широкого класса колебательных процессов важнейшую роль играет модель гармонического осциллятора. С одной стороны, в качестве модели осциллятора выступает простое обыкновенное дифференциальное уравнение с известным решением, с другой стороны, несмотря на простоту, оно охватывает существенные стороны колебательного процесса. В связи с этим большой интерес представляет переход в уравнении для осциллятора к производной дробного порядка с целью создания основ описания физических процессов в средах с фрактальной структурой.

В работе [1] в качестве обобщенного уравнения гармонического осциллятора рассмотрено уравнение

$$D_{0t}^{\alpha}x(t) + \omega^{\alpha}x(t) = 0,$$

где $1 < \alpha \leq 2$, ω — частота, t — время. Физическую систему, описываемую этим уравнением, авторы назвали *фрактальным осциллятором*. В [2] в качестве осцилляторного уравнения в средах с фрактальной структурой рассмотрено уравнение

$$\partial_{0t}^{\alpha}x(t) + \omega^{\alpha}x(t) = 0,$$

где $1 < \alpha \leq 2$, $\partial_{0t}^{\alpha}x(t)$ — производная Caputo. Решение этого уравнения было получено F. Mainardy методом преобразований Лапласа и приводится в [2] в качестве примера. В работах [3, 4] исследованы дробные осцилляторные уравнения с младшими дробными производными.

Рассмотрим следующую задачу.

Ветлугин Джабраилович Бейбалаев, старший преподаватель, каф. прикладной математики.

ЗАДАЧА. Найти решение $x(t) \in AC^2[0, T]$ уравнения

$$\partial_{0t}^{2\alpha} x(t) + 2\gamma \partial_{0t}^\alpha x(t) + \omega^{2\alpha} x(t) = 0, \quad (1)$$

удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.

В (1) γ — коэффициент затухания решений, $0 < \alpha \leq 1$, $\partial_{0t}^\beta x(t) = D_{0t}^{\beta-n} \frac{d^n x(t)}{dt^n}$ ($n-1 < \beta \leq n$) — производная Caputo [2].

Пусть $D_\alpha \subset AC^2[0, T]$ — область определения ∂_{0t}^α . Тогда для любой функции $x(t) \in D_\alpha$ справедливо равенство:

$$D_{0t}^{2\alpha} x(t) + 2\gamma D_{0t}^\alpha x(t) + \omega^\alpha x(t) - \frac{\dot{x}(0)}{\Gamma(2-\alpha)t^{2\alpha}} - \frac{x(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} - 2\gamma \frac{x(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^\alpha} = 0, \quad (2)$$

где

$$(D_{0x}^\alpha u)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{u(t)}{(x-t)^\alpha} dt$$

— дробная производная Римана—Лиувилля [5].

Пусть $x(t) \in D_\alpha$ — решение уравнения (2), тогда, применяя преобразования Лапласа к уравнению (2), получим

$$x(p) = \frac{x(0)(p^{2\alpha-1} + 2\gamma p^{\alpha-1}) + x^\alpha(0)p^{\alpha-1}}{p^{2\alpha} + 2\gamma p^\alpha + 1}. \quad (3)$$

Выражение (3) можно представить в виде

$$x(p) = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\frac{1}{p^\alpha - \lambda_1} - \frac{1}{p^\alpha - \lambda_2} \right) (x(0) [p^{2\alpha-1} + 2\gamma p^{\alpha-1}] + x^\alpha(0)p^{\alpha-1}),$$

где $\lambda_{1,2} = -\tilde{\gamma} \pm \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}$, $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega}$.

Имеют место следующие равенства:

$$\begin{aligned} \frac{p^{2\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda_1} &= \int_0^\infty e^{-pt} (\omega t)^{-\alpha} E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 (\omega t)^\alpha) dt, \\ \frac{p^{\alpha-1}}{p^\alpha - \lambda_1} &= \int_0^\infty e^{-pt} E_{\alpha, 1}(\lambda_1 (\omega t)^\alpha) dt, \end{aligned}$$

воспользовавшись которыми, получим выражение для оригинала функции $x(t)$:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x^{(\alpha)}(0) + 2\tilde{\gamma}x(0)}{2\sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}} [E_{\alpha, 1}(\lambda_1 (\omega t)^\alpha) - E_{\alpha, 1}(\lambda_2 (\omega t)^\alpha)] + \\ &+ \frac{x(0)}{2\sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}} (\omega t)^\alpha [E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_1 (\omega t)^\alpha) - E_{\alpha, 1-\alpha}(\lambda_2 (\omega t)^\alpha)]. \quad (4) \end{aligned}$$

Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Функция $x(t) \in D_\alpha$ будет решением уравнения (1), если эта функция представима в виде (4).

При переходе к пределу $\tilde{\gamma} \rightarrow 0$ в (4) получается решение для фрактального осциллятора без затухания:

$$x(t) = x(0)E_{2\alpha,1}(-z^{2\alpha}) + x^\alpha(0)z^\alpha E_{2\alpha,1+\alpha}(-z^{2\alpha}).$$

Если положить в (4) $\alpha = 1$, то получим решение обыкновенного осциллятора с затуханием:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left[x(0) \operatorname{ch}(\omega t \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}) + \frac{x'(0) + \tilde{\gamma}x(0)}{\sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}} \operatorname{sh}(\omega t \sqrt{\tilde{\gamma}^2 - 1}) \right].$$

Таким образом, решение уравнения для уравнения фрактального осциллятора с затуханием содержит в частном случае известные ранее решения и расширяет область решений. Интересно отметить, что общее решение уравнения фрактального осциллятора с затуханием содержит новый класс решений при $0 < \alpha < 1$ и $\gamma < 0$, когда, с одной стороны, в случае $\gamma < 0$ происходит экспоненциальный рост амплитуды колебаний, а с другой, так как $0 < \alpha < 1$, происходит затухание решений. Такая конкуренция между двумя механизмами эволюции колебаний приводит к существованию нового класса решений уравнения для фрактального осциллятора с затуханием.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Мейланов Р. П., Янполов М. С. Особенности фазовой траектории «фрактального» осциллятора // *Письма в ЖТФ*, 2002. — Т. 28, № 1. — С. 67–73.
2. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. — Физматлит, 2003. — 272 с.
3. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Вынужденные колебания дробных осцилляторов / В сб.: *Труды V Всероссийской научной конференции (1–4 июня 2009 г.)*. Часть 1: Математические модели механики, прочность и надёжность конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 215–221.
4. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляторного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. — № 1(18). — С. 276–279.
5. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.

Поступила в редакцию 29/VI/2009;
в окончательном варианте — 12/IX/2009.

MSC: 34A08, 34C15

SOLUTION OF THE INITIAL PROBLEM FOR A DIFFERENTIAL EQUATION OF FRACTAL OSCILLATOR

V. D. Beybalaev

Daghestan State University,
43 a, M. Gadzhiyev str., Makhachkala, 367025.
E-mails: kaspj_03@mail.ru

This article provides a synthesis of the problem of harmonic oscillator with damping based on differential equations with fractional differentiation and demonstrates the possibility of consideration of nonlinear oscillatory processes on their basis.

Key words: fractal, fractal structure, differential equation, fractal oscillator.

Original article submitted 29/VI/2009;
revision submitted 12/IX/2009.

Vetlugin D. Beybalaev, Senior Lecturer, Dept. of Applied Mathematics.