Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Уткина, Задача Неймана для одного уравнения четвёртого порядка,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2009, выпуск 2(), 29–37

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 09:01:39

УДК 517.956

ЗАДАЧА НЕЙМАНА ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

*Е. А. Уткина*Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет,
420021, г. Казань, ул. Татарстан, 2.

E-mail: eutkina1@yandex.ru

В прямоугольной области рассматривается задача Неймана для уравнения

$$L(u) = D_x^2 D_y^2 u(x, y) + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij}(x, y) D_x^i D_y^j u(x, y) = f(x, y).$$

*Решение осуществляется редукцией к системе уравнений Фредгольма, разрешимость которых устанавливается при дополнительных условиях на коэффициенты уравнения на основе метода априорных оценок.***Ключевые слова:** задача Неймана, псевдопараболические уравнения, задача Гурса.

Задача Неймана, хорошо известная для уравнений эллиптического типа, является одной из основных граничных задач математической физики [1, 2]. В данной работе рассматривается уравнение

$$L(u) = D_x^2 D_y^2 u(x, y) + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij}(x, y) D_x^i D_y^j u(x, y) = f(x, y), \quad (1)$$

являющееся обобщением уравнения Буссинеска—Лява [3], описывающего продольные волны в тонком упругом стержне с учётом эффектов поперечной инерции. Уравнения вида (1) в [4] названы псевдопараболическими. Будем использовать следующие обозначения [3]: D — оператор дифференцирования $D_t^k \varphi \equiv \partial^k \varphi / \partial t^k$ при $k \in \mathbb{N}$ и D_t^0 — оператор тождественного преобразования.

Пусть $D = \{0 < x < x_1, 0 < y < y_1\}$, $p = [0, y_1]$, $q = [0, x_1]$, а коэффициенты уравнения (1) принадлежат классам $a_{ij} \in C^{i,j}(\overline{D})$, $f \in C^{0,0}(\overline{D})$.

ЗАДАЧА. Найти функцию $u(x, y) \in C^{2,2}(D) \cap C^{1,0}(D \cup p) \cap C^{0,1}(D \cup q) \cap C^{1,1}(\overline{D})$, являющуюся в D решением уравнения (1) и удовлетворяющую условиям

$$u_x(0, y) = \varphi_1(y), \quad u_y(x, 0) = \psi_1(x) \quad (2)$$

$$u_x(x_1, y) = \varphi_2(y), \quad u_y(x, y_1) = \psi_2(x). \quad (3)$$

Из принадлежности $u(x, y)$ классу $C^{1,1}(\overline{D})$ следуют соотношения

$$\varphi'_1(y_1) = \psi'_2(0), \quad \varphi'_1(0) = \psi'_1(0), \quad \psi'_1(x_1) = \varphi'_2(0), \quad \varphi'_2(y_1) = \psi'_2(x_1).$$

Елена Анатольевна Уткина (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. информационных технологий в образовании.

Далее предлагается способ получения условий, обеспечивающих однозначную разрешимость поставленной задачи. Задача при этом редуцируется к уравнениям Фредгольма, однозначная разрешимость которых выводится из доказываемой на основе априорных оценок теореме единственности.

1°. Выпишем сначала решение задачи с условиями (2) и

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(x, 0) = \psi_0(x). \quad (4)$$

Соотношения (2), (4) есть граничные значения задачи Гурса, решение которой представляется формулой (6.26) из [7] (впервые полученной в [6]):

$$u(x, y) = \varphi_0(y) + \psi_0(x) - \varphi_0(0) + \int_0^x \int_0^y h(\alpha, \beta, \alpha, \beta) d\beta d\alpha, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} h(x, y, x, y) = u_{xy}(x, y) = & \psi_1'(x) R(x, 0) + \varphi_1'(y) R(0, y) - \varphi_1'(0) R(0, 0) - \\ & - \varphi_1(y) P(0, y) - \psi_0'(x) P(x, 0) + \varphi_1(0) P(0, 0) - \varphi_0'(y) N(0, y) - \\ & - \psi_1(x) N(x, 0) + \psi_1(0) N(0, 0) + \varphi_0(y) T(0, y) + \psi_0(x) T(x, 0) - \\ & - \varphi_0(0) T(0, 0) - \int_0^y [\varphi_0(\beta) F_1(0, \beta) - \varphi_1(\beta) Q(0, \beta)] d\beta - \\ & - \int_0^x [\psi_0(\alpha) F_1(\alpha, 0) - \psi_2(\alpha) K(\alpha, 0)] d\alpha. \quad (6) \end{aligned}$$

При этом $N = R_x - a_{12}R$, $P = R_y - a_{21}R$, $K = N_x + a_{02}R$, $Q = P_y + a_{20}R$, $T = R_{xy} - (a_{21}R)_x - (a_{12}R)_y + a_{11}R$, $F_1 = T_y + (a_{20})_x - a_{10}R$, $F_2 = T_x + (a_{02})_y - a_{01}R$, R — функция Римана. Здесь у функций R , N , P , K , Q , T , F_1 , F_2 выписана только первая пара аргументов, второй всегда является (x, y) .

Подобно тому, как это делается в [8], рассматриваем (5), (6) как общее представление искомого решения через произвольные функции φ_k , ψ_k , $k \equiv 0, 1$. Подставим в (6) аргументы точек (x, y_1) , (x_1, y) , учтём известные значения (2), (3), проинтегрируем соответственно по y и по x . Приходим к системе интегральных уравнений, в которой искомыми функциями являются φ_0 , ψ_0 :

$$\begin{aligned} & - \varphi_0(y) N(0, y, x_1, y) + \varphi_0(0) (N(0, 0, x_1, 0) - \int_0^y T(0, 0, x_1, \eta) d\eta) + \\ & + \psi_0(x_1) \int_0^y T(x_1, 0, x_1, \eta) d\eta + \int_0^y \varphi(\eta) (N_\eta(0, \eta, x_1, \eta) + T(0, \eta, x_1, \eta)) d\eta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^y \int_0^\eta \varphi_0(\beta) F_1(0, \beta, x_1, \eta) d\beta d\eta - \\
 & - \int_0^{x_1} \psi_0(\alpha) \int_0^y F_2(\alpha, 0, x_1, \eta) d\eta d\alpha = I_1(y), \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \psi_0(x) P(x, 0, x, y_1) + \psi_0(0) (P(0, 0, 0, y_1) - \int_0^x T(0, 0, \alpha, y_1) d\alpha) + \\
 & + \varphi_0(y_1) \int_0^x T(0, y_1, \alpha, y_1) d\alpha + \int_0^x \psi_0(\xi) (P_\xi(\xi, 0, \xi, y_1) + T(\xi, 0, \xi, y_1)) - \\
 & - \int_0^{y_1} \varphi_0(\beta) \int_0^x F_1(0, \beta, \xi, y_1) d\xi d\beta - \\
 & - \int_0^x \int_0^\alpha \psi_0(\alpha_1) F_2(\alpha, 0, \alpha_1, y_1) d\alpha_1 d\alpha = I_2(x). \quad (8)
 \end{aligned}$$

Функции I_1 , I_2 в (7), (8) зависят от граничных значений (2), (3) и неизвестных постоянных $\varphi(y_1)$, $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$, $\psi(x_1)$. Для нахождения последних составим систему трёх уравнений. Первое из них получим, подставив в (7) $y = y_1$, второе — в (8) $x = x_1$, третье — в (6) $y = y_1$, $x = x_1$. Таким образом, указанные постоянные будут определены единственным образом через известные функции и данные Гурса (4), если

$$\det \mathcal{A} \neq 0, \quad (9)$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -N(0, y_1, x_1, y_1) & N(0, 0, x_1, 0) - \int_0^{y_1} T(0, 0, x_1, \eta) d\eta & \int_0^{y_1} T(x_1, 0, x_1, \eta) d\eta \\ \int_0^{x_1} T(0, y_1, \xi, y_1) d\xi & P(0, 0, 0, y_1) - \int_0^{x_1} T(0, 0, \xi, y_1) d\xi & -P(x_1, 0, x_1, y_1) \\ T(0, y_1, x_1, y_1) & T(0, 0, x_1, y_1) & T(x_1, 0, x_1, y_1) \end{pmatrix}.$$

Для нахождения каждой из функций φ_0 , ψ_0 получим уравнения фредгольмовского типа.

2°. Докажем единственность решения задачи (1)–(3). Для этого проверим, что при однородных условиях (2), (3) однородное уравнение (1) имеет только нулевое решение. Доказательство осуществляется методом априорной оценки с помощью энергетического неравенства [2].

Воспользовавшись понятиями скалярного произведения и нормы в пространстве $L_2 [0, x_1] \times [0, y_1]$:

$$(u, v) = \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} u(x, y) v(x, y) dy dx, \quad \|u\|^2 = \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} u^2(x, y) dy dx,$$

вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (L(u), u) &= \left(D_x^2 D_y^2 u + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij}(x, y) D_x^i D_y^j u, u \right) = \\ &= \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left(D_x^2 D_y^2 u \cdot u + \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 a_{ij} D_x^i D_y^j u \cdot u \right) (x, y) dy dx. \end{aligned}$$

Далее проинтегрируем выражение по частям и выпишем значения получившихся в результате преобразований слагаемых:

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} u_{xxyy}(x, y) u(x, y) dy dx &= \|u_{xy}\|^2 \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{21}(x, y) u_{xxy}(x, y) u(x, y) dy dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left((a_{21} u_x^2)(x, y_1) - (a_{21} u_x^2)(x, 0) \right) dx + \\ &\quad + \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left(-a_{21x} u u_{xy} + \frac{1}{2} a_{21y} u_x^2 \right) (x, y) dy dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{12}(x, y) u_{xyy}(x, y) u(x, y) dy dx &= \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{y_1} \left((a_{12} u_y^2)(x_1, y) - (a_{12} u_y^2)(0, y) \right) dy + \\ &\quad + \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left(-a_{12y} u u_{xy} + \frac{1}{2} a_{12xy} u_y^2 \right) (x, y) dy dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{20}(x, y) u_{xx}(x, y) u(x, y) dy dx &= - \int_0^{y_1} \left((a_{20x} u^2)(x_1, y) - (a_{20x} u^2)(0, y) \right) dy + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{20xx} u^2 dy dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{20} u_x^2 dy dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{02}(x, y) u_{yy}(x, y) u(x, y) dy dx &= - \int_0^{x_1} \left((a_{02y} u^2)(x, y_1) - (a_{02y} u^2)(x, 0) \right) dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{02yy} u^2 dy dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{02} u_y^2 dy dx, \end{aligned}$$

$$\int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{11}(x, y) u_{xy}(x, y) u(x, y) dy dx \text{ остаётся без изменений,}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{10}(x, y) u_x(x, y) u(x, y) dy dx &= \frac{1}{2} \int_0^{y_1} \left((a_{10} u^2)(x_1, y) - (a_{10} u^2)(0, y) \right) dy - \\ &- \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{10x} u^2 dy dx \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{01}(x, y) u_y(x, y) u(x, y) dy dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left((a_{01} u^2)(x, y_1) - (a_{01} u^2)(x, 0) \right) dx - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} a_{01y} u^2 dy dx. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} (L(u), u) &= \|u_{xy}\|^2 + \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left(\frac{a_{20xx}(x, y)}{2} + \frac{a_{02yy}(x, y)}{2} - \frac{a_{10x}(x, y)}{2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a_{01y}(x, y)}{2} + a_{00}(x, y) \right) u^2(x, y) dy dx + \\ &+ \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left(\frac{a_{21y}(x, y)}{2} - a_{20}(x, y) \right) u_x^2(x, y) dy dx + \\ &\quad + \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left(\frac{a_{12x}(x, y)}{2} - a_{02}(x, y) \right) u_y^2(x, y) dy dx + \\ &+ \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left((-a_{12y} - a_{21x} + a_{11}) u u_{xy} \right) (x, y) dy dx - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left((a_{21} u_x^2)(x, y_1) - (a_{21} u_x^2)(x, 0) \right) dx - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_0^{y_1} \left((a_{12}u_y^2)(x_1, y) - (a_{12}u_y^2)(0, y) \right) dy - \int_0^{y_1} \left((a_{20x}u^2)(x_1, y) - (a_{20x}u^2)(0, y) \right) dy - \\
& - \int_0^{x_1} \left((a_{02y}u^2)(x, y_1) - (a_{02y}u^2)(x, 0) \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^{y_1} \left((a_{10}u^2)(x_1, y) - (a_{10}u^2)(0, y) \right) dy + \\
& + \frac{1}{2} \int_0^{x_1} \left((a_{01}u^2)(x, y_1) - (a_{01}u^2)(x, 0) \right) dx.
\end{aligned}$$

Функции $a_{ij}(x, y)$ являются непрерывными на компакте, поэтому они достигают своих точных верхних и точных нижней граней. Введём обозначения $\sup_{(x,y) \in D} a_{ij}(x, y) = sa_{ij}$, $\inf_{(x,y) \in D} a_{ij}(x, y) = ia_{ij}$ и получим следующую оценку:

$$\begin{aligned}
(L(u), u) & \geq \|u_{xy}\|^2 + \|u\|^2 \left(\frac{ia_{20xx}}{2} + \frac{ia_{02yy}}{2} - \frac{sa_{10x}}{2} - \frac{sa_{01y}}{2} + ia_{00} \right) + \\
& + \left(\frac{ia_{21y}}{2} - sa_{20} \right) \|u_x\|^2 + \left(\frac{ia_{12x}}{2} - sa_{02} \right) \|u_y\|^2 + \\
& + \int_0^{x_1} \int_0^{y_1} \left((-a_{12y} - a_{21x} + a_{11})uu_{xy} \right)(x, y) dy dx - \\
& - \frac{1}{2} sa_{21} \int_0^{x_1} u_x^2(x, y_1) dx + \frac{1}{2} ia_{21} \int_0^{x_1} u_x^2(x, 0) dx - \\
& - \frac{1}{2} sa_{12} \int_0^{y_1} u_y^2(x_1, y) dy + \frac{1}{2} ia_{12} \int_0^{y_1} u_y^2(0, y) dy + \\
& + \left(-sa_{20x} + \frac{1}{2} ia_{10} \right) \int_0^{y_1} u^2(x_1, y) dy + \left(ia_{20x} - \frac{1}{2} sa_{10} \right) \int_0^{y_1} u^2(0, y) dy + \\
& + \left(-sa_{02y} + \frac{1}{2} ia_{01} \right) \int_0^{x_1} u^2(x, y_1) dx + \left(ia_{02y} - \frac{1}{2} sa_{01} \right) \int_0^{x_1} u^2(x, 0) dx.
\end{aligned}$$

Используя неравенства Коши—Буняковского и Коши:

$$|(u, v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad |a \cdot b| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{|b|^2}{2\varepsilon} \quad (\text{справедливо } \forall \varepsilon > 0)$$

и учитывая, что $\forall \varepsilon_4 > 0$

$$(L(u), u) = (f, u) \leq \varepsilon_4 \|f\|^2 + \frac{\|u\|^2}{4\varepsilon_4},$$

получим

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_4 \|f\|^2 \geq & \|u_{xy}\|^2 \left(1 - \frac{1}{4\varepsilon_1} - \frac{1}{4\varepsilon_2} - \frac{1}{4\varepsilon_3}\right) + \|u\|^2 \left(\frac{ia_{20xx}}{2} + \frac{ia_{02yy}}{2} - \frac{sa_{10x}}{2} - \frac{sa_{01y}}{2} + \right. \\
 & + ia_{00} - \frac{1}{4\varepsilon_4} - \varepsilon_1(sa_{21x})^2 - \varepsilon_2(sa_{11})^2 - \varepsilon_3(sa_{12y})^2) + \left(\frac{ia_{21y}}{2} - sa_{20}\right) \|u_x^2\| + \\
 & + \left(\frac{ia_{12x}}{2} - sa_{02}\right) \|u_y^2\| - \frac{1}{2}sa_{21} \int_0^{x_1} u_x^2(x, y_1) dx + \frac{1}{2}ia_{21} \int_0^{x_1} u_x^2(x, 0) dx - \\
 & - \frac{1}{2}sa_{12} \int_0^{y_1} u_y^2(x_1, y) dy + \frac{1}{2}ia_{12} \int_0^{y_1} u_y^2(0, y) dy + \left(-sa_{20x} + \frac{1}{2}ia_{10}\right) \int_0^{y_1} u^2(x_1, y) dy + \\
 & + \left(ia_{20x} - \frac{1}{2}sa_{10}\right) \int_0^{y_1} u^2(0, y) dy + \left(-sa_{02y} + \frac{1}{2}ia_{01}\right) \int_0^{x_1} u^2(x, y_1) dx + \\
 & + \left(ia_{02y} - \frac{1}{2}sa_{01}\right) \int_0^{x_1} u^2(x, 0) dx.
 \end{aligned}$$

Потребуем неотрицательности коэффициентов при нормах и при интегралах:

$$\begin{aligned}
 \frac{ia_{20xx}}{2} + \frac{ia_{02yy}}{2} - \frac{sa_{10x}}{2} - \frac{sa_{01y}}{2} + ia_{00} - \frac{1}{4\varepsilon_4} - \varepsilon_1(sa_{21x})^2 - \\
 - \varepsilon_2(sa_{11})^2 - \varepsilon_3(sa_{12y})^2 \geq 0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{ia_{21y}}{2} - sa_{20} \geq 0, \quad \frac{ia_{12x}}{2} - sa_{02} \geq 0, \quad -sa_{21} \geq 0, \quad ia_{21} \geq 0, \quad -sa_{12} \geq 0, \\
 ia_{12} \geq 0, \quad -sa_{20x} + \frac{1}{2}ia_{10} \geq 0, \quad ia_{20x} - \frac{1}{2}sa_{10} \geq 0, \\
 -sa_{02y} + \frac{1}{2}ia_{01} \geq 0, \quad ia_{02y} - \frac{1}{2}sa_{01} \geq 0, \quad 1 - \frac{1}{4\varepsilon_1} - \frac{1}{4\varepsilon_2} - \frac{1}{4\varepsilon_3} \geq 0.
 \end{aligned}$$

При этом оказывается, что $a_{21} \equiv a_{12} \equiv 0$, $a_{02} \leq 0$, $a_{20} \leq 0$ и $1 - \frac{1}{4\varepsilon_1} - \frac{1}{4\varepsilon_2} - \frac{1}{4\varepsilon_3} \geq 0$, а значит,

$$\frac{ia_{20xx}}{2} + \frac{ia_{02yy}}{2} - \frac{sa_{10x}}{2} - \frac{sa_{01y}}{2} + ia_{00} - \frac{1}{4\varepsilon_4} - \varepsilon_2(sa_{11})^2 \geq 0.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}ia_{10} \geq sa_{20x} \geq ia_{20x} \geq \frac{1}{2}sa_{10}, \quad \frac{1}{2}ia_{01} \geq sa_{02y} \geq ia_{02y} \geq \frac{1}{2}sa_{01},$$

и это означает, что точная нижняя грань функции не меньше точной верхней, следовательно, в неравенствах могут достигаться только равенства, то есть

$$\frac{1}{2}a_{10} = a_{20x} = \text{const}, \quad \frac{1}{2}a_{01} = a_{02y} = \text{const}. \quad (10)$$

Следовательно, $ia_{00} \geq \frac{1}{4\varepsilon_4} + \varepsilon_2(sa_{11})^2$. Пренебрегая значениями $\varepsilon_1, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, получим, что $ia_{00} \geq (sa_{11})^2/4$.

Полагаем теперь, что $f = 0$, соответственно, функция u может быть только нулевой.

При $f \equiv 0$ $\varphi_k \equiv \psi_k \equiv 0$ ($k \equiv 0, 1$). Система уравнений (7), (8) является тоже однородной. В силу доказанной единственности решения задачи эта система допускает в данном случае только нулевое решение. По теореме Фредгольма [1] это означает однозначную разрешимость неоднородной системы уравнений (7), (8).

Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям (9), (10), $ia_{00} \geq (sa_{11})^2/4$, $a_{20} \leq 0$, $a_{02} \leq 0$, $a_{21} \equiv a_{12} \equiv 0$, то задача (1)–(3) имеет единственное решение.

Условия теоремы являются существенными, подтверждением этому могут служить множество примеров. Приведём несколько. Рассмотрим, например, задачу Неймана для уравнения $u_{xxuy} + u_{xx} = 0$ в области $D = [0, \pi] \times [0, \pi]$ с условиями $u_x(0, y) = 0$, $u_x(\pi, y) = 0$, $u_y(x, 0) = 0$, $u_y(x, \pi) = 0$ на границе. В нём коэффициент $a_{20} = 1 > 0$, а все остальные равны нулю, условие теоремы не выполнено. Решением является функция $u(x, y) = \cos x \cos y$, отличная от тождественного нуля в области D .

Другим примером может служить уравнение $u_{xxuy} + x^2u_{xxuy} + y^2u_{xxuy} + u_{xx} + u_{yy} + u = 0$ в этой же области с обсуждаемыми граничными условиями. Решением является $u = \cos x + \cos y$. Ещё одним примером является $u_{xxuy} + u_{xxuy} + u_{xyy} + xuy_{xx} + xuy_{yy} - 2yu_x - 2xu_y + xuy = 0$ с решением $u = -x \cos x + \sin x - y \cos y + \sin y$. Каждый раз в этом можно убедиться непосредственно.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976. — 528 с.
2. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973. — 408 с.
3. Березанский Ю. М. О задаче типа Дирихле для уравнения колебания струны // Укр. матем. ж., 1960. — Т. 12, № 4. — С. 363–372.
4. Солдатов А. П., Шхануков М. Х. Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР, 1987. — Т. 297, № 3. — С. 547–552.
5. Colton D. Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Different. equations, 1972. — Vol. 12, No. 3. — P. 559–565.
6. Уткина Е. А. Об одном уравнении в частных производных четвертого порядка. — Минск: Ред. ж. «Дифференц. уравнения», 1999. — 13 с. — Деп. в ВИНТИ 28.06.99. — № 2059–В99.
7. Жегалов В. И., Миронов А. Н. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. — Казань: Казан. матем. общ-во, 2001. — 226 с.
8. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. — М.: Наука, 1981. — 448 с.

Поступила в редакцию 24/VI/2009;
в окончательном варианте — 17/IX/2009.

MSC: 35G16, 35K70

NEUMANN'S PROBLEM FOR ONE EQUATION OF THE FOURTH ORDER

E. A. Utkina

Tatar State University of Humanities and Education,
2, Tatarstan str., Kazan, 420021.

E-mail: eutkina1@yandex.ru

Neumann's problem for pseudoparabolic equation of the 4th order in a rectangular domain is considered in the paper. The existence and uniqueness of solution are proved.

Key words: *Neumann's problem, pseudoparabolic equations, Goursat problem.*

Original article submitted 24/VI/2009;
revision submitted 17/IX/2009.

Elena A. Utkina (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Information Technology in Education.