Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 147–152

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 04:25:35

УДК 534.11

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ СИСТЕМ С ДЕМПФИРОВАНИЕМ

В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов

Сызранский филиал Самарского государственного технического университета,
446001, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, 45.

E-mails: anisimov170159@mail.ru, vladlitvinov@rambler.ru

Изучено влияние демпфирующих сил на амплитуду колебаний, возникающих в системах с движущимися границами при прохождении через резонанс. Получены неравенства, определяющие области, где необходимо учитывать движение границ и действие демпфирующих сил.

Ключевые слова: резонансные свойства, механические системы с движущимися границами, амплитуда колебаний, системы с демпфированием.

В настоящее время вопросы надёжности при проектировании технических объектов с переменными во времени границами требуют все более полного учета динамических явлений, имеющих место в проектируемых объектах. Широкое распространение в технике механических объектов с движущимися границами обуславливает необходимость развития методов их расчета.

Практическая ценность результатов работы заключается в возможности использования их для решения широкого круга технических проблем: надёжность работы канатов в грузоподъёмных установках; динамическая устойчивость нитей, волокон и тесёмочных передач; технологичность изготовления кабелей, проволоки, проката; предотвращение колебаний лент в лентопротяжных механизмах, ленточных пил, гибких звеньев передач с гибкой связью, проволоки при изготовлении оболочек вращения намоткой; надёжность работы железнодорожной контактной сети; устойчивость горения твёрдого топлива и т. д. Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств.

Результатами такого анализа могут стать: повышение надёжности работы технических объектов с переменными во времени границами, повышение точности расчётов конструкций на динамическую прочность.

В системах с движущимися границами наблюдается два вида резонансных явлений [1]: установившийся резонанс и прохождение через резонанс.

Если на систему с переменными во времени размерами действует сила, изменение которой согласовано с изменяющейся частотой собственных колебаний, то явление непрерывного увеличения амплитуды колебаний называется установившимся (обобщённым) резонансом.

Прохождение через резонанс — это явление резкого увеличения амплитуды в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота соб-

Валерий Николаевич Анисимов (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. общетеоретических дисциплин. Владислав Львович Литвинов, преподаватель, каф. общетеоретических дисциплин.

ственных колебаний проходит через значение частоты возмущающего воздействия.

Явление прохождения через резонанс наблюдается в течение конечного промежутка времени, и амплитуда здесь не может достигнуть такой величины, как в случае установившегося резонанса. Однако, когда затухание велико, а скорость границ мала, указанные выше амплитуды близки между собой. При этом, для оценки амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, не обязательно рассматривать задачу с движущимися границами, так как можно зафиксировать границы в резонансной для возмущающей частоты точке и найти амплитуду установившихся колебаний, которая незначительно отличается от максимальной амплитуды, наблюдаемой при прохождении через резонанс. Амплитуда колебаний при фиксированных границах является оценкой сверху для искомой амплитуды.

В связи с изложенным возникает вопрос о том, когда нужно учитывать движение границ, а когда не нужно. Для решения этого вопроса рассмотрим прохождение через резонанс в системе с демпфированием.

В работах [2, 3] рассмотрены резонансные свойства двух систем с учётом демпфирующих сил. Выражения для амплитуды колебаний, полученные в них, имеют следующий вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)e^{-2\alpha_0(\varepsilon_1\tau)\tau} \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где $\alpha_0(\varepsilon_1\tau)$, $E_n(\varepsilon\tau)$, $F_n(\varepsilon\zeta)$, $\Phi_n(\zeta)$ — некоторые функции.

Заменяем функции медленного времени постоянными величинами. Прохождение через резонанс наблюдается в течение сравнительно небольшого промежутка времени, поэтому на данном промежутке с достаточной степенью точности функцию Φ_n можно аппроксимировать параболической зависимостью. При этом приближённое выражение для амплитуды колебаний систем с демпфированием, возникающих при прохождении через резонанс, будет иметь вид

$$A_{0n}^2(\tau_1, \tau_2) = A^2 e^{-2\alpha_0\tau_2} [I_{os}^2(\tau_1, \tau_2) + I_{oc}^2(\tau_1, \tau_2)], \quad (1)$$

где

$$I_{os}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\alpha_0\zeta} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta; \quad I_{oc}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\alpha_0\zeta} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta; \quad (2)$$

$\Phi_n(\zeta) = \frac{1}{2\nu}(\nu\zeta + \omega_0)^2$; α_0 — коэффициент, характеризующий затухание в системе (его можно принять равным декременту затухания свободных колебаний); A — постоянная величина; τ_1, τ_2 — границы резонансной области.

Производную функции $\Phi_n(\zeta)$ аппроксимируем функцией вида $\Phi'_n(\zeta) = \nu\zeta + \omega_0$. Здесь параметр ν характеризует скорость прохождения через резонанс. Точка τ_0 ($\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$), принадлежащая резонансной области, находится по формуле: $\tau_0 = -\omega_0/\nu$.

Сделаем в интегралах (2) такую замену переменных: $z = (\nu\zeta + \omega_0)/\sqrt{2|\nu|}$. Тогда выражение (1) примет вид

$$A_{0n}^2(\tau_1, \tau_2) = A^2 \frac{2}{|\nu|} A_n^2(z_1, z_2),$$

где

$$A_n^2(z_1, z_2) = e^{-2\alpha z_2} [I_s^2(z_1, z_2) + I_c^2(z_1, z_2)]; \quad (3)$$

$$I_s(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z} \sin(\pm z^2) dz; \quad I_c(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z} \cos(\pm z^2) dz; \quad (4)$$

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{2/|\nu|}; \quad z_i = (\nu\tau_i + \omega_0)/\sqrt{2|\nu|}, \quad i = 1, 2.$$

Выбор знака перед z^2 в (4) не изменит величины выражения (3), поэтому в дальнейшем будем брать знак «плюс». Заметим также, что после замены точка τ_0 переходит в точку $z_0 = 0$.

Исследуем выражение (3) на максимум в окрестности точки $z_0 = 0$. Величины z_1 и z_2 , соответствующие максимуму, определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial A_n^2(z_1, z_2)}{\partial z_1} = 0, \\ \frac{\partial A_n^2(z_1, z_2)}{\partial z_2} = 0, \end{cases}$$

которая в рассматриваемом случае примет такой вид:

$$\begin{cases} -\alpha I_s(z_1, z_2) + e^{\alpha z_2} \cos z_1^2 \sin(z_2^2 - z_1^2) = 0, \\ I_s(z_1, z_2) \sin z_1^2 + I_c(z_1, z_2) \cos z_1^2 = 0. \end{cases}$$

В результате численного решения данной системы были получены значения, представленные в следующей таблице.

α	0,00	0,10	0,30	0,50	0,70	1,00	1,30	2,00	3,00	7,00
z_1	-1,56	-1,54	-1,49	-1,49	-1,48	-1,48	-1,47	-1,46	-1,35	-1,29
z_2	1,56	1,45	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10	1,00	0,70	0,40
$A_n(\alpha)$	2,37	2,06	1,60	1,29	1,07	0,84	0,68	0,47	0,33	0,144

Максимальная амплитуда колебаний, возникающих при остановке границ в резонансной точке, определяется выражением (1) при $\nu = 0$. Производя вычисления, получим

$$A_{0n}^{\max} = A/\alpha_0. \quad (5)$$

При $\nu \neq 0$ амплитуда определяется выражением

$$A_{0n} = A \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} \cdot A_n \left(\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} \right), \quad (6)$$

где A_n находится по таблице.

Учёт движения границ следует производить, если относительная погрешность амплитуды

$$\Delta = \frac{A_{0n}^{\max} - A_{0n}}{A_{0n}} \quad (7)$$

велика. Подставляя в выражение (7) равенства (5), (6), получим

$$\Delta = \frac{\sqrt{|\nu|}}{\sqrt{2}\alpha_0 \cdot A_n \left(\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} \right)} - 1.$$

Используя данные таблицы, нетрудно установить, что погрешность Δ превышает значение 0,05 при

$$\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} < 2,164. \quad (8)$$

Неравенство (8) определяет область в пространстве параметров α_0 и ν , где необходимо учитывать движение границ.

Определим, как соотносятся между собой величина ν и скорость движения границ. Если система подвержена действию силы постоянной частоты ω_0 , то с точностью до величин порядка малости ε^2 (ε — малый параметр, характеризующий медленность движения границ) можем записать

$$\Phi_n(\tau) = -\omega_0\tau + \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\zeta) d\zeta, \quad (9)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\zeta)$ — собственная частота колебаний системы [4].

В большинстве прикладных случаев функция $\omega_{0n}(\varepsilon\zeta)$ может быть записана в виде

$$\omega_{0n}(\varepsilon\zeta) = \frac{k}{l^\gamma(\varepsilon\zeta)}, \quad (10)$$

где k, γ — постоянные величины.

Величина ν характеризует скорость прохождения через резонанс и определяется по формуле $\nu = \Phi_n''(\tau)$, откуда с учётом (9), (10) получим

$$\nu = -\omega_{0n}(\varepsilon\tau) \frac{\gamma \varepsilon l'(\varepsilon\tau)}{l(\varepsilon\tau)}.$$

Таким образом, ν является медленно изменяющейся во времени функцией. Примем за ν её значение в точке $\tau = \tau_0$, в которой мгновенная собственная частота системы совпадает с возмущающей частотой. В этом случае получим

$$\nu = -\omega_0 \frac{\gamma v}{l_0}, \quad (11)$$

где l_0 — длина объекта в момент времени $\tau = \tau_0$, v — скорость изменения длины в точке $\tau = \tau_0$.

Подставляя ν в (8) и выполняя необходимые преобразования, получим следующее неравенство, ограничивающее область, где необходимо учитывать движение границ: $\Delta_A < 3,8\sqrt{\gamma\Delta_l}$, где $\Delta_A = 2\pi\alpha_0/\omega_0$ — относительное изменение амплитуды за одно свободное колебание; $\Delta_l = 2\pi|\nu|/\omega_0 l_0$ — относительное изменение длины за одно свободное колебание.

Заметим, что возможен также случай, когда прохождение через резонанс происходит быстро, и демпфирующие силы не успевают существенно уменьшить амплитуду колебаний. Тогда при решении задачи нет необходимости учитывать действие демпфирующих сил, и в рассматриваемом случае следует α_0 принять равным нулю. Погрешность при этом определяется следующим выражением:

$$\Delta = \frac{A_{0n}|_{\alpha=0} - A_{0n}}{A_{0n}}.$$

Используя данные таблицы, находим, что эта погрешность превышает значение 0,05, если

$$\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} > 0,04.$$

Подставляя сюда величину ν , определяемую равенством (11), после преобразований получим

$$\Delta_A > 0,1\sqrt{\gamma\Delta_l}. \quad (12)$$

Неравенство (12) определяет область, где необходимо учитывать действие демпфирующих сил.

Таким образом, если выполняется неравенство $0 < \Delta_A < 0,1\sqrt{\gamma\Delta_l}$, то при исследовании прохождения через резонанс действие демпфирующих сил можно не учитывать. Если $\Delta_A > 3,8\sqrt{\gamma\Delta_l}$, то можно не учитывать движение границ, а при $0,1\sqrt{\gamma\Delta_l} < \Delta_A < 3,8\sqrt{\gamma\Delta_l}$ необходимо учитывать и демпфирующие силы, и движение границ.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Анисимов В. Н. Исследование резонансных свойств одномерных механических систем с движущимися границами. — Куйбышев: КПТИ, 1985. — 18 с. — Деп. в ВИНТИ 3.07.85, № 807–85.
2. Литвинов В. Л. Учёт влияния демпфирующих сил на резонансные свойства струны с движущейся границей / В сб.: *Научно-техническое творчество: проблемы и перспективы*. Сборник статей III Всероссийской научно-технической конференции-семинара. — Самара, 2008. — С. 31–36.
3. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Продольные колебания вязкоупругого каната переменной длины / В сб.: *Труды Четвёртой Всероссийской конференции с международным участием*. Часть 1: Математические модели механики, прочности и надёжности элементов конструкций / Матем. моделирование и краев. задачи. — Самара: СамГТУ, 2007. — С. 25–27.
4. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича—Галёркина // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. — № 1 (18). — С. 149–158.

Поступила в редакцию 20/VII/2009;
в окончательном варианте — 11/VIII/2009.

MSC: 74H45, 74K05

**ANALYSIS OF THE INFLUENCE OF THE MOTION OF
BOUNDARIES WITH THE INVESTIGATION OF THE RESONANCE
PROPERTIES OF SYSTEMS WITH THE DAMPING**

V. N. Anisimov, V. L. Litvinov

Syzran' Branch of Samara State Technical University
45, Sovetskaya st., Syzran', Samara region, 446001.

E-mails: anisimov170159@mail.ru, vladlitvinov@rambler.ru

Influence of the damping forces on the amplitude of the vibrations, which appear in the systems with the moving boundaries in transit through resonance is studied. Inequalities, which determine the regions, where it is necessary to consider the motion of boundaries and the action of the damping forces, are obtained.

Key words: resonance characteristics, mechanical systems with moving borders, amplitude vibrations, systems with the damping.

Original article submitted 20/VII/2009;
revision submitted 11/VIII/2009.

Valeriy N. Anisimov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of General-theoretical Disciplines. *Vladislav L. Litvinov*, Teacher, Dept. of General Theoretical Disciplines.