Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Кузнецов, А. С. Сипин, Статистические оценки для степеней оператора Грина, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 114–123

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 12:55:10

Математическое моделирование

УДК 519.245; 519.632.4

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ СТЕПЕНЕЙ ОПЕРАТОРА ГРИНА

А. Н. Кузнецов, А. С. Сипин

Вологодский государственный педагогический университет,
160035 Вологда, ул. С. Орлова, 6.

E-mails: pm_kan@uni-vologda.ac.ru, cac@uni-vologda.ac.ru

Рассмотрены как известные, так и новые алгоритмы, позволяющие вычислять степени оператора Грина методом Монте–Карло на траекториях марковской цепи. Полученные статистические оценки используются для решения задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца с комплексным параметром. Проведено численное моделирование и сделан сравнительный анализ эффективности алгоритмов.

Ключевые слова: метод Монте–Карло, задача Дирихле, уравнение Гельмгольца, аналитическое продолжение, функция Грина, оператор Грина.

Введение. Пусть $G(x, y)$ — функция Грина первой краевой задачи для оператора Лапласа в области $V \subset \mathbb{R}^m$ ($m \geq 3$). Оператор G с ядром $G(x, y)$, действующий в $C(\bar{V})$, будем называть оператором Грина. Оценки степеней оператора Грина могут использоваться для решения задачи Дирихле для уравнений Гельмгольца и Лапласа, а также при оценке значений собственных чисел оператора Лапласа. Для вычисления $G^k f$ можно использовать стандартный процесс блуждания по сферам, но это приводит к необходимости моделирования ветвящегося процесса и, следовательно, к значительным затратам времени для расчётов. В работе рассмотрены методы, позволяющие получить оценки $G^k f$ на траекториях марковских цепей, связанных с тем или иным интегральным представлением решения уравнения Гельмгольца. Проведено сравнение с алгоритмами, вычисляющими оценку решения уравнения Гельмгольца без вычисления степеней оператора Грина. Рассмотрены возможности использования аналитического продолжения решения.

1. Решение задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца без вычисления степеней оператора Грина. Рассмотрим внутреннюю задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца:

$$\Delta u + \lambda u = -f, \quad u|_{\Gamma} = 0. \quad (1)$$

Для решения задачи (1) обычно используются статистические оценки на траекториях марковского процесса блуждания по сферам, теория которых наиболее полно представлена в работе [1]. Укажем здесь только построенную там оценку.

Андрей Николаевич Кузнецов, старший преподаватель, каф. прикладной математики.
Александр Степанович Сипин (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики.

Определим случайный процесс *блуждания по сферам* рекуррентными формулами: $x_n = x_{n-1} + r_n \omega_n$, где ω_n — вектор изотропного направления, а r_n — расстояние от точки x_{n-1} до границы Γ . Блуждание ведётся до момента N выхода процесса в ε -окрестность границы. Оценка решения имеет следующий вид:

$$\xi = \sum_{n=0}^N \left(\prod_{i=0}^{n-1} q(\lambda, r_i) \right) f(\nu_n, \omega_n) \frac{r_n^2 q(\lambda, r_n)}{6q(\lambda, r_n - \nu_n)},$$

где ν_n — случайная величина, распределенная в интервале $(0; r)$ с плотностью $\frac{6x(1-x/r)}{r^2}$, $q(\lambda, r) = \frac{r\sqrt{\lambda}}{\sin(r\sqrt{\lambda})}$ (для $\mathbb{R}^3$), λ_1 — первое собственное число оператора $\mathcal{L} = -\Delta$.

В [1] доказано, что $E|\xi^2| < +\infty$ при $\text{Re}(\lambda) < \frac{\lambda_1}{2}$.

В случае размерности пространства больше 3 аналог этой оценки требует вычисления *функции Бесселя*. Оценку, лишённую этого недостатка, можно построить на траекториях *блуждания по шарам*.

Рассмотрим *внутреннюю задачу Дирихле* для уравнения Лапласа при размерности пространства $m = 3$ (распространение на случай $m > 3$ не вызывает затруднений) в шаре $V = K_r(x)$ радиуса r с центром в точке x с границей $S_r(x)$:

$$\Delta u = -f, \quad u|_{\Gamma} = 0; \quad f \in C'(V) \cap C(\bar{V}). \quad (2)$$

Пользуясь теоремой о среднем для задачи Дирихле и определением *функции Грина* [5], решение задачи можно записать в виде

$$u(x) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S_r(x)} u(y) dy S + \int_{K_r(x)} G_r(x, y) f(y) dy,$$

где $G_r(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{r} \right)$ — *шаровая функция Грина*.

Умножим обе части уравнения на r^2 и проинтегрируем от 0 до R :

$$\int_0^R r^2 u(x) dr = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \int_{S_r(x)} u(y) dy S dr + \int_0^R r^2 \int_{K_r(x)} G_r(x, y) f(y) dy dr,$$

$$\frac{R^3}{3} u(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{K_R(x)} u(y) dy + \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \int_0^R r^2 \int_0^r \rho^2 \left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r} \right) f(x + \omega \rho) d\rho dr d\omega.$$

Изменив порядок интегрирования во втором интеграле правой части, получим

$$u(x) = \frac{1}{V_R} \int_{K_R(x)} \left(u(y) + \frac{(R-\rho)^2(2R+\rho)}{6\rho} f(y) \right) dy, \quad (3)$$

где $V_R = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Определим случайный процесс *блуждания по шарам* рекуррентными формулами:

$$x_n = x_{n-1} + R(x_{n-1})y_n,$$

где y_n распределены равномерно в шаре радиуса 1 с центром в нуле и независимы, а $R(x)$ — расстояние от точки x до границы Γ . Последовательность x_n образует ограниченный мартингал и, следовательно, сходится с вероятностью 1. Осредняя по y_n , получаем

$$R(x_{n-1}) = \frac{4}{3} \mathbb{E} |x_n - x_{n-1}|,$$

откуда следует, что $R(x_n) \rightarrow 0$ с вероятностью 1, а x_n сходится к точке на границе области.

Используя подстановку $f := f + \lambda u$, получим оценку решения задачи (1):

$$\xi = \sum_{n=0}^{N-1} \left(\prod_{i=0}^{n-1} (1 + \lambda s(x_i, x_{i+1})) \right) s(x_n, x_{n+1}) f(x_{n+1}), \quad (4)$$

где $s(x, y) = \frac{(R - |x - y|)^2 (2R + |x - y|)}{6|x - y|}$.

Сравнение результатов работы на модельной задаче (п. 3) этих алгоритмов представлено в табл. 1 и 2. Время расчётов по 10 000 000 траекторий для $\lambda = 9 + 9i$ составляет 8 мин 56 сек¹ и 4 мин 45 сек соответственно.

Таблица 1

Оценки решения уравнения при $x = (0,3; 0,7; 1)$, $u(x) \approx -0,3822$

	$\lambda = 5 + 5i$	$\lambda = 9 + 9i$	$\lambda = 10 + 10i$	$\lambda = 13 + 13i$	$\lambda = 15 + 15i$
С	$-0,3821 + 0,0001i$	$-0,3832 + 0,0022i$	$-0,3890 + 0,0009i$	$-0,2464 + 0,1092i$	$-1,6371 - 0,9366i$
III	$-0,3826 - 0,0003i$	$-0,3932 - 0,0218i$	$-0,3969 - 0,0764i$	$1,4559 - 1,2611i$	$17,179 + 3,8600i$

Таблица 2

Выборочная дисперсия $(|\xi - \bar{\xi}|^2)$

	$\lambda = 5 + 5i$	$\lambda = 9 + 9i$	$\lambda = 10 + 10i$	$\lambda = 13 + 13i$	$\lambda = 15 + 15i$
С	0,3561	29,221	234,13	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^7$
III	4,2864	8874,6	74088	$4 \cdot 10^7$	$2 \cdot 10^9$

2. Оценки, использующие степени оператора Грина. Задача (1) эквивалентна интегральному уравнению $u = \lambda G u + G f$, решение которого при малых λ представляется рядом

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n G^{n+1} f. \quad (5)$$

При больших λ можно использовать *аналитическое продолжение решения* методом замены переменных [2]. Приведём краткое его описание.

¹Здесь и далее указано чистое процессорное время расчёта на AMD Athlon 64 X2 Dual Core Processor 4200+, в один поток под управлением ОС WinXP (x86) SP3. Библиотеки собраны на MS VC++ Express 2008.

Пусть D — односвязная подобласть области существования $u(x, \lambda)$ относительно λ , в которой функция u не имеет никаких особых точек по λ кроме полюсов, и $\lambda = 0$ лежит в D . На комплексной плоскости переменной η выберем односвязную область H , содержащую точку $\eta = 0$, и функцию $\lambda = \psi(\eta)$, осуществляющую конформное отображение области H на D , причем так, что $\psi(0) = 0$. Функция $\lambda = \psi(\eta)$ может быть разложена в ряд: $\lambda = \psi(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \eta^n$. Тогда функция $F(x, \eta) = u(x, \psi(\eta)) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi(\eta)^n G^{n+1} f$ регулярна в окрестности нуля и может быть разложена в степенной ряд:

$$F(x, \eta) = u(x, \psi(\eta)) = G f + \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n b_n, \quad (6)$$

$$b_n = \sum_{k=1}^n d_k^{(n)} G^{k+1} f, \quad d_k^{(n)} = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial \eta^n} [\psi(\eta)]^k \right\}_{\eta=0}.$$

Пусть C_η — круг $|\eta| < R_\eta$, в котором сходится ряд (6) на плоскости η , $H' = H \cap C_\eta$, а D' — образ H' при отображении $\lambda = \psi(x)$, тогда:

- если область D' выходит за пределы круга сходимости ряда (5), то $F(x, \psi^{-1}(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} [\psi^{-1}(\lambda)]^n b_n$ является аналитическим продолжением функции $u(x, \lambda)$ из круга C_λ в D' ; если $D' \subset C_\lambda$, то данная функция не является аналитическим продолжением, но использование такого представления может оказаться более удобным для вычислений;
- если $u(x, \lambda)$ регулярна в D , а H — круг $|\eta| < 1$, то $F(x, \psi^{-1}(\lambda))$ даёт аналитическое продолжение функции $u(x, \lambda)$ из круга C_λ во всю область D' .

Если D — односвязная область, в которой $u(x, \lambda)$ мероморфна по λ , $\lambda = 0 \in D$, точка $\lambda = \lambda_*$, для которой ищется значение функции, лежит внутри D , а $\lambda = \psi(\eta)$ осуществляет однозначное конформное отображение круга $H(|\eta| < 1)$ на область D , $\psi(0) = 0$, и для $\eta_* = \psi^{-1}(\lambda_*)$ выполняются неравенства $\max_{\eta_i \in H} \left| \frac{\eta_*}{\eta_i} \right| < 1$ и $\max_{\eta_i \in H} \left| \frac{\eta_*}{\eta_i} \right| < \max_{\lambda_i \in D} \left| \frac{\lambda_*}{\lambda_i} \right|$, где максимумы берутся по всем полюсам λ_i в области D , $\eta_i = \psi^{-1}(\lambda_i)$. При этом:

- остаточный член ряда (5) имеет оценку $|R_n| = O\left(\left|\frac{\eta_*}{1-\eta_*}\right|^{n+1}\right)$, где $h > 0$ — сколь угодно маленькое число, если в области D функция $u(x, \lambda)$ регулярна;
- $|R_n| = O\left(\left|\frac{\eta_*}{\eta_1}\right|^{n+1} n^{r-1}\right)$, где η_1 — ближайший полюс $F(x, \eta)$ из D , а r — наибольшая кратность полюса.

При $\text{Im}(\lambda) \neq 0$, в качестве области D рассмотрим плоскость с разрезом по вещественной оси $[\lambda_0, \infty)$, где $0 < \lambda_0 \leq \lambda_1$. Отображающие функции в этом случае имеют вид [2]:

$$\lambda = \psi(\eta) = -\frac{4\lambda_0\eta}{(1-\eta)^2}, \quad \eta = \psi^{-1}(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda_0 - \lambda} - \sqrt{\lambda_0}}{\sqrt{\lambda_0 - \lambda} + \sqrt{\lambda_0}}.$$

Найдём коэффициенты для ряда (6): разложение функции $\lambda^k = [\psi(\eta)]^k$ в ряд Маклорена имеет вид $(-4\lambda_0)^k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2k+m-1)!}{(2m-1)!} \eta^{m+k}$, подставляя его в (5)

и меняя порядок суммирования, получаем

$$F(x, \eta) = G f + \sum_{n=1}^{\infty} \eta^n \sum_{k=1}^n (-4\lambda_0)^k C_{k+n-1}^{2k-1} G^{k+1} f.$$

Проведя ограничение количества членов ряда и выполнив замену $l_k^{(m)} := (-4\lambda_0)^k \sum_{n=k}^m \eta^n C_{k+n-1}^{2k-1}$, получим формулу для разложения

$$F(x, \eta) = G f + \sum_{n=1}^m l_n^{(m)} G^{n+1} f.$$

Мероморфная по λ функция (5) имеет полюсы в точках спектра задачи (1) и, следовательно, аналитична на комплексной плоскости с разрезом по лучу $[\lambda_0; +\infty)$, где $\lambda_0 \leq \lambda_1$.

Рассмотрим последовательность $u_n = G^n f$. Очевидно, что $\Delta u_n = -u_{n-1}$. Применяя равенство (3) к этому уравнению, получим:

$$u_n(x) = \frac{1}{V_R} \int_{K_R(x)} \left(u_n(y) + \frac{(R-\rho)^2(2R+\rho)}{6\rho} u_{n-1}(y) \right) dy,$$

$$u_n(x) = E(u_n(x_1) + s(x, x_1)u_{n-1}(x_1)).$$

Используя эту оценку для $u_k(x_i)$ получим формулы:

$$\begin{aligned} u_1(x_0) &= E \sum_{i=1}^N s(x_{i-1}, x_i) f(x_i), \\ u_2(x_0) &= E \sum_{i=1}^N s(x_{i-1}, x_i) u_1(x_i) = E \sum_{i=1}^N s(x_{i-1}, x_i) \sum_{j=i+1}^N s(x_{j-1}, x_j) f(x_j), \\ u_3(x_0) &= E \sum_{i=1}^N s(x_{i-1}, x_i) u_2(x_i) = E \sum_{i=1}^N s(x_{i-1}, x_i) \sum_{j=i+1}^N s(x_{j-1}, x_j) u_1(x_j) = \\ &= E \sum_{i=1}^N s(x_{i-1}, x_i) \sum_{j=i+1}^N s(x_{j-1}, x_j) \sum_{l=j+1}^N s(x_{l-1}, x_l) f(x_l), \\ &\dots \end{aligned} \quad (7)$$

которые очевидным образом позволяют оценивать конечное число степеней оператора Грина на одной траектории блуждания.

В трехмерном случае степени оператора Грина можно вычислять на траекториях процесса *блуждания по шарам и сферам*, описанном в [3], который естественно обобщается на случай комплексного параметра.

Пусть уравнение (1) однозначно разрешимо и $0 \leq |\lambda| \leq c^2$, $c = \text{const}$, тогда интегральное представление для u имеет вид:

$$u(x) = \frac{q}{4\pi R^2(x)} \int_{S_{R(x)}} u(y) d_y S + (1-q) \int_{K_{R(x)}} p(x, y) \left(\frac{f(y)}{c^2} + \frac{c^2 + \lambda}{c^2} u(y) \right) dy,$$

где $q = \frac{Rc}{\text{sh}(Rc)}$, $p(x, y) = \frac{c^2 \text{sh}((R-r)c)}{4\pi r(\text{sh}(Rc) - Rc)}$ — плотность перехода из x в y , $r = |x - y|$. Траектория для получения несмещенной оценки $u(x)$ строится следующим образом: пусть $x_0 = x$. Точка x_{n+1} с вероятностью $q(x_n)$ распределена равномерно на сфере $S_{R(x_n)}$ и с вероятностью $1 - q(x_n)$ — в шаре $K_{R(x_n)}$ с плотностью $p(x, y)$ ².

Оценка $u(x)$ имеет следующий вид:

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(x_{i_n})}{c^2} \left(1 + \frac{\lambda}{c^2}\right)^n \chi_{(n \leq N)},$$

где i_n — индекс $n + 1$ -го перехода в шар, N — число переходов в шар на траектории $\{x_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Произведя перегруппировку по λ , получим, что

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f(x_{i_m})}{c^{2n+2}} C_m^n \chi_{(m \leq N)}.$$

Сравнивая с (5), получаем несмещенную оценку для $(n + 1)$ -й степени оператора Грина:

$$\xi^{(n+1)} = \sum_{m=n}^{\infty} \frac{f(x_{i_m})}{c^{2n+2}} C_m^n \chi_{(m \leq N)}. \quad (8)$$

В [3] доказано, что описанный процесс с вероятностью 1 сходится к границе области и $N < \infty$ с вероятностью 1. Кроме того, величина N имеет моменты всех порядков. Пусть $M = \max(|f(x)|)$, тогда

$$|\xi^{(n+1)}| \leq \frac{M}{c^{2n+2}} \sum_{m=n}^N C_m^n = \frac{M}{c^{2n+2}} C_{N+1}^{n+1} \leq \frac{M}{c^{2n+2}} \cdot \frac{N^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Значит, оценка $\xi^{(n+1)}$ имеет все моменты.

Решение задачи (2) можно представить в виде суммы объемного потенциала и гармонической внутри области функции:

$$\begin{cases} u = v + w, \\ v = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{f(y)}{|x - y|} dy, \\ \Delta w = 0, \\ w|_{\Gamma} = -v. \end{cases} \quad (9)$$

Значение функции v оценивается по одному случайному узлу, а w находится методом блуждания по сферам [4]. Повторное применение этого алгоритма позволяет вычислить степени оператора Грина на траекториях ветвящегося процесса, программная реализация которого выполнена с помощью простой рекурсии. Конечность дисперсии оценок очевидна.

²Метод моделирования плотности описан в [4].

Ещё один способ вычисления степеней *оператора Грина* связан с вычислением самой *функции Грина* краевой задачи:

$$\begin{cases} G(x, y) = \frac{1}{4\pi |x - y|} + g(x, y), \\ \Delta_y g(x, y) = 0, \\ g(x, y)|_{\Gamma} = -\frac{1}{4\pi |x - y|}. \end{cases} \quad (10)$$

В данном методе оценки степеней *оператора Грина* строятся как оценки соответствующих кратных интегралов

$$G^n f(x) = \int_D \cdots \int_D G(x, y_1) G(y_1, y_2) \cdots G(y_{n-1}, y_n) f(y_n) dy_1 \cdots dy_n.$$

3. Модельная задача. Для проверки алгоритмов решалась внутренняя задача Дирихле для уравнения Гельмгольца в параллелепипеде размерами $1 \times 2 \times 3$ с гранями параллельными координатным осям. Разрез для применения метода аналитического продолжения $[13, 43; +\infty)$. Известно, что в данном

Таблица 3

Оценки решения уравнения без использования аналитического продолжения

n	(8), $c = 10$	(7)	(9)	(10)	ветв.
$\lambda = 5 + 5i$					
3	$-0,4211 + 0,0416i$	$-0,4223 + 0,0396i$	$-0,4101 + 0,0404i$	$-0,4440 + 0,0381i$	$-0,4225 + 0,0411i$
4	$-0,4115 + 0,0041i$	$-0,4121 - 0,0004i$	$-0,4152 + 0,0208i$	$-0,4362 - 0,0013i$	—
5	$-0,3945 - 0,0060i$	$-0,3933 - 0,0115i$	$-0,4159 + 0,0125i$	$-0,4105 - 0,0183i$	—
6	$-0,3847 - 0,0035i$	$-0,3821 - 0,0086i$	$-1,7579 - 0,5223i$	$-0,3697 - 0,0101i$	—
7	$-0,3821 + 0,0009i$	$-0,3790 - 0,0034i$	$-23,755 - 35,169i$	$-0,3578 + 0,0077i$	—
$\lambda = 9 + 9i$					
3	$-0,6074 + 0,2353i$	$-0,6146 + 0,2322i$	$-0,5622 + 0,2089i$	$-0,6825 + 0,2668i$	$-0,6136 + 0,2339i$
4	$-0,6814 + 0,0177i$	$-0,6936 + 0,0002i$	$-0,7077 + 0,0946i$	$-0,7852 + 0,0369i$	—
5	$-0,5885 - 0,1709i$	$-0,5912 - 0,2082i$	$-0,7838 - 0,0622i$	$-0,6579 - 0,2842i$	—
6	$-0,4074 - 0,2325i$	$-0,3844 - 0,2788i$	$-26,144 + 2,0335i$	$0,1139 - 0,6241i$	—
7	$-0,2519 - 0,1560i$	$-0,2035 - 0,1897i$	$-1372,9 - 577,83i$	$0,8417 - 0,3415i$	—
$\lambda = 10 + 10i$					
3	$-0,6922 + 0,3214i$	$-0,7016 + 0,3181i$	$-0,6311 + 0,2827i$	$-0,7871 + 0,3702i$	$-0,6996 + 0,3203i$
4	$-0,8393 + 0,0212i$	$-0,8577 - 0,0016i$	$-0,8702 + 0,1260i$	$-0,9787 + 0,0549i$	—
5	$-0,7286 - 0,3017i$	$-0,7350 - 0,3573i$	$-1,0128 - 0,1396i$	$-0,8391 - 0,4889i$	—
6	$-0,4164 - 0,4545i$	$-0,3760 - 0,5319i$	$-43,960 + 8,5757i$	$0,4680 - 1,2737i$	—
7	$-0,0821 - 0,3400i$	$0,0223 - 0,3936i$	$-2859,6 - 800,97i$	$1,9898 - 0,8941i$	—
$\lambda = 15 + 15i$					
3	$-1,4281 + 1,0719i$	$-1,4595 + 1,0749i$	$-1,2371 + 0,9194i$	$-1,6925 + 1,2775i$	$-1,4550 + 1,0764i$
4	$-2,6793 + 0,0586i$	$-2,7892 - 0,0040i$	$-2,7120 + 0,3906i$	$-3,1945 + 0,2131i$	—
5	$-2,9364 - 2,3934i$	$-3,0685 - 2,7053i$	$-4,1062 - 1,6261i$	$-3,8639 - 3,9157i$	—
6	$-0,5651 - 5,3197i$	$-0,3418 - 6,0574i$	$-330,23 + 260,71i$	$6,0616 - 17,818i$	—
7	$5,1455 - 5,9184i$	$6,4623 - 6,7501i$	$-48439 + 7075,7i$	$32,062 - 22,161i$	—
$\lambda = 20 + 20i$					
3	$-2,8611 + 2,5252i$	$-2,9352 + 2,5493i$	$-2,4206 + 2,1430i$	$-3,4413 + 3,0410i$	$-2,9276 + 2,5488i$
4	$-7,6159 + 0,1235i$	$-7,9901 - 0,0082i$	$-7,5000 + 0,8895i$	$-9,0292 + 0,5180i$	—
5	$-11,012 - 10,209i$	$-11,719 - 11,391i$	$-14,031 - 7,6086i$	$-15,495 - 16,881i$	—
6	$-1,0190 - 29,982i$	$-0,2284 - 34,056i$	$-1388,3 + 1924,5i$	$26,331 - 108,94i$	—
7	$41,762 - 44,041i$	$50,745 - 50,691i$	$-4 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^5 i$	$221,12 - 182,03i$	—

случае все собственные значения задачи вещественны, положительны и $\lambda_1 = \frac{49\pi^2}{36} \approx 13,4336$.

В качестве точного решения выбиралась функция $u(x) = x_1(x_1 - 1)x_2 \times (x_2 - 2)x_3(x_3 - 3)$, которая соответствует правой части

$$f(x, \lambda) = -2(x_2(x_2 - 2)x_3(x_3 - 3) + x_1(x_1 - 1)x_3(x_3 - 3) + x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 2)) - \lambda x_1(x_1 - 1)x_2(x_2 - 2)x_3(x_3 - 3).$$

В табл. 3 и 4 представлены результаты расчётов по алгоритмам, использующим оценки степеней оператора Грина (7)–(10) в точке $x = (0, 3, 0, 7, 1)$, при этом точное решение $u(x) \approx -0,3822$. Для сравнения в этой таблице также приведены оценки, полученные стандартным блужданием по сферам с ветвлением, но лишь для первых трех степеней по 10 000 траекторий³. Время расчёта для значения $\lambda = 9 + 9i$: 3 мин 16 сек (алг. (8), $c = 10$), 6 мин 54 сек (алг. (7)), 119 мин 59 сек (алг. (9)), 3 мин 32 сек (алг. (10)), 135 мин 51 сек (ветвление). Выборочная дисперсия оценок $(|\xi - \bar{\xi}|^2)$ представлена в табл. 5.

Таблица 4

Оценки решения уравнения с использованием аналитического продолжения					
n	(8), $c = 10$	(7)	(9)	(10)	ветв.
$\lambda = 5 + 5i$					
3	$-0,3953 + 0,0082i$	$-0,3955 + 0,0050i$	$-0,3824 + 0,0111i$	$-0,4165 - 0,0010i$	$-0,3957 + 0,0066i$
4	$-0,3863 + 0,0023i$	$-0,3846 - 0,0021i$	$-0,4123 + 0,0052i$	$-0,4119 - 0,0050i$	—
5	$-0,3846 + 0,0032i$	$-0,3821 - 0,0009i$	$-0,4116 + 0,0084i$	$-0,3897 + 0,0050i$	—
6	$-0,3845 + 0,0034i$	$-0,3820 - 0,0002i$	$-0,2830 - 3,3551i$	$-0,3826 + 0,0514i$	—
7	$-0,3846 + 0,0034i$	$-0,3821 - 0,0002i$	$84,742 - 70,034i$	$-0,3432 + 0,0192i$	—
$\lambda = 9 + 9i$					
3	$-0,4732 + 0,0073i$	$-0,4746 - 0,0042i$	$-0,4100 + 0,0326i$	$-0,5443 - 0,0147i$	$-0,4732 - 0,0031i$
4	$-0,4046 - 0,0179i$	$-0,3915 - 0,0348i$	$-0,5230 - 0,1965i$	$-0,5037 - 0,0405i$	—
5	$-0,3908 + 0,0011i$	$-0,3711 - 0,0069i$	$-0,5718 - 0,1643i$	$-0,3007 + 0,2158i$	—
6	$-0,3934 + 0,0045i$	$-0,3763 - 0,0006i$	$59,769 - 46,457i$	$-0,9679 + 1,2490i$	—
7	$-0,3937 + 0,0044i$	$-0,3691 + 0,0018i$	$4985,1 + 1713,1i$	$1,4216 + 2,0162i$	—
$\lambda = 10 + 10i$					
3	$-0,5068 - 0,0062i$	$-0,5079 - 0,0211i$	$-0,4251 + 0,0370i$	$-0,5949 - 0,0366i$	$-0,5059 - 0,0191i$
4	$-0,4048 - 0,0354i$	$-0,3854 - 0,0557i$	$-0,5098 - 0,3149i$	$-0,5324 - 0,0696i$	—
5	$-0,3863 - 0,0003i$	$-0,3586 - 0,0042i$	$-0,5993 - 0,2877i$	$-0,2711 + 0,3775i$	—
6	$-0,3943 + 0,0062i$	$-0,3794 + 0,0126i$	$115,03 - 54,515i$	$-1,8013 + 1,9182i$	—
7	$-0,3964 + 0,0047i$	$-0,3788 + 0,0115i$	$8388,2 + 5821,8i$	$2,2753 + 4,6233i$	—
$\lambda = 15 + 15i$					
3	$-0,6912 - 0,2003i$	$-0,6891 - 0,2397i$	$-0,5460 + 0,0078i$	$-0,8634 - 0,3306i$	$-0,6840 - 0,2385i$
4	$-0,3069 - 0,1499i$	$-0,2288 - 0,1780i$	$0,1884 - 0,8792i$	$-0,5856 - 0,3336i$	—
5	$-0,3476 + 0,0445i$	$-0,2895 + 0,1057i$	$-0,0855 - 1,2239i$	$-1,0441 + 2,2660i$	—
6	$-0,4153 + 0,0248i$	$-0,4640 + 0,0532i$	$682,01 + 364,24i$	$-16,163 - 1,0112i$	—
7	$-0,4071 + 0,0007i$	$-0,4572 + 0,0594i$	$-29852 + 92991i$	$-30,061 + 44,489i$	—
$\lambda = 20 + 20i$					
3	$-0,7879 - 0,5837i$	$-0,7710 - 0,6568i$	$-0,6738 - 0,1367i$	$-0,9964 - 0,8752i$	$-0,7612 - 0,6571i$
4	$-0,0282 - 0,1670i$	$0,1380 - 0,1560i$	$1,4750 - 0,6595i$	$-0,4192 - 0,6269i$	—
5	$-0,3912 + 0,2047i$	$-0,3935 + 0,3852i$	$1,6289 - 1,6852i$	$-5,1498 + 4,4360i$	—
6	$-0,4993 + 0,0182i$	$-0,6700 - 0,0984i$	$844,57 + 2120,6i$	$-30,997 - 35,630i$	—
7	$-0,4112 - 0,0067i$	$-0,6799 - 0,0741i$	$-3 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^5i$	$-194,99 + 14,507i$	—

³Вычисление большего количества степеней при использовании однопоточной реализации занимает слишком много времени.

Следует заметить, что в методе блуждания по сферам и шарам (алг. (8)) время расчётов сильно зависит от значения параметра c , так при $c = 100$ время расчёта для значения $\lambda = 9 + 9i$ выполняется за 113 мин 10 сек, но при этом несколько повышается точность.

Полученные результаты показывают, что оценки без аналитического продолжения не работают при $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_1$. Методы *блуждания по шарам* (7) и *блуждания по шарам и сферам* (8) с использованием *аналитического продолжения решения* дают неплохие результаты даже при $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_1$ (например, при $\lambda = 15 + 15i$). С увеличением степени наблюдается сильный рост отношения стандартного отклонения к оцениваемому значению, поэтому увеличение количества членов ряда не приводит к улучшению оценок решения. Следовательно, для построения оценок при больших значениях параметра необходимо изменять алгоритмы для уменьшения дисперсии оценок или использовать многократное аналитическое продолжение по малому количеству членов ряда.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 08-01-00194-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Михайлов Г. А. Весовые алгоритмы статистического моделирования. — Новосибирск: ИВМиМГ СО РАН, 2003. — 185 с.
2. Кублановская В. Н. Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе / В сб.: *Работы по приближенному анализу* / Тр. МИАН СССР. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1959. — Т. 53. — С. 145–185.
3. Ермаков С. М., Некрутжин В. В., Сипин А. С. Случайные процессы для решения классических уравнений математической физики. — М.: Наука, 1984. — 208 с.
4. Ермаков С. М., Михайлов Г. А. Статистическое моделирование: 2-е изд., дополн. — М.: Наука, 1982. — 296 с.
5. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1967. — 436 с.

Таблица 5

Выборочная дисперсия оценки решения уравнения с использованием аналитического продолжения

n	(8), $c = 10$	(7)	(9)	(10)	ветвь.
$\lambda = 5 + 5i$					
3	0,5401	1,7720	6270,8	59,008	0,2705
4	0,6466	2,8980	$3 \cdot 10^5$	229,99	—
5	0,6839	3,9171	$1 \cdot 10^7$	1056,8	—
6	0,6783	4,2635	$6 \cdot 10^8$	10806	—
7	0,6538	4,2636	$2 \cdot 10^{10}$	20672	—
$\lambda = 9 + 9i$					
3	2,8526	12,550	90239	686,57	1,0584
4	7,6966	56,156	$1 \cdot 10^7$	9370,7	—
5	18,655	185,16	$2 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^5$	—
6	38,391	396,61	$4 \cdot 10^{11}$	$7 \cdot 10^6$	—
7	57,381	502,68	$5 \cdot 10^{13}$	$5 \cdot 10^7$	—
$\lambda = 10 + 10i$					
3	4,3827	19,970	$1 \cdot 10^5$	1132,4	1,623
4	14,552	112,10	$3 \cdot 10^7$	18843	—
5	44,185	509,09	$6 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^5$	—
6	111,44	1392,5	$1 \cdot 10^{12}$	$2 \cdot 10^7$	—
7	199,41	2458,7	$2 \cdot 10^{14}$	$2 \cdot 10^8$	—
$\lambda = 15 + 15i$					
3	24,496	124,03	$1 \cdot 10^6$	7939,7	10,314
4	150,18	1277,7	$4 \cdot 10^8$	$2 \cdot 10^5$	—
5	855,50	10488	$1 \cdot 10^{11}$	$1 \cdot 10^7$	—
6	3934,6	48173	$7 \cdot 10^{13}$	$1 \cdot 10^9$	—
7	12182	$1 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^{16}$	$2 \cdot 10^{10}$	—
$\lambda = 20 + 20i$					
3	80,491	421,7	$4 \cdot 10^6$	28524	37,057
4	678,16	5925,3	$2 \cdot 10^9$	$1 \cdot 10^6$	—
5	5296,7	65701	$9 \cdot 10^{11}$	$8 \cdot 10^7$	—
6	33022	$4 \cdot 10^5$	$6 \cdot 10^{14}$	$1 \cdot 10^{10}$	—
7	$1 \cdot 10^5$	$1 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^{17}$	$3 \cdot 10^{11}$	—

Поступила в редакцию 19/VII/2009;
в окончательном варианте — 16/VIII/2009.

MSC: 65C05, 35J05

STATISTICAL ESTIMATES FOR THE DEGREES OF GREEN OPERATOR

A. N. Kuznetsov, A. S. Sipin

Vologda State Pedagogical University,
6, S. Orlova str., Vologda, 160035.

E-mails: pm_kan@uni-vologda.ac.ru, cac@uni-vologda.ac.ru

In this paper we examine known and some new algorithms for calculation of degrees of Green operator using Monte Carlo methods. Statistical estimations used for solving Dirichlet problem for Helmholtz equation with complex parameter. The efficiency of numerical realization of these algorithms is also considered.

Key words: *Monte Carlo method, Helmholtz equation, analytical continuation, Green function, Green operator.*

Original article submitted 19/VII/2009;
revision submitted 16/VIII/2009.

Andrey N. Kuznetsov, Lecturer, Dept. of Applied Mathematics. *Aleksandr S. Sipin* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics.