Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Заусаев, Л. А. Соловьев, Применение метода регуляризации к дифференциальным уравнениям движения комет, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 288–292

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:02:46

Небесная механика и астрономия

УДК 523.642

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ
К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ДВИЖЕНИЯ КОМЕТ

А. Ф. Заусаев, Л. А. Соловьев

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: Zausaev_AF@mail.ru

Применен метод регуляризации к дифференциальным уравнениям движения комет. Проведено численное интегрирование уравнений движения десяти короткопериодических комет на интервале времени с 1800 по 2204 гг. с использованием оскулирующих элементов больших планет. Показана высокая эффективность данного метода для короткопериодических комет.

Ключевые слова: интерполяция, численное интегрирование, дифференциальные уравнения движения, метод оскулирующих элементов.

Дифференциальные уравнения движения кометы в гелиоцентрической системе координат с учётом релятивистских эффектов от Солнца имеют следующий вид [1]:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -k^2(1+m)\frac{X}{r^3} + \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \frac{k^2}{c^2} \left[(4-2\alpha)\frac{k^2}{r^4}X - (1+\alpha)\frac{\dot{r}^2}{r^3}X + 3\alpha\frac{(X\dot{X})^2}{r^5}X + (4-2\alpha)\frac{(X\dot{X})}{r^3}\dot{X} \right], \quad (1)$$

где X — матрица-столбец с элементами x, y, z ; X_i — матрица-столбец с элементами x_i, y_i, z_i ; m, x, y, z — масса и гелиоцентрические координаты возмущаемого тела; m_i, x_i, y_i, z_i — массы и гелиоцентрические координаты больших планет; r, Δ_i, r_i — расстояния, вычисляемые по следующим формулам: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2$, $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$; $\dot{X}$ — матрица-столбец с элементами $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$; k — постоянная Гаусса; c — скорость света; α — параметр, характеризующий выбор системы координат. Случай $\alpha = 1$ соответствует стандартным координатам, случай $\alpha = 0$ — гармоническим координатам.

Система дифференциальных уравнений (1) описывает движение n материальных точек в гелиоцентрической системе координат. Решение этой системы существенно упрощается, если известны координаты возмущающих тел, так как в этом случае вместо задачи n тел решается задача двух тел. Уравнения (1) сингулярны в начале координат. Для кометных орбит, имеющих большие эксцентриситеты, изменение расстояния от центрального тела приводит к неравномерному изменению правых частей дифференциальных уравнений (1). При численном интегрировании такая неравномерность требует постоянного изменения шага интегрирования, что приводит к потере точности вычислений. Преодолеть эти трудности можно путём преобразования сингулярных дифференциальных уравнений (1) в регулярные.

Анатолий Федорович Заусаев (д.ф.-м.н.), профессор, каф. прикладной математики и информатики. Леонид Александрович Соловьев, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Процедуру, позволяющую устранить в дифференциальных уравнениях движения сингулярность, называют регуляризацией. Регуляризацию выполняют в два этапа. Первый этап состоит в том, чтобы получить регулярные функции, описывающие движение, а также в устранении бесконечного возрастания скорости в точке соударения. Это достигается путём замены физического времени t на фиктивное время s , с помощью преобразования

$$\frac{dt}{ds} = r. \quad (2)$$

Если использовать фиктивное время в качестве независимой переменной, то уравнение движения (1) примет вид

$$rX'' - r'X' + k^2(1+m)X = r^3 \sum_i k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \frac{k^2}{c^2} \left[(4-2\alpha) \frac{k^2}{r} X - (1+\alpha) \frac{r'^2}{r^2} X + 3\alpha \frac{(XX')^2}{r^4} X + (4-2\alpha) \frac{(XX')}{r^2} X' \right], \quad (3)$$

где штрих указывает на дифференцирование по s .

В дифференциальные уравнения движения (3) входят координаты возмущающих планет x_i, y_i, z_i . Эффективность работы программы при решении уравнений (3) можно повысить путём использования банка данных координат больших планет.

При численном интегрировании уравнений движения (3) необходимо вычислять физическое время на каждом шаге интегрирования с той же точностью, с которой вычисляются координаты возмущаемого тела. Выполнения данного требования можно достичь следующим образом. Продифференцировав уравнение (2) по s , получим:

$$t'' = r'. \quad (4)$$

Совместным решением уравнений (3) и (4) можно получить требуемую точность для физического времени по известному фиктивному времени.

Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений (3) и (4) для десяти короткопериодических комет проводилось методом Эверхарта 27-го порядка с использованием банка данных оскулирующих элементов больших планет [3]. Интегрирование уравнений движения проводилось двумя методами. В первом случае решались уравнения движения, полученные в работе [4], в которых учтены как гравитационные, так и релятивистские эффекты. Данные об эволюции орбит этих комет содержатся в работе [5]. Во втором случае численное интегрирование уравнений (3) и (4) проводилось с учётом первого этапа регуляризации с использованием оскулирующих элементов.

В табл. 1, 2 приведены элементы орбит, полученные в результате интегрирования первым и вторым способом, обозначены соответственно «Совм. интегр.» и «Регул. интегр.»; ΔS — абсолютная величина разности в значениях орбитальных элементов, полученных первым и вторым методами. Начальные данные элементов орбит комет взяты из каталога [5].

Как видно из табл. 1 и 2, максимальные расхождения в элементах кометных орбит для всех 10 комет в обоих методах на конце интервала интегрирования незначительны. При этом в угловых элементах максимальное расхождение наблюдается в средней аномалии у кометы D/Biela ($0,0057^\circ$), а отличия в остальных элементах орбит не превышают точности оптических наблюдений. Так как оба метода дают незначительные расхождения в элементах орбит, то это позволяет считать, что метод регуляризации с использованием оскулирующих элементов можно применять для исследования эволюции орбит короткопериодических комет на интервале времени с 1800 по 2204 гг.

Таблица 1

Элементы орбит комет, полученные совместным интегрированием уравнений движения, а также с учётом регуляризации (T = 1800 01 05)

	M	a	e	ω	Ω	i
P/Halley						
Совм. интегр.	191,4946	18,052023	0,968665	111,3587	58,0169	162,2889
Регул. интегр.	191,4944	18,052032	0,968665	111,3586	58,0168	162,2889
ΔS	0,0002	9,00E-06	0	1,00E-04	1,00E-04	0
P/Encke						
Совм. интегр.	60,5893	2,216543	0,845846	182,3158	337,1369	13,567
Регул. интегр.	60,5894	2,216543	0,845846	182,3158	337,1369	13,567
ΔS	0,0001	0	0	0	0	0
D/Biela						
Совм. интегр.	37,7136	3,559049	0,746668	217,8642	254,2752	13,6419
Регул. интегр.	37,7135	3,559049	0,746668	217,8642	254,2752	13,6419
ΔS	1,00E-04	0	0	0	0	0
P/Faye						
Совм. интегр.	73,4076	3,866193	0,556092	191,2737	226,7653	7,3485
Регул. интегр.	73,4029	3,866174	0,556095	191,2729	226,7657	7,3483
ΔS	0,0047	0,000019	3,00E-06	8,00E-04	4,00E-04	2,00E-04
D/Brorsen						
Совм. интегр.	63,0994	3,027727	0,733766	7,5765	106,8219	45,287
Регул. интегр.	63,09939	3,027759	0,733772	7,5767	106,8219	45,2868
ΔS	1,00E-05	3,20E-05	6,00E-06	0,0002	0	0,0002
P/d'Arrest						
Совм. интегр.	37,2982	3,413185	0,669816	170,2287	153,3499	13,0505
Регул. интегр.	37,2989	3,413184	0,669816	170,2285	153,35	13,0505
ΔS	0,0007	1,00E-06	0	0,0002	0,0001	0
P/Pons-Winnecke						
Совм. интегр.	208,1477	3,337746	0,72313	5,6173	268,8229	2,6807
Регул. интегр.	208,1477	3,337746	0,72313	5,6169	268,8235	2,6808
ΔS	0	0	0	0,0004	0,0006	1,00E-04
P/Tuttle						
Совм. интегр.	260,0457	5,748858	0,819734	206,8318	271,662	54,3911
Регул. интегр.	260,0452	5,748858	0,819734	206,8318	271,662	54,3911
ΔS	0,0005	0	0	0	0	0
P/Tempel 1						
Совм. интегр.	280,1281	3,128444	0,524341	131,945	105,2602	6,2927
Регул. интегр.	280,1292	3,128442	0,524342	131,9436	105,2616	6,2925
ΔS	0,001	2,00E-06	1,00E-06	0,0014	0,0014	0,0002
P/Tempel 2						
Совм. интегр.	86,4843	3,023543	0,546203	178,2391	125,7648	12,4545
Регул. интегр.	86,4834	3,023543	0,546202	178,2392	125,7648	12,4545
ΔS	0,0009	0	1,00E-06	0,0001	0	0

Таблица 2

Элементы орбит комет, полученные совместным интегрированием уравнений движения, а также с учётом регуляризации (T = 2204 12 13)

	M	a	e	ω	Ω	i
P/Halley						
Совм. интегр.	340,7337	17,82704	0,967167	115,0549	62,4152	161,7191
Регул. интегр.	340,737	17,82697	0,967167	115,055	62,4152	161,7191
ΔS	0,0033	7,00E-05	0	0,0001	0	0
P/Encke						
Совм. интегр.	316,0063	2,221484	0,847531	192,2903	330,3659	9,2604
Регул. интегр.	316,0035	2,221485	0,847531	192,2903	330,3659	9,2604
ΔS	0,0028	1,00E-06	0	0	0	0
D/Biela						
Совм. интегр.	155,9316	3,527373	0,763495	326,0849	139,6366	14,611
Регул. интегр.	155,9259	3,527377	0,763496	326,0847	139,6368	14,6105
ΔS	0,0057	4,00E-06	1,00E-06	0,0002	0,0002	0,0005
P/Faye						
Совм. интегр.	281,7301	3,71421	0,610773	220,5747	167,8499	5,098
Регул. интегр.	281,7299	3,714211	0,610772	220,5747	167,85	5,098
ΔS	0,0003	1,00E-06	1,00E-06	0	0,0001	0
D/Brorsen						
Совм. интегр.	41,2152	3,073071	0,863266	73,7416	39,4331	6,7586
Регул. интегр.	41,2165	3,073068	0,863267	73,7376	39,4371	6,7588
ΔS	0,0013	3,00E-06	1,00E-06	0,004	0,004	0,0002
P/d'Arrest						
Совм. интегр.	81,8749	3,789775	0,492992	169,5791	128,5464	23,3064
Регул. интегр.	81,8754	3,789774	0,492993	169,5791	128,5465	23,3063
ΔS	0,0005	1,00E-06	1,00E-06	0	0,0001	0,0001
P/Pons-Winnecke						
Совм. интегр.	305,1878	3,366807	0,672255	193,3037	79,3204	18,0484
Регул. интегр.	305,1877	3,366807	0,672255	193,3037	79,3204	18,0484
ΔS	0,0001	0	0	0	0	0
P/Tuttle						
Совм. интегр.	146,0471	5,698912	0,822694	207,7192	269,2077	55,0828
Регул. интегр.	146,0471	5,698912	0,822694	207,7192	269,2077	55,0828
ΔS	0	0	0	0	0	0
P/Tempel 1						
Совм. интегр.	274,3968	3,223767	0,498254	200,3509	56,1666	8,2521
Регул. интегр.	274,3972	3,223768	0,498253	200,351	56,1665	8,2521
ΔS	0,0004	1,00E-06	1,00E-06	0,0001	0,0001	0
P/Tempel 2						
Совм. интегр.	2,8662	3,027102	0,569752	217,0771	102,824	8,8981
Регул. интегр.	2,8647	3,027103	0,569751	217,0773	102,8239	8,898
ΔS	0,0015	1,00E-06	1,00E-06	0,0002	0,0001	0,0001

Следует также отметить, что по быстрдействию метод регуляризации с использованием оскулирующих элементов почти в 5 раз превосходит метод совместного интегрирования.

На основании выше изложенного можно сделать вывод, что при исследовании эволюции орбит как короткопериодических, так и долгопериодических комет с большими эксцентриситетами предпочтительнее проводить решение уравнений (3) и (4) с использованием оскулирующих элементов по сравнению с методом совместного интегрирования.

Работа выполнена в рамках АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы (2009–2010)» (проект РНП 2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Брумберг В. А. Релятивистская небесная механика. — М.: Наука, 1972. — 382 с.
2. Штифель Е., Шейфеле Г. Линейная и регулярная небесная механика. — М.: Наука, 1975. — 304 с.
3. Заусаев А. Ф., Заусаев Д. А. Численное интегрирование уравнений движения малых тел Солнечной системы с использованием оскулирующих элементов больших планет / В сб.: Труды Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием (1–4 июня 2009 г.). Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 125–130.
4. Newhall X. X., Standish E. M., Williams J. G. DE 102 — A numerically integrated ephemeris of the moon and planets spanning forty-four centuries // *Astron. Astrophys.*, 1983. — Vol. 125, No. 1. — P. 150–167.
5. Заусаев А. Ф., Заусаев А. А. Каталог орбитальной эволюции короткопериодических комет с 1800 по 2204 гг. — М.: Машиностроение-1, 2007. — 410 с.

Поступила в редакцию 20/VII.2009;
в окончательном варианте — 10/IX/2009.

MSC: 70F15, 70-08

APPLICATION OF THE REGULARIZATION METHOD TO DIFFERENTIAL EQUATIONS OF COMETS' MOTION

A. F. Zausaev, L. A. Solov'ev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: Zausaev_AF@mail.ru

Regularization method for differential equation of comets' motion is used. Numerical integration of the equation of motion of 10 short-period comets during the period of 1800 to 2204 with the use of osculating elements of the large planets is done. The high efficiency of this method for short-period comets study is demonstrated. efficiency of this method for short-period comets is shown.

Key words: numerical integration, differential equation of motion, method of the osculation elements.

Original article submitted 20/VII.2009;
revision submitted 10/IX/2009.

Anatoliy F. Zausaev (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Leonid A. Solov'ev*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.