Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Радченко, Е. А. Андреева, О дрейфе и эффекте памяти нелинейно-упругой деформации вследствие ползучести для микронеоднородных материалов в условиях одноосного напряженного состояния, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 72–77

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu712>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 17:22:48

УДК 539.376

О ДРЕЙФЕ И ЭФФЕКТЕ ПАМЯТИ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ ВСЛЕДСТВИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ ДЛЯ МИКРОНЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ В УСЛОВИЯХ ОДНООСНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

В. П. Радченко, Е. А. Андреева

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: radch@samgtu.ru, andrejeva@kg.ru

Исследовано явление дрейфа нелинейно-упругой деформации вследствие ползучести в условиях одноосного напряжённого состояния на основании структурной модели типа обобщённой двухзвенной модели Максвелла. На модельном материале показано, что весь спектр диаграмм упругого деформирования расположен между двумя стационарными состояниями: диаграммой при $t = 0$ и диаграммой, соответствующей стадии установившейся ползучести, при этом мгновенно-упругая деформация проявляет одновременно свойства механической памяти и вязкоупругости. Выполнен ряд модельных расчётов, иллюстрирующих исследуемый эффект.

Ключевые слова: нелинейно-упругий материал, ползучесть, обобщённая модель Максвелла, эффект механической памяти, дрейф упругой деформации.

1. Постановка задачи. Подавляющее большинство конструкционных и природных материалов обладают свойствами линейной упругости. На уровне механики сплошных сред общая деформация таких сред является аддитивной составляющей упругой и неупругой компонент деформации. Однако для ряда природных биокomпозитных материалов (например, костной ткани), обладающих свойством нелинейной упругости, наблюдается эффект влияния деформации ползучести на мгновенно-упругую деформацию, которая испытывает дрейф при выдержках под нагрузкой. Так, в работах [1, 2] при экспериментальном исследовании одноосной ползучести природного биокomпозитного материала (костной ткани) установлено, что мгновенно-упругая деформация этого материала при нагрузке e^H при $t \rightarrow 0 + 0$ и полной разгрузке после ползучести при действии постоянного напряжения e^P существенно отличаются друг от друга, причём может выполняться как соотношение $e^P > e^H$ [2], так и $e^P < e^H$ [1], т.е. наблюдается эффект влияния деформации ползучести на мгновенно-упругую деформацию, при этом материал костной ткани является нелинейно-упругим.

Теоретических работ, посвященных описанию указанного эффекта, имеется незначительное число. Впервые на возможность дрейфа упругой деформации вследствие деформации ползучести было указано Ю.П. Самаринным в работе [3], в которой развивался один из вариантов кинетических уравнений ползучести с позиций теории управления, однако в этой работе не детализированы условия (с точки зрения механики деформируемого твёрдого тела),

Владимир Павлович Радченко (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. прикладной математики и информатики. Елена Анатольевна Андреева, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

приводящие к отмеченному эффекту.

В работах [4, 5] теоретически сделаны попытки исследования в данном направлении для частного вида задач и показано, что эффект влияния ползучести на мгновенно-упругую деформацию наблюдается у слоистых композитов [4] и композитных микронеоднородных сред [5] лишь в случае нелинейного закона упругости хотя бы одной из фаз композита.

Систематический анализ этого явления для одноосного напряженного состояния на основании структурной модели микронеоднородной среды типа обобщенной двухэлементной нелинейной модели Максвелла с нелинейными упругими и вязкими элементами был выполнен в работах [6, 7]. Основным результатом этих исследований сформулирован в виде двух следующих утверждений.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Если локальные элементы двухэлементной обобщенной модели типа Максвелла удовлетворяют линейному закону упругости, то упругая деформация на макроуровне не зависит от деформации ползучести.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Если хотя бы один локальный элемент двухэлементной обобщенной модели следует нелинейному закону упругости, то упругая макродеформация зависит от накопленной деформации ползучести.*

Более детализированное исследование рассматриваемого эффекта для одноосного напряженного состояния на основе двухэлементной модели типа Максвелла, элементы которой наделены свойствами нелинейной (в общем случае) упругости и нелинейной вязкости вида

$$\varepsilon_i = e_i(t) + p_i(t), \quad (1)$$

$$e_1 = \frac{\sigma_1}{E_1}, \quad e_2 = \frac{\sigma_2 |\sigma_2|^{n-1}}{E_2}, \quad \dot{p}_i = a_i \sigma_i |\sigma_i|^{m_i-1} \quad (i \equiv 1, 2), \quad (2)$$

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \langle \varepsilon(t) \rangle, \quad (3)$$

где ε_i , e_i , p_i — соответственно полные, упругие и реологические деформации (микродоформации) в каждом из двух звеньев обобщенной модели Максвелла; $\langle \varepsilon \rangle$ — макродеформация; n , E_i , m_i , a_i — параметры структурной модели; σ_i — напряжения в элементах модели (микронапряжения), связанные с макронапряжением $\langle \sigma \rangle$ соотношением

$$\alpha \sigma_1(t) + (1 - \alpha) \sigma_2(t) = \sigma(t), \quad (4)$$

где α — «вес» первого звена структурной модели, привело авторов [6, 7] к следующему утверждению.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Если $p_1^* < p_2^*$, где $p_i^* = p_i(t^*)$ ($i \equiv 1, 2$) — величины деформации ползучести в локальных элементах модели, накопленные к моменту разгрузки образца при $t = t^*$, то при $n > 1$ для мгновенно-упругой деформации образца при нагрузке e^n и разгрузке e^p после ползучести при действии постоянного напряжения выполняется неравенство $e^n > e^p$, при $0 < n < 1$ — неравенство $e^n < e^p$, а при $n = 1$ — $e^n = e^p$.*

Естественным шагом в анализе эффекта влияния ползучести на упругую деформацию является исследование характера кривой упругого деформирования в координатах $\langle e \rangle - \langle \sigma \rangle$, где $\langle e \rangle$ — упругая макродеформация, в зависимости от параметров модели (1)–(4) и длительности выдержек образца под нагрузкой.

2. Результаты численного расчёта и анализ результатов. Численный анализ модели (1)–(4) выполнялся для режима «нагрузка – разгрузка» ($\langle\sigma\rangle = \sigma_0 = \text{const}$, $t \in [0, t^*]$; $\langle\sigma\rangle = 0$, $t > t^*$; t^* — время разгрузки). Расчёт одноосной ползучести по (1)–(4) осуществлялся известным методом: «шагами по времени», при этом выполнялась дискретизация области времени точками $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < \dots$, и на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ напряженное состояние в процессе ползучести полагалось постоянным, а в конце интервала при $t = t_{i+1}$ происходит упругая догрузка напряжений $\sigma_i = \sigma_i(t)$ в элементах модели в соответствии с уравнениями равновесия (4) и совместности деформаций (3).

Результаты модельных расчётов позволили выявить 3 типичных сценария кинетики диаграмм упругого деформирования вследствие ползучести, которые представлены на рис. 1–3. Значения параметров модели (1)–(4), соответствующие этим трём вариантам, приведены в таблице. Проанализируем подробно каждый из вариантов.

Параметры модели для варианта № 1 соответствуют случаю нелинейной ползучести костной ткани [7]. Здесь осуществляется расчёт при напряжении $\langle\sigma\rangle = 90$ МПа ($t \in [0, 400]$ мин) и последующей разгрузке образца в течение $t \in [400, 1000]$ мин. На рис. 4 приведена расчётная кривая ползучести $\langle\varepsilon\rangle = \langle\varepsilon(t)\rangle$ при данном режиме нагружения, а на рис. 1 показаны диаграммы мгновенно-упругого деформирования образца в процессе ползучести в различные моменты времени.

Параметры модели	№ варианта		
	1	2	3
E_1 , МПа	$3,72 \cdot 10^4$	9 350	9 500
E_2 , (МПа) ⁿ	$2,628 \cdot 10^5$	6 000	6 000
n	1,82	0,5	0,5
m_1	1	2	1
m_2	8,82	1	3
a_1 , (мин) ⁻¹ (МПа) ^{-m₁}	$7,87 \cdot 10^{-7}$	$4,96 \cdot 10^{-6}$	$1,24 \cdot 10^{-8}$
a_2 , (мин) ⁻¹ (МПа) ^{-m₂}	$7,475 \cdot 10^{-23}$	$1,24 \cdot 10^{-8}$	$4,96 \cdot 10^{-6}$
α	2/9	2/9	2/9

В начальный момент приложения нагрузки $\langle\sigma\rangle = 90$ МПа, когда деформация ползучести в элементах модели $p_1 = p_2 = 0$, имеем исходную диаграмму мгновенно-упругого деформирования (цифра 1 на рис. 1), и нагружение идёт по пути OA . Далее в течение $t = 400$ мин идёт накопление деформации ползучести p_1 и p_2 в элементах модели и одновременно происходит изменение (увеличение) значения упругой деформации при постоянном напряжении $\langle\sigma\rangle = 90$ МПа (участок AB на рис. 4). При разгрузке образца в момент $t = 400$ мин диаграмма упругого деформирования будет уже другой (участок BO на рис. 1). В процессе разгрузки ($\langle\sigma\rangle = 0$ при $t \in [400; 1000]$) происходит релаксация напряжений в элементах модели и изменение величин p_1 и p_2 . И если теперь произвести нагрузку образца, например, в момент $t = 500$ мин, то диаграмма упругого деформирования будет иметь вид кривой OC (рис. 1), а при $t = 600$ мин — вид кривой OD . По мере увеличения времени после разгрузки диаграммы упругого деформирования медленно дрейфуют от кривой 2, соответствующей асимптотическому состоянию структурной модели (стадии установившейся ползучести), к исходной кривой 1 (см. рис. 1).

Рис. 1. Диаграммы мгновенно-упругого деформирования образца в различные моменты времени (вариант № 1): 1 – $t = 0$; 2 – $t = 400$; 3 – $t = 500$; 4 – $t = 600$; 5 – $t = 800$ мин

Рис. 2. Диаграммы мгновенно-упругого деформирования образца в различные моменты времени (вариант № 2): 1 – $t = 0$; 2 – $t = 400$; 3 – $t = 420$; 4 – $t = 500$; 5 – $t = 800$ мин

Рис. 3. Диаграммы мгновенно-упругого деформирования образца в различные моменты времени (вариант № 3): 1 – $t = 0$; 2 – $t = 400$; 3 – $t = 410$; 4 – $t = 500$; 5 – $t = 1000$ мин.

Рис. 4. Расчётная кривая ползучести для модельного материала (вариант № 1) в режиме «нагрузка – разгрузка» при $\langle \sigma \rangle = 90$ МПа

Так, кривая 5 на рис. 1, соответствующая времени $t = 800$ мин, практически совпадает с диаграммой при $t = 0$. В пределе при $t \rightarrow \infty$ остаточные напряжения в процессе разгрузки релаксируют полностью, и происходит полное восстановление первоначальных упругих свойств материала.

Аналогичные результаты получены и для вариантов № 2 и № 3, в которых производится расчёт при напряжениях $\langle \sigma \rangle = 55$ МПа и $\langle \sigma \rangle = 70$ МПа в течение $t \in [0; 400]$ мин с последующей разгрузкой при $t \in [400; 1000]$ мин (см. рис. 2 и рис. 3), при этом характер «выпуклости – вогнутости» диаграмм $\langle \sigma \rangle - \langle e \rangle$ качественно отличается от соответствующих диаграмм на рис. 1.

3. Выводы. Выполненные исследования позволяют сделать следующие выводы:

- 1) для нелинейно-упругих материалов происходит медленный дрейф диаграммы упругого деформирования $\langle e \rangle - \langle \sigma \rangle$ вследствие ползучести, при этом весь спектр диаграмм расположен между двумя стационарными состояниями, а именно диаграммой при $t = 0$ и диаграммой, соответствующей асимптотическому состоянию структурной модели под нагрузкой при $t \rightarrow \infty$ (стадии установившейся ползучести);
- 2) в процессе дрейфа мгновенно-упругая деформация проявляет свойства механической памяти, поскольку в процессе разгрузки образца (при $t \rightarrow \infty$) происходит полное восстановление первоначальных упругих свойств, а также вязкоупругости, поскольку мгновенно-упругая деформация неявно (через накопленную деформацию ползучести) зависит от времени.

Таким образом, при ползучести образцов из нелинейно-упругого материала в течении некоторого интервала времени при постоянном напряжении наблюдаются своеобразные «гистерезисные петли» на диаграмме упругого деформирования $\langle e \rangle - \langle \sigma \rangle$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00478-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кнетс И. В., Вилкс Ю. К. Ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // *Механика полимеров*, 1975. — Т. 11, № 4. — С. 634–638.
2. Мелнис А. Э., Лайзан Я. Б. Нелинейная ползучесть компактной костной ткани человека при растяжении // *Механика полимеров*, 1978. — Т. 14, № 1. — С. 97–100.
3. Самарин Ю. П. О применении теории управления к исследованию ползучести конструкций / В сб.: *Механика деформируемых сред*. — Куйбышев: Изд-во Куйбышев. ун-та, 1976. — С. 123–129.
4. Радченко В. П., Самарин Ю. П. Влияние ползучести на величину упругой деформации слоистого композита // *Механика композитных материалов*, 1983. — Т. 19, № 2. — С. 231–237.
5. Радченко В. П. Об одной структурной реологической модели нелинейно-упругого материала // *Прикладная механика*, 1990. — Т. 26, № 6. — С. 67–74.
6. Радченко В. П., Шапиевский Д. В. О дрейфе упругой деформации для нелинейно-упругих материалов вследствие ползучести // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2006. — № 43. — С. 99–106.
7. Радченко В. П., Шапиевский Д. В. Математическая модель ползучести микронеоднородного нелинейно-упругого материала // *ПМТФ*, 2008. — Т. 49, № 3. — С. 157–163.

Поступила в редакцию 20/VII/2009;
в окончательном варианте — 18/X/2009.

MSC: 74E35, 74B20, 74A20

ON DRIFT AND MEMORY EFFECT OF NONLINEAR ELASTIC STRAIN ARISING DUE TO CREEP FOR MICRONON-UNIFORM MATERIALS IN CONDITIONS OF LINEAR STRESS

V. P. Radchenko, E. A. Andreeva

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mails: radch@samgtu.ru, andreyeva@kg.ru

The drift phenomenon of nonlinear elastic strain arising due to creep in conditions of linear stress on the basis of structural model of Maxvilles generalized two-tier model type is studied. On the basis of modeling material it is demonstrated that is the whole spectrum of diagrams of elastic strain is located between two stationary conditions: the diagram at $t = 0$ and the diagram corresponding to the stage of established creep, thus instantly-elastic deformation shows simultaneously the properties of mechanical memory and viscoelasticity. The modeling calculations illustrating the effect investigated is executed.

Key words: *nonlinear materials, creep, Maxville's generic model, mechanical memory effect, elastic strain drift.*

Original article submitted 20/VII/2009;
revision submitted 18/X/2009.

Vladimir P. Radchenko (Dr. Sci (Phis. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Elena A. Andreeva*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.