Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Свиридчук, А. С. Шипилов, Устойчивость решений линейных уравнений
Осколкова на геометрическом графе, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-
мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 9–16

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu726>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.205.19.152

26 апреля 2023 г., 14:25:42

Дифференциальные уравнения

УДК 517.957

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОСКОЛКОВА НА ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ГРАФЕ

Г. А. Свиридюк, А. С. Шипилов

Южно-Уральский государственный университет,
454080 Челябинск, пр. Ленина, 76.

E-mails: ridyu@susu.ac.ru, shipilov@susu.ac.ru

Изучена устойчивость и неустойчивость стационарных решений линейных уравнений Осколкова $\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \nu u_{jxx}$ на геометрическом графе в зависимости от параметра $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ключевые слова: уравнения Осколкова, геометрический граф, экспоненциальные дихотомии, фазовое пространство.

Введение. Система уравнений Осколкова [1]

$$(\lambda - \nabla^2)v_t = \nu \nabla^2 v - (v \cdot \nabla)v - \nabla p, \quad \nabla \cdot v = 0 \quad (1)$$

моделирует динамику скорости $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $v_k = v_k(x, t)$, $k \equiv 1, 2, \dots, n$, и давления $p = p(x, t)$ вязкоупругой несжимаемой жидкости. Прообразом такой жидкости служат высокопарафиновые сорта нефти, добываемые, в частности, на месторождениях Западной Сибири. Здесь параметры $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ характеризуют вязкие и упругие свойства жидкости, причем экспериментально замечено [2], что параметр λ может принимать отрицательные значения. Далее, $x \in \Omega$, $\Omega \in \mathbb{R}^n$ — область пространства $\mathbb{R}^n$, $n > 2$, $t \in \mathbb{R}$. Фазовое пространство однородной задачи Дирихле для уравнений (1) с разных точек зрения описано в [3, 4]. Фазовое пространство задачи Бенара для двумерного аналога (1) — уравнения Осколкова — описано в [5]. Фазовое пространство задачи Дирихле для одномерного аналога системы (1) [6]

$$\lambda \varphi_t - \varphi_{txx} = \nu \varphi_{xx} - \varphi_x \varphi, \quad (2)$$

заданного на интервале, описано в [7]. Здесь параметры λ и ν те же, что и в (1), но искомая функция $\varphi = \varphi(x, t)$ уже отвечает не скорости, как в [1], а является функцией тока, как в [7]. Мы рассматриваем устойчивость решений линейных уравнений (2), заданных на геометрическом графе. С учётом вышеизложенного в статье изучается устойчивость в линейном приближении модели транспортировки нефти по трубопроводу.

Георгий Анатольевич Свиридюк (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. уравнений математической физики. *Александр Сергеевич Шипилов*, аспирант, каф. уравнений математической физики.

Итак, пусть $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$ — конечный связный ориентированный граф, где $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ — множество ребер. Каждому ребру поставим в соответствие два числа $l_j, d_j \in \mathbb{R}_+$, обозначающие длину и площадь поперечного сечения ребра E_j соответственно. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим уравнения

$$\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \nu u_{jxx}, \quad \text{для всех } x \in (0, l_j), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Данные уравнения относятся к обширному классу уравнений соболевского типа, исследования которых в настоящее время переживают пору бурного расцвета. Уравнения, не разрешенные относительно выделенной производной, впервые появились в работе А. Пуанкаре в 1885 г. Однако начало систематических исследований таких уравнений было положено в работах С. Л. Соболева, выполненных в 40-х гг. прошлого века. К настоящему времени насчитывается более двух десятков монографий, полностью или частично посвященных уравнениям соболевского типа, а также сотни оригинальных статей.

Дифференциальные уравнения на графах — сравнительно новая часть математического знания. Первые публикации в этой области появились в последнее десятилетие прошлого века, первая монография в 2004 г. [8]. Уравнения соболевского типа на графах впервые были рассмотрены в 2002 г. [9]; первое диссертационное исследование в этом направлении было выполнено в 2002–2005 гг. [10].

Для уравнений (3) в каждой вершине графа зададим условия

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \quad (4)$$

$$u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \quad (5)$$

где $E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), E_m, E_n \in E^\omega(V_i), t \in \mathbb{R}$. Здесь через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество ребер с началом (концом) в вершине V_i . Условие (4) обозначает, что поток через каждую вершину должен равняться нулю, а условие (5) — что решение $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$ в каждой вершине должно быть непрерывным. В частном случае, когда граф $\mathbf{G}$ состоит из одного ребра и двух вершин, условие (5) исчезает, а условие (4) превращается в однородное условие Неймана.

Наш подход заключается в редукции задачи (3)–(5) к абстрактному линейному однородному уравнению соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu \quad (6)$$

и применении затем методов теории относительно p -ограниченных операторов [11, гл. 5].

Нашей целью является изучение устойчивости стационарных решений задачи (3)–(4). Заметим, что аналогичная задача была рассмотрена ранее [12]. Уравнения, рассмотренные там, отличаются от (3) слагаемым $-\beta u_j$, $\beta \in \mathbb{R}_+$, в правой части. При редукции задачи (4), (5) для таких уравнений к (6) оказалось, что L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M не содержит точку нуль. Это обстоятельство делает возможным применение результатов об экспоненциальных

дихотомиях решений уравнения (6) [11, гл. 5]. В нашем случае $0 \in \sigma^L(M)$, однако возможно использование результатов [11, гл. 6].

Статья, кроме вводной части и списка литературы, состоит из трёх параграфов. В первом рассмотрена задача Штурма—Лиувилля на графе $\mathbf{G}$ с условиями (4), (5). Заметим, что наш подход имеет мало общего с результатами [8, гл. 5]. Заметим ещё, что более общая задача Штурма—Лиувилля рассмотрена в [13]. В п. 2 дана морфология фазового пространства задачи (3)–(5) и описан общий вид решения. В п. 3 содержатся результаты об устойчивости и неустойчивости стационарных решений задачи (3)–(5). Список литературы не претендует на полноту и отражает лишь вкусы и пристрастия авторов.

1. Задача Штурма—Лиувилля на графе. На графе $\mathbf{G}$ рассмотрим уравнения

$$u_{jxx} = \lambda u_j, \quad (7)$$

причём считаем, что их решения удовлетворяют условиям (4), (5). Для изучения задачи (7), (4), (5) введем в рассмотрение множество $L_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_i, \dots) : g_i \in L_2(0, l_j)\}$ и $\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j) \text{ и выполнено (4)}\}$. Множество $L_2(\mathbf{G})$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx,$$

а множество $\mathfrak{U}$ является банаховым пространством с нормой

$$\|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева, пространство $W_2^1(0, l_j)$ (с точностью до меры нуль) состоит из абсолютно непрерывных функций, а значит пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, плотно и компактно вложено в $L_2(\mathbf{G})$. отождествим $L_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным, а через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряжённое относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространство к $\mathfrak{U}$. Очевидно, $\mathfrak{F}$ — банахово пространство, причём вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно.

Формулой

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + \lambda u_j v_j) dx$$

определим оператор $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$. Поскольку

$$c_1 \|u\|_{\mathfrak{U}}^2 \leq \langle Au, u \rangle \leq c_2 \|u\|_{\mathfrak{U}}^2$$

при всех $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $u \in \mathfrak{U}$ и в некоторых $c_k \in \mathbb{R}_+$, $k \equiv 1, 2$, то линейный оператор $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ биективен и непрерывен. Отсюда по теореме Банаха следует существование оператора $A^{-1} : \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{U}$. Поскольку вложение $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathfrak{F}$ компактно, то оператор $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F})$ является компактным. Значит, спектр оператора A вещественен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Фиксируем $\lambda \in \mathbb{R}$ и построим оператор $B = A - \lambda \mathbb{I}$. Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1.1. Оператор $B \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причём спектр $\sigma(B)$ оператора B неотрицателен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$.

Заметим, что первое собственное значение оператора B равно нулю, и это значение однократно. Действительно,

$$\langle Bu, u \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{jx}^2 dx \geq 0$$

при всех $u \in \mathfrak{U}$ и равно нулю для таких $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$, что $u_1 = u_2 = \dots = u_j = \dots = \text{const}$. Введём в рассмотрение нормированную в смысле $L_2(\mathbf{G})$ собственную функцию оператора B

$$\varphi_1 = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-\frac{1}{2}} (1, 1, \dots, 1, \dots),$$

отвечающую первому (нулевому) собственному значению. Через $\{\lambda_k\}_{k=2}^\infty$ обозначим семейство остальных собственных значений оператора B , занумерованное по неубыванию с учетом их кратности; а через $\{\varphi_k\}_{k=2}^\infty$ обозначим соответствующие ортонормированные в смысле $L_2(\mathbf{G})$ собственные функции. Заметим, что линейная оболочка $\text{span}\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ плотна в $\mathfrak{U}$, $L_2(\mathbf{G})$ и $\mathfrak{F}$.

2. Морфология фазового пространства. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим абстрактное уравнение соболевского типа

$$Li = Mi. \quad (8)$$

Вектор-функцию $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U})$ назовём *решением уравнения* (8), если она обращает его в тождество. Решение $u = u(t)$ уравнения (8) назовём *решением задачи Коши*

$$u(0) = u_0, \quad (9)$$

если оно удовлетворяет (9).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством* уравнения (8), если

- (i) любое решение $u = u(t)$ уравнения (8) лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т.е. $u(t) \in \mathfrak{P}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;
- (ii) при любых $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (8), (9).

Пусть далее пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ такие, как в п.1. Введем в рассмотрение операторы $L = \lambda \mathbb{I} + B$ (здесь $\mathbb{I} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$ оператор вложения) и $M = -\nu B$. Очевидно, $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$ при всех $\lambda, \nu \in \mathbb{R}$. Справедлива [8]

ЛЕММА 2.1. При всех $\lambda, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$ -ограничен.

Из леммы 2.1 следует, что мы редуцировали задачу (3)–(5) к уравнению (8), и потому можем воспользоваться результатами [11, гл. 4].

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, тогда фазовым пространством уравнения (8) является

$$\mathfrak{P} = \begin{cases} \mathfrak{U}, & \text{если } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty; \\ \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_k \rangle = 0, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}, & \text{если } \lambda = -\lambda_k. \end{cases}$$

Доказательства леммы 2.1 и теоремы 2.1 можно посмотреть, например, в [10].

Из п. 1 и теоремы 2.1 следует, во-первых, что $\ker B = \text{span}\{\varphi_1\}$, а во-вторых, что подпространство $\ker B$ содержится в $\mathfrak{P}$. Положим $\mathfrak{P}^\perp = \{u \in \mathfrak{P} : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}$. Пусть $u_0 \in \mathfrak{P}$, представим $u_0 = u_0^\perp + a\varphi_1$, где $u_0^\perp \in \mathfrak{P}^\perp$, а $\varphi_1 \in \ker B$, $a \in \mathbb{R}$.

СЛЕДСТВИЕ. При любых $\lambda, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $u_0 \in \mathfrak{P}$ единственное решение $u = u(t)$ задачи (8), (9) имеет вид $u(t) = u^\perp(t) + a\varphi_1$, где $u^\perp = u^\perp(t)$ есть решение задачи

$$L\dot{u}^\perp = Mu^\perp, \quad u^\perp(0) = u_0^\perp = u_0 - a\varphi_1. \quad (10)$$

Доказательство ввиду его простоты опускается.

Рассмотрим теперь случай $\lambda = 0$, $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Здесь оператор M уже не будет $(L, 0)$ -ограниченным, так как $\ker L = \ker M = \ker B \neq \{0\}$. Значит, мы не можем применить результаты [11, гл. 4]. Однако и в этом случае удастся полностью изучить задачу (8), (9). Введём в рассмотрение множество $\mathfrak{U}^\perp = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}$. Возьмём $u_0 \in \mathfrak{U}$ и представим в виде $u_0 = u_0^\perp + a_0\varphi_1$, где $a_0 \in \mathbb{R}$.

ТЕОРЕМА 2.2. Пусть $\lambda = 0$ и $\nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{U}$ существует решение $u = u(t)$ задачи (8), (9), которое к тому же имеет вид $u(t) = u^\perp(t) + a(t)\varphi_1$, где $u^\perp = u^\perp(t)$ — единственное решение задачи (10), а $a = a(t)$ — произвольная достаточно гладкая функция, такая, что $a(0) = a_0$.

Остальные случаи ($\lambda = \nu = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\nu = 0$) менее интересны и поэтому опускаются.

3. Устойчивость и неустойчивость решений. Пусть $\mathfrak{U}, \mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$. Рассмотрим уравнение (8), и пусть $\mathfrak{P}$ — его фазовое пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Множество $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{P}$ называется *инвариантным пространством уравнения* (8), если для любого $u_0 \in \mathfrak{J}$ решение задачи (8), (9) лежит в $\mathfrak{J}$ поточечно.

В частности, фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (8) является его инвариантным пространством, обратное же, вообще говоря, неверно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Говорят, что решения уравнения (8) имеют *экспоненциальную дихотомию*, если

- (i) фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (8) расщепляется в прямую сумму двух инвариантных пространств, $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}^s \oplus \mathfrak{J}^u$, $\mathfrak{J}^{s(u)} \neq \{0\}$;
- (ii) существуют константы $a, c_s, c_u \in \mathbb{R}_+$ такие, что при любом $u_0 \in \mathfrak{J}^s$ ($u_0 \in \mathfrak{J}^u$) и любом $t \in \mathbb{R}_+$ $\|u(t)\|_{\mathfrak{U}} \leq c_s e^{-at} \|u_0\|_{\mathfrak{U}}$ ($\|u(t)\|_{\mathfrak{U}} \geq c_u e^{at} \|u_0\|_{\mathfrak{U}}$).

В случае $\mathfrak{P} = \mathfrak{J}^s$ ($\mathfrak{P} = \mathfrak{J}^u$) говорят об экспоненциальной устойчивости (неустойчивости) решений.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть оператор M $(L, 0)$ -ограничен, и

$$\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} = \emptyset. \quad (11)$$

Тогда если

- (i) $\sigma^L(M) \subset \mathbb{C}_- = \{\mu \in \mathbb{C} : \text{Re } \mu < 0\}$, то решения уравнения (8) экспоненциально устойчивы;

- (ii) $\sigma^L(M) \subset \mathbb{C}_+ = \{\mu \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \mu > 0\}$, то решения уравнения (8) экспоненциально неустойчивы;
- (iii) $(\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_- \neq \emptyset) \wedge (\sigma^L(M) \cap \mathbb{C}_+ \neq \emptyset)$, то решения уравнения (8) имеют экспоненциальную дихотомию.

Доказательство более общей версии теоремы 3.1 см. в [11, гл. 5].

Далее, пусть пространства $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ такие, как в п. 1, а операторы L , M такие, как в п. 2. В силу леммы 2.1 оператор M ($L, 0$)-ограничен. Однако L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M есть замыкание множества точек вида

$$\mu_k = -\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda + \lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{l \in \mathbb{N} : \lambda = -\lambda_l\},$$

и поскольку $\lambda_1 = 0$, то $\mu_1 = 0$, и значит, $\sigma^L(M) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset$.

Итак, условие (11) нарушено, и значит, непосредственно применить теорему 3.1 к уравнению (8) в данном случае невозможно. Тем не менее, опираясь на нее, можно достаточно полно изучить устойчивость и неустойчивость решений уравнения (8).

Прежде всего отметим, что при любых $\lambda, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ множество стационарных решений уравнения (8) совпадает с пространством $\ker B = \operatorname{span}\{\varphi_1\}$. Введем в рассмотрение пространства $\mathfrak{U}^\perp = \{u \in \mathfrak{U} : \langle u, \varphi_1 \rangle = 0\}$ и $\mathfrak{F}^\perp = \{f \in \mathfrak{F} : \langle f, \varphi_1 \rangle = 0\}$. Очевидно, $\mathfrak{U} = \ker B \oplus \mathfrak{U}^\perp$ и $\mathfrak{F} = \ker B \oplus \mathfrak{F}^\perp$. Обозначим через $L^\perp$ ($M^\perp$) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^\perp$.

ЛЕММА 3.1. *При любых $\lambda, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ операторы $L^\perp, M^\perp \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^\perp; \mathfrak{F}^\perp)$, причём оператор $M^\perp$ ($L^\perp, 0$)-ограничен и $L^\perp$ -спектр $\sigma^{L^\perp}(M^\perp)$ оператора $M^\perp$ совпадает с замыканием точек вида*

$$\mu_k = -\frac{\alpha \lambda_k}{\lambda + \lambda_k}, \quad k \in \mathbb{N} \setminus (\{1\} \cup \{l \in \mathbb{N} : \lambda = -\lambda_l\}).$$

Для доказательства заметим, что $\langle Lu, \varphi_1 \rangle = \lambda \langle u, \varphi_1 \rangle = 0$ при любом $u \in \mathfrak{U}^\perp$, а также $\langle Mu, \varphi_1 \rangle = \langle u, M\varphi_1 \rangle = 0$. В остальном доказательство не отличается от доказательства леммы 2.1. Далее аналогично (8) рассмотрим уравнение

$$L^\perp \dot{u}^\perp = M^\perp u^\perp, \tag{12}$$

решением которого будет вектор-функция $u^\perp \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{U}^\perp)$, обращающая его в тождество. В силу теоремы 8 и следствия справедлива

ЛЕММА 3.2. *При любых $\lambda, \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ фазовым пространством уравнения (12) является подпространство $\mathfrak{P}^\perp$.*

Далее к уравнению (12) применим теорему 3.1. Справедлива следующая лемма.

ЛЕММА 3.3. *При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ и*

- (i) $\lambda \in [-\lambda_2, +\infty)$ решения уравнения (12) экспоненциально устойчивы.
- (ii) $\lambda \in [-\lambda_{k+1}, -\lambda_k)$, если $k \geq 2$ и $\lambda_k \neq \lambda_{k+1}$, решения уравнения (12) имеют экспоненциальную дихотомию, причём

$$\mathfrak{J}^s = \operatorname{span}\{\varphi_l : \lambda_l \in \{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_k\}\}.$$

Доказательство леммы аналогично доказательствам теорем 6–8 из [12] и поэтому опускается. Теперь у нас всё готово для изучения устойчивости и неустойчивости решений уравнений (8). Условимся решение $u = u(t)$ задачи (8), (9) обозначать следующим образом: $u = u(t, u_0)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.3. Стационарное решение $\xi \in \mathfrak{U}$ уравнения (8) назовём *равномерно устойчивым*, если $u(t, u_0) \rightarrow \xi$ при $u_0 \rightarrow \xi$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+$. Решение ξ называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно равномерно устойчиво и существует окрестность $\mathfrak{D}_\xi \subset \mathfrak{U}$ такая, что $u(t, u_0) \rightarrow \xi$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $u_0 \in \mathfrak{D}_\xi$.

ТЕОРЕМА 3.2. При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [-\lambda_2, +\infty) \setminus \{0\}$ любое стационарное решение уравнения (8) равномерно устойчиво.

Приведём набросок доказательства. В силу теоремы 2.1 при $\lambda \in [\lambda_2, +\infty) \setminus \{0\}$ фазовое пространство $\mathfrak{P}$ уравнения (8) содержит подпространство $\ker B$. Пусть $\xi = \eta\varphi_1 \in \ker B$ – некоторое стационарное решение уравнения (8). В силу следствия теоремы 2.1 любое решение $u = u(t)$ уравнения (8) имеет вид $u(t) = a\varphi_1 + u^\perp(t)$, где $u^\perp = u^\perp(t)$ – решение уравнения (12). В силу леммы 3.3 (i) $u^\perp(t) = u^\perp(t, u_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по u_0 . Отсюда легко вытекает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Любое стационарное решение уравнения (8) не будет равномерно асимптотически устойчивым при любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [-\lambda_2, +\infty) \setminus \{0\}$. Действительно, в любой окрестности стационарного решения $\xi = \eta\varphi_1$ существует другое стационарное решение $\sigma = \tau\varphi_1$, $\tau \neq \eta$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [-\lambda_{k+1}, -\lambda_k)$, $k \geq 2$, $\lambda_{k+1} \neq \lambda_k$, в силу леммы 3.3 (ii) уравнение (8) имеет конечномерное экспоненциально неустойчивое инвариантное многообразие $\mathfrak{J}^s$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. При любых $\nu \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = 0$ в силу теоремы 2.2 решение может быть как устойчивым, так и неустойчивым.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Осколков А. П. Нелокальные задачи для одного класса нелинейных операторных уравнений, возникающих в теории уравнений типа С. Л. Соболева / Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1991. — Т. 198. — С. 31–48.
2. Амфилохий В. Б., Войтжунский Я. И., Мазаева Н. П., Ходорковский Я. С. Течения полимерных растворов при наличии конвективных ускорений // Тр. Ленингр. кораблестроительного ин-та, 1975. — Т. 96. — С. 3–9.
3. Свиридюк Г. А. О многообразии решений одной задачи динамики вязкоупругой несжимаемой жидкости // Дифференц. уравнения, 1988. — Т. 24, № 10. — С. 1846–1848.
4. Свиридюк Г. А. Об одной модели слабожимаемой вязкоупругой жидкости // Изв. вузов. Математика, 1994. — № 1. — С. 62–70.
5. Свиридюк Г. А., Якутов М. М. Фазовое пространство начально-краевой задачи для системы Осколкова // Дифференц. уравнения, 1996. — Т. 32, № 11. — С. 1538–1543.
6. Осколков А. П. О некоторых нестационарных линейных и квазилинейных системах, встречающихся при изучении движения вязких жидкостей / В сб.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 9 / Зап. научн. сем. ЛОМИ. — Л.: Наука, Ленинград. отд., 1976. — Т. 59. — С. 133–177.
7. Свиридюк Г. А., Анкудинов А. В. Фазовое пространство задачи Коши–Дирихле для одного неклассического уравнения // Дифференц. уравнения, 2003. — Т. 39, № 11. — С. 1556–1561.
8. Покорный Ю. В., Пенжин О. М., Прядиев В. Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.

9. Свиридюк Г. А. Уравнения соболевского типа на графах / В сб.: *Неклассические уравнения математической физики*. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. — С. 221–225.
10. Шеметова В. В. Исследование одного класса уравнений соболевского типа на графах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 27.12.05; утв. 10.05.06. — Магнитогорск, 2005. — 109 с.
11. Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators. — Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. — 216 p.
12. Шипилов А. С. Об устойчивости решений уравнений Баренблатта—Желтова—Кочинской // *Вестн. Южно-Уральского гос. ун-та. Матем. моделирование и программирование*, 2008. — № 1. — С. 106–110.
13. Свиридюк Г. А., Баязитова А. А. О прямой и обратной задачах для уравнений Хоффа на графе // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. — № 1(18). — С. 6–17.

Поступила в редакцию 04/IX/2009;
в окончательном варианте — 13/X/2009.

MSC: 35B35, 35K70

STABILITY OF SOLUTIONS OF OSKOLKOV LINEAR EQUATIONS ON A GEOMETRICAL GRAPH

G. A. Sviridyuk, A. S. Shipilov

State University of South Ural,
76, pr. Lenina, Chelyabinsk, 454080.

E-mails: ridyu@susu.ac.ru, shipilov@susu.ac.ru

Stability and instability of steady-state solutions of Oskolkov linear equations $\lambda u_{jt} - u_{jtxx} = \nu u_{jxx}$ on a geometrical graph depending on parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ are studied.

Key words: *Oskolkov equations, geometrical graph, exponential dichotomies, phase space.*

Original article submitted 04/IX/2009;
revision submitted 13/X/2009.

Georgy A. Sviridyuk (Dr.Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematical Physics Equations. *Alexander S. Shipilov*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Physics Equations.