Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Прохоров, И. М. Куликовских, Численно-аналитический подход к вычислению интегралов при построении ортогональных моделей, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 140–146

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 13:24:06

УДК 517.587:519.216

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНТЕГРАЛОВ ПРИ ПОСТРОЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ

С. А. Прохоров, И. М. Куликовскиx

Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королёва, 443086, Самара, Московское ш., 34.

E-mails: sp@smr.ru, eirisan@rambler.ru

Предложен численно-аналитический метод вычисления интегралов, используемых при построении ортогональных моделей. Данный метод позволяет повысить точность ортогональных моделей за счёт полученных алгебраических и рекуррентных соотношений для используемых интегралов. Проведен сравнительный анализ различных ортогональных функций, являющихся частными случаями базисов Якоби и Сонина—Лагерра, при решении поставленной задачи. Приведена реализация разработанных алгоритмов на примере построения корреляционной ортогональной модели в базисе Лагерра.

Ключевые слова: метод вычисления интегралов, ортогональная модель, рекуррентные соотношения, корреляционная функция, случайный процесс.

При построении ортогональной модели функциональной характеристики $f(\tau)$ необходимо: 1) выбрать ортогональный базис $\psi_k(\tau, \gamma)$; 2) определить число членов ряда m и параметр масштаба ортогональных функций γ ; 3) рассчитать коэффициенты Фурье ортогонального ряда β_k , удовлетворяющие минимуму взвешенной квадратичной погрешности аппроксимации в общем случае [1, 2]:

$$\Delta = \int_0^\infty \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^m \hat{\beta}_k \psi_k(\tau, \gamma) \right]^2 \mu(\tau, \gamma) d\tau \rightarrow \min, \quad (1)$$

где

$$\hat{\beta}_k = \hat{\beta}_{k,1} = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \Phi(\hat{f}(\Delta\tau \cdot i) \psi_k(\Delta\tau \cdot i, \gamma) \mu(\Delta\tau \cdot i, \gamma), \tau_{k \max}, N) \quad (2)$$

— оценка коэффициента разложения

$$\beta_k = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \int_0^\infty f(\tau) \psi_k(\tau, \gamma) \mu(\tau, \gamma) d\tau; \quad (3)$$

$\tau_{k \max}$ — максимальный интервал корреляции; $\Delta\tau$ — шаг дискретизации; $i \equiv 1, 2, \dots, J_{\max}$; $J_{\max} = \text{ent}[\tau_{k \max}/\Delta\tau]$ — число ординат, необходимых для построения функциональной зависимости; N — объём выборки; $\Phi(\cdot)$ — функционал, зависящий от численного метода интегрирования; $\mu(\tau, \gamma)$ — весовая функция ортогонального базиса; $\|\psi_k\|^2$ — норма ортогональных функций.

Выражение (1) представим в виде [3]

$$\Delta = \Delta_{\min} + \Delta_1, \quad (4)$$

Сергей Антонович Прохоров (д.т.н., проф.), зав. кафедрой, каф. информационных систем и технологий. Илона Марковна Куликовскиx, аспирант, каф. информационных систем и технологий.

где

$$\Delta_{\min} = \int_0^\infty f^2(\tau) \mu(\tau, \gamma) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2 \quad (5)$$

— минимальная погрешность аппроксимации;

$$\Delta_1 = \sum_{k=0}^m \Delta_{\beta_k}^2 \|\psi_k\|^2 \quad (6)$$

— погрешность аппроксимации, вызванная оценкой коэффициентов разложения; $\Delta_{\beta_k}^2 = (\hat{\beta}_k - \beta_k)^2$.

Из выражений (5) и (6) видно, что значение погрешности $\Delta_{\min}$ уменьшается с увеличением числа членов разложения ряда m , в то время как значение погрешности Δ_1 возрастает [1, 2]. Следовательно, для уменьшения результирующей погрешности аппроксимации (4) необходимо минимизировать составляющую (6).

Решение этой проблемы можно получить, применяя следующий подход. В общем виде, используя линейную интерполяцию $f(\tau)$, можно записать:

$$f(\tau) = \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} (a_j + b_j \tau) \delta_j, \quad (7)$$

где $\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \in [\tau_j, \tau_{j+1}], \\ 0, & \text{если } \tau \notin [\tau_j, \tau_{j+1}] \end{cases}$ — индикатор состояния. Тогда, подставив (7) в (3), получим

$$\hat{\beta}_{k,2} = \frac{1}{\|\psi_k\|^2} \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} \left(a_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \psi_k(\tau, \gamma) d\tau + b_j \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \psi_k(\tau, \gamma) \tau d\tau \right). \quad (8)$$

Для оценки коэффициентов разложения (8) необходимо определить интегралы $\int \psi_k(\tau, \gamma) d\tau$ и $\int \tau \psi_k(\tau, \gamma) d\tau$.

Представим решение данной задачи для ортогональных функций Лагерра $L_k(\tau, \gamma)$ и Лежандра $\text{Leg}_k(\tau, \gamma)$, являющихся простейшими представителями ортогональных базисов Сонина—Лагерра $L_k^{(\alpha)}(\tau, \gamma)$ и Якоби $P_k^{(\alpha, \beta)}(\tau, \gamma)$ с нулевыми параметрами ортогональных базисов α, β и единичной весовой функцией $\mu(\tau, \gamma)$ [3].

Для решения данной задачи воспользуемся рекуррентным соотношением

$$L_k(\tau, \gamma) = \frac{2k-1-\gamma\tau}{k} L_{k-1}(\tau, \gamma) - \frac{k-1}{k} L_{k-2}(\tau, \gamma). \quad (9)$$

Здесь $L_0(\tau, \gamma) = \exp(-\frac{\gamma\tau}{2})$, $L_1(\tau, \gamma) = \exp(-\frac{\gamma\tau}{2})(1 - \gamma\tau)$, причём

$$\frac{dL_k(\tau, \gamma)}{d\tau} = -\gamma L_{k-1}^{(1)}(\tau, \gamma) - \frac{\gamma}{2} L_k(\tau, \gamma) \quad (10)$$

и

$$L_k^{(1)}(\tau, \gamma) = \sum_{\nu=0}^k L_\nu(\tau, \gamma). \quad (11)$$

В (10) полагается $L_0^{(1)}(\tau, \gamma) = L_0(\tau, \gamma)$.

Проведя ряд преобразований над выражениями (9)–(10), получим рекуррентные соотношения для интегралов $\int \psi_k(\tau, \gamma) d\tau$ и $\int \tau \psi_k(\tau, \gamma) d\tau$:

$$\int L_k(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma} L_k(\tau, \gamma) - 2 \sum_{\nu=0}^{k-1} \int L_\nu(\tau, \gamma) d\tau,$$

$$\begin{aligned} \int \tau L_k(\tau, \gamma) d\tau = & -\frac{k+1}{\gamma} \int L_{k+1}(\tau, \gamma) d\tau + \\ & + \frac{2k+1}{\gamma} \int L_k(\tau, \gamma) d\tau - \frac{k}{\gamma} \int L_{k-1}(\tau, \gamma) d\tau, \end{aligned}$$

где $\int L_0(\tau, \gamma) d\tau = -\frac{2}{\gamma} \exp(-\frac{\gamma\tau}{2})$.

Подобным образом для ортогональных функций Лежандра будем иметь следующие рекуррентные соотношения:

$$\text{Leg}_k(\tau, \gamma) = \frac{2k-1}{k} (1 - 2 \exp(-2\gamma\tau)) \text{Leg}_{k-1}(\tau, \gamma) - \frac{k-1}{k} \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{d \text{Leg}_k(\tau, \gamma)}{d\tau} = & \frac{d \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma)}{d\tau} - \gamma \left[(2k+1) \text{Leg}_k(\tau, \gamma) - \right. \\ & \left. - 2(2k-1) \text{Leg}_{k-1}(\tau, \gamma) + (2k-3) \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma) \right], \quad (13) \end{aligned}$$

где

$$\text{Leg}_0(\tau, \gamma) = \exp(-\gamma\tau), \quad \text{Leg}_1(\tau, \gamma) = (1 - 2 \exp(-2\gamma\tau)) \exp(-\gamma\tau);$$

$$\frac{d \text{Leg}_0(\tau, \gamma)}{d\tau} = -\gamma \exp(-\gamma\tau), \quad \frac{d \text{Leg}_1(\tau, \gamma)}{d\tau} = -\gamma (1 - 6 \exp(-2\gamma\tau)) \exp(-\gamma\tau).$$

Из выражений (12), (13) следуют искомые рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} \int \text{Leg}_k(\tau, \gamma) d\tau = & \frac{2(2k-1)}{2k+1} \int \text{Leg}_{k-1}(\tau, \gamma) d\tau - \\ & - \frac{2k-3}{2k+1} \int \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+1)} [\text{Leg}_k(\tau, \gamma) - \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma)], \end{aligned}$$

$$\int \tau \text{Leg}_k(\tau, \gamma) d\tau = \frac{2(2k-1)}{2k+1} \int \tau \text{Leg}_{k-1}(\tau, \gamma) d\tau -$$

$$-\frac{2k-3}{2k+1} \int \tau \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma) d\tau - \frac{1}{\gamma(2k+1)} \left[\tau (\text{Leg}_k(\tau, \gamma) - \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma)) - \int \text{Leg}_k(\tau, \gamma) d\tau + \int \text{Leg}_{k-2}(\tau, \gamma) d\tau \right],$$

где

$$\begin{aligned} \int \text{Leg}_0(\tau, \gamma) d\tau &= -\frac{1}{\gamma} \exp(-\gamma\tau), \\ \int \text{Leg}_1(\tau, \gamma) d\tau &= -\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{2}{3} \exp(-2\gamma\tau)\right) \exp(-\gamma\tau); \\ \int \tau \text{Leg}_0(\tau, \gamma) d\tau &= -\left(\frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \exp(-\gamma\tau), \\ \int \tau \text{Leg}_1(\tau, \gamma) d\tau &= -\left(\frac{\tau}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2}\right) \exp(-\gamma\tau) + 2\left(\frac{\tau}{3\gamma} + \frac{1}{9\gamma^2}\right) \exp(-3\gamma\tau). \end{aligned}$$

Полученные аналитические выражения, представленные в виде рекуррентных соотношений, позволяют вычислять коэффициенты разложения высоких порядков при реализации на ЭВМ. При этом погрешность вычисления коэффициентов разложения в данном случае зависит лишь от шага дискретизации, являющегося исходным параметром при обработке информационных массивов.

Заметим, что с учётом выражения (7) возможна более точная оценка минимальной погрешности аппроксимации (5) при аналитическом взятии соответствующего интеграла с последующей подстановкой пределов интегрирования, а именно

$$\Delta_{\min} = \sum_{j=0}^{J_{\max}-1} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} (a_j + b_j \tau)^2 \mu(\tau, \gamma) d\tau - \sum_{k=0}^m \beta_k^2 \|\psi_k\|^2.$$

Сравним представленные методики определения коэффициентов разложения (2) и (8) при проведении имитационного моделирования, состоящего в построении ортогональной модели нормированной корреляционной функции (НКФ) вида $\rho_x(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|) \cos \omega_0 \tau$ с показателем колебательности $\mu = \omega_0/\lambda = 5$, объёмом выборки $N = 5000$, $\Delta\tau = 0,0816$ и $J_{\max} = 37$ с помощью ортогональных функций Лагерра и оценке погрешностей, соответствующих выражениям (1), (4)–(6). Заметим, что согласно РТМ 25 139–74 [4], имитационное моделирование проводилось по 29 экспериментам.

На рис. 1 представлены результаты оценки коэффициентов разложения $\hat{\beta}_{k,1}$ и $\hat{\beta}_{k,2}$, соответствующие выражению (6), при заданном диапазоне изменения $m \in [0, 30]$ и значении параметра $\gamma = \sqrt{\lambda^2 + \omega_0^2} = 4,899$ [1, 3].

Из рис. 1, б видно, что при дальнейшем увеличении числа членов рядов отклонения $\Delta_{\beta_k}^2$ уменьшаются, и величина этих отклонений при прочих равных параметрах ниже более чем на порядок. Отсюда следует, что вклад погрешности вычисления коэффициентов, вызванной случайными отклонениями, в результирующую погрешность аппроксимации значительно снижается.

На рис. 2 приведены квадратичные погрешности аппроксимации (1) при оценке коэффициентов разложения по различным методикам.

Из рис. 2, а видно, что из-за убывания минимальной погрешности аппроксимации (5) погрешность вычисления коэффициентов разложения возрастает (6). Поэтому существует некое оптимальное значение параметра m , при котором достигается минимум-минимум суммарной погрешности аппроксимации [1].

В свою очередь, рис. 2, б демонстрирует выполнение равенства Парсеваля [3], согласно которому результирующая погрешность аппроксимации (1) уменьшается с увеличением m .

Следовательно, полученный результат позволяет строить ортогональные модели с некоторой допустимой либо наперёд заданной погрешностью $\Delta \leq \Delta_{\text{доп}}$. По заданной погрешности $\Delta_{\text{доп}}$ определяется необходимое число членов разложения, которое может быть достаточно большим.

Проведём сравнительный анализ широкого спектра ортогональных функций при решении задачи построения ортогональной модели теоретической НКФ вида $\rho_x(\tau) = \exp(-\lambda|\tau|) \cos \omega_0 \tau$ с показателем колебательности $\mu = 5$, $\Delta\tau = 0,0816$ и $J_{\text{max}} = 37$ с использованием предложенного подхода при одном и том же числе членов разложения ряда $m = 30$. Результаты представлены в таблице.

Из таблицы видно, что наименьшая относительная погрешность аппроксимации

$$\delta = \Delta \cdot \left(\int_0^\infty \rho_x^2(\tau) \mu(\tau, \gamma) d\tau \right)^{-1}$$

получена при построении ортогональной модели в базисе Лагерра (верхняя

Рис. 1. Отклонения $\Delta_{\beta_k}^2$ при оценке коэффициентов разложения по разным методикам: а) отклонение оценок $\hat{\beta}_{k,1}$; б) отклонение оценок $\hat{\beta}_{k,2}$

Рис. 2. Квадратическая погрешность аппроксимации при оценке коэффициентов разложения по разным методикам: а) при оценке $\hat{\beta}_{k,1}$; б) при оценке $\hat{\beta}_{k,2}$

Сравнительный анализ ортогональных функций при построении ортогональной модели НКФ

Функции базиса	γ	δ
Лагерра $L_k(\tau, \gamma)$	4,899	0,02254
Сонина—Лагерра (1) $L_k^{(1)}(\tau, \gamma)$	4,899	0,05168
Сонина—Лагерра (2) $L_k^{(2)}(\tau, \gamma)$	4,899	0,0902
Лежандра $Leg_k(\tau, \gamma)$	0,080311	0,02454
Якоби $(-\frac{1}{2}, 0) P_k^{(-\frac{1}{2}, 0)}(\tau, \gamma)$	0,080975	0,02451
Якоби $(\frac{1}{2}, 0) P_k^{(\frac{1}{2}, 0)}(\tau, \gamma)$	0,079658	0,02455
Якоби $(1, 0) P_k^{(1, 0)}(\tau, \gamma)$	0,15803	0,02449
Якоби $(2, 0) P_k^{(2, 0)}(\tau, \gamma)$	0,077762	0,02418
Якоби $(0, 1) P_k^{(0, 1)}(\tau, \gamma)$	0,080311	0,05198
Якоби $(0, 2) P_k^{(0, 2)}(\tau, \gamma)$	0,080311	0,08511

строчка). Также следует отметить, что для функций с весом (выделены в таблице курсивом), отличным от единицы, указаны значения, соответствующие взвешенной погрешности аппроксимации.

Как показали полученные результаты, значительных различий при построении ортогональных функций в различных базисах не наблюдается. Однако ортогональный базис Сонина—Лагерра, как частный случай функции Лагерра, является более приоритетным по ряду причин. Одна из таких причин — удобство выбора параметра масштаба γ . Во-первых, параметр масштаба не зависит от числа членов разложения ряда m , следовательно, нет необходимости пересчёта γ при изменении m . Во-вторых, при большом значении m область нахождения локальных оптимумов, близких к минимуму-минимуму, значительно расширяется. Следовательно, квазиоптимальный алгоритм подбора параметра масштаба дает значения, близкие к оптимуму, без усложнения процедуры вычисления [5].

Пример обработки экспериментальных данных в базисе Лагерра представлен на рис. 3 и 4. Здесь приведены вид входного сигнала, вид НКФ, построенной по сигналу, и вид ортогональной модели НКФ ($\delta = 0,0058$, $\gamma = 1000$, $m = 600$).

Рис. 3. Вид входного сигнала

Рис. 4. Вид НКФ, построенной по сигналу (сплошная линия), и ортогональной модели НКФ (пунктирная линия)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Прохоров С. А., Графкин А. В., Графкин В. В. и др. Прикладной анализ случайных процессов / ред. С. А. Прохоров. — Самара: СНЦ РАН, 2007. — 582 с.
2. Прохоров С. А., Графкин А. В. Программный комплекс корреляционно-спектрального анализа в ортогональных базисах. — Самара: СНЦ РАН, 2005. — 198 с.
3. Прохоров С. А., Куликовских И. М. Ортогональные модели корреляционно-спектральных характеристик случайных процессов: Лабораторный практикум. — Самара: СНЦ РАН, 2008. — 301 с.
4. Методы нормирования метрологических характеристик, оценки и контроля характеристик погрешностей средств статистических измерений: РТМ 25 139–74, Минприбор, 1974. — 76 с.
5. Прохоров С. А., Куликовских И. М. Алгоритм оценки параметра масштаба ортогональных функций, обеспечивающий минимум-минимум квадратической погрешности аппроксимации / В сб.: Компьютерные технологии в науке, практике и образовании. — Самара: СамГТУ, 2008. — С. 10–12.
6. Прохоров С. А., Куликовских И. М. Частотные характеристики ортогональных функций Сонина–Лагерра // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2007. — № 2(15). — С. 123–127.
7. Прохоров С. А., Куликовских И. М. Аппроксимация корреляционных функций и спектральных плотностей мощности ортогональными функциями Сонина–Лагерра // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2008. — № 2(17). — С. 185–191.

Поступила в редакцию 14/VIII/2009;
в окончательном варианте — 12/X/2009.

MSC: 93B40, 42C05, 33C45

NUMERIC-ANALYTICAL APPROACH TO INTEGRALS CALCULATION AT CONSTRUCTION OF ORTHOGONAL MODELS

S. A. Prokhorov, I. M. Kulikovskikh

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University,
34, Moskovskoe sh., Samara, 443086.

E-mails: sp@smr.ru, eirisan@rambler.ru

The numeric-analytical method of calculation of the integrals is proposed for construction of orthogonal models. The given method allows to increase the accuracy of orthogonal models due to obtained algebraic and recurrent relations for integrals used. Comparative analysis of various orthogonal functions which are the specific cases of Jacobi and Sonin–Laguerre bases is carried out when solving the posed problem. Realization of the developed algorithms is given by the example of construction of correlation orthogonal model in the Laguerre basis.

Key words: *method of integrals calculation, orthogonal model, recurrence relations, correlation function, stochastic process.*

Original article submitted 14/VIII/2009;
revision submitted 12/X/2009.

Sergey A. Prokhorov (Dr. Sci. (Techn.)), Head of Dept., Dept. of Information Systems & Technologies. *Ilena M. Kulikovskikh*, Postgraduate Student, Dept. of Information Systems & Technologies.