Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Стружанов, Е. Ю. Просвиряков, Сепаратриса в задаче о растяжении с кручением при жёстком нагружении, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 248–252

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:19:04

УДК 539.3

СЕПАРАТРИСА В ЗАДАЧЕ О РАСТЯЖЕНИИ С КРУЧЕНИЕМ
ПРИ ЖЁСТКОМ НАГРУЖЕНИИВ. В. Стружанов¹, Е. Ю. Просвиряков²¹ Институт машиноведения УрО РАН,

620219, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34.

² Уральский государственный университет им. А. М. Горького,

620083, г. Екатеринбург, пр-т Ленина, 51.

E-mails: stru@imach.uran.ru, evgen_pros@mail.ru

В настоящей работе проведено построение сепаратрисы при растяжении с кручением одной механической системы ее при жестком нагружении, в состав которой входит материал, обладающий деформационным разупрочнением (свойства материала описываются невыпуклым потенциалом).

Ключевые слова: растяжение с кручением, сепаратриса, устойчивость, потеря устойчивости, бифуркационное множество.

Введение. Разрушение конструкций (механических систем) в общем случае представляет собой глобальное явление того же характера, что явление неустойчивости движения и явление невозможности равновесия. Следовательно, при квазистатическом нагружении разрушение и неразрушение связаны с устойчивостью равновесия. Если силы, действующие на систему, консервативны (система градиентна), то состояния равновесия (устойчивые или неустойчивые) описываются системой уравнений $\nabla_{\psi}\Pi(\psi_j, c_i) = 0$. При этом тип устойчивости определяется собственными значениями матрицы Гессе $H(\Pi)$ функции Π . Здесь Π — потенциальная функция, ψ_j, c_i — соответственно параметры состояния и управления, ∇_{ψ} — оператор Гамильтона в пространстве состояний. Данные уравнения в зависимости от параметров управления могут не иметь решений, иметь одно или более чем одно решение. Отсюда проблема разрушения сводится к задаче о том, каким образом состояния равновесия $\psi_j(c_i)$ потенциальной функции Π изменяются при изменении управляющих параметров.

Особую роль играют вырожденные критические точки потенциальной функции в пространстве состояний, где по крайней мере одно из собственных значений матрицы Гессе обращается в нуль. В них меняется тип равновесия [1]. Отображение таких точек из пространства состояний в пространство управлений образуют сепаратрису потенциальной функции, которая разделяет пространство управлений на открытые области, где уравнение $\nabla_{\psi}\Pi = 0$ имеет одно и то же число решений. Внутри области, ограниченной сепаратрисой, несколько решений, вне этой области — одно решение. Сепаратриса фактически представляет собой бифуркационные множества. При первом пересечении путём нагружения сепаратрисы (вхождение в область ею ограниченной) у системы появляются новые положения равновесия, как устойчивые, так и неустойчивые. Однако согласно принципу промедления [1] система остаётся в устойчивом положении до тех пор, пока не осуществится выход из области, ограниченной сепаратрисой. В этот момент и осуществляется скачкообразный переход системы из одного положения равновесия в другое (потеря устойчивости). Ниже приведён пример построения сепаратрисы в задаче о растяжении с кручением полого цилиндрического образца.

1. Механическая система и свойства образца. Рассмотрим систему, состоящую из

Валерий Владимирович Стружанов (д.ф.-м.н., проф.), главный научный сотрудник, лаборатория прикладной механики. Евгений Юрьевич Просвиряков, аспирант, каф. теоретической механики.

трёх элементов (рис. 1). Полый образец 3 имеет специальную геометрию такую, что удлинение по величине равно деформации растяжения ε , угол закручивания — деформации сдвига γ , растягивающая сила — растягивающему напряжению σ , а крутящий момент — касательному напряжению τ [2]. У упругого стержня 1 сечение $B-B$ движется поступательно (кручение заблокировано), у упругого стержня 2 сечение $C-C$ может только поворачиваться (поступательное движение заблокировано). Жёсткость стержня 1 при растяжении равна λ_1 , жёсткость стержня 2 при кручении — λ_2 [2].

Рис. 1. Механическая система

Свойства материала образца при активном деформировании заданы невыпуклым потенциалом, описывающим как стадию упрочнения, так и стадию разупрочнения [3]:

$$\Pi(\varepsilon, \gamma) = \begin{cases} \frac{(E\varepsilon^2 + G\gamma^2)}{4} + \frac{\sin(a(E\varepsilon^2 + G\gamma^2))}{4a}, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \in \Omega; \\ 0, & \text{если } (\varepsilon, \gamma) \notin \Omega, \end{cases}$$

где $a = 100\pi/E$, $E = 2 \cdot 10^4$ кг/мм², $G = 7,7 \cdot 10^4$ кг/мм², а $\Omega = \left\{ \varepsilon, \gamma : \varepsilon, \gamma \geq 0, E\varepsilon^2 + G\gamma^2 \leq \frac{\pi}{a} \right\}$. Нагружение ведётся посредством монотонно возрастающих величин u и ψ .

2. Построение сепаратрисы. Состояние системы описывает потенциальная функция [2]

$$W = \lambda_1 \frac{(u - \varepsilon)^2}{2} + \lambda_2 \frac{(\psi - \gamma)^2}{2} + \Pi(\varepsilon, \gamma),$$

где u , ψ , λ_1 , λ_2 — параметры управления системой; ε , γ — параметры состояния. Множество критических точек функции W (решений уравнений $\nabla W = 0$, где ∇ — оператор Гамильтона в пространстве состояний) образует четырёхмерное многообразие Q_W равновесных состояний [2]. Глобальное качественное поведение семейства функций W полностью определяется множеством вырожденных критических точек. При проектировании многообразия Q_W в пространство управления $\mathbb{R}_r^4 = \mathbb{R}_\lambda^2 \times \mathbb{R}_u^2$ ($\mathbb{R}_\lambda^2 = \{\lambda_1, \lambda_2\}$, $\mathbb{R}_u^2 = \{u, \psi\}$) множество вырожденных критических точек образует множество меры нуль, называемое сепаратрисой, которая представляет собой бифуркационное множество [1]. Сепаратриса разбивает пространство управляющих параметров $\mathbb{R}_r^4$ функции W на открытые области, каждая из которых параметризует лишь качественно подобные функции, имеющие одно и то же число положений равновесия.

В пространстве состояний множество вырожденных критических точек определяет уравнение [2]

$$\det H(W) = (\lambda_1 + c_{11})(\lambda_2 + c_{22}) - c_{12}^2 = 0, \quad (1)$$

где $H(W)$ — матрица Гессе функции W , $c_{11} = \Pi_{,\varepsilon\varepsilon}$, $c_{12} = c_{21} = \Pi_{,\varepsilon\gamma}$, $c_{22} = \Pi_{,\gamma\gamma}$ — инкрементальные модули (запятой обозначены частные производные). Линии вырожденных критических точек показаны для различных значений λ_1 и λ_2 на рис. 2.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ уравнение (1) определяет две линии вырожденных точек, которые не пересекаются (рис. 2). При дальнейшем увеличении параметров λ_1 и λ_2

Рис. 2. Линии вырожденных точек

кривые 1 и 2 «сближаются» и, наконец, пересекаются в некоторой точке. Отметим, что возможно два варианта пересечений. При первом варианте кривые 1 и 2 пересекаются на оси $O\gamma$, а затем «отрываются» от неё (рис. 2), а при втором варианте аналогичная ситуация происходит на оси $O\epsilon$. Положим в уравнении (1) $\epsilon = 0$. В этом случае (1) преобразуется в совокупность уравнений

$$\lambda_1 + c_{11}^\gamma = 0, \quad \lambda_2 + c_{22}^\gamma = 0. \quad (2)$$

Отметим, что верхний индекс указывает на переменную, от которой в данном случае зависят инкрементальные модули.

Очевидно, что первое уравнение из (2) только при $\lambda_1 = 0$ имеет единственное решение, которое при $\lambda_2 = 0$ входит во второе уравнение (2). При $\lambda_1 > 0$ уравнение $\lambda_1 + c_{11}^\gamma = 0$ решений не имеет, поэтому в дальнейшем интерес представляют решения только уравнения $\lambda_2 + c_{22}^\gamma = 0$.

Уравнение $\lambda_2 + c_{22}^\gamma = 0$, а следовательно, и уравнение (2), имеет два решения при $0 \leq \lambda_2 < 12119,6$, а при $\lambda_2 = 12119,6$ — единственное (кратное) решение (кривые 1 и 2 пересеклись на оси $O\gamma$). Значение параметра λ_2 , соответствующее кратному решению, определяется из следующей системы уравнений:

$$\lambda_2 + c_{11}^\gamma = 0, \quad \frac{d}{d\gamma} (\lambda_2 + c_{22}^\gamma) = 0.$$

Отметим, что при $\lambda_2 > 12119,6$ данное уравнение решений не имеет, следовательно, точка пересечения кривых 1 и 2 уже не лежит на оси $O\gamma$. В этом случае линии вырожденных критических точек располагаются аналогично тому, как они изображены на рис. 2. На рис. 2 точка B — двойная вырожденная критическая точка. Однако ещё требуется найти оценки для параметра λ_1 , поскольку если взять этот параметр очень большим даже при небольшом значении λ_2 , то уравнение (1) не будет иметь решений, следовательно, можно добиться полного исчезновения вырожденных критических точек [2].

Для второго случая по аналогии требуется проанализировать количество решений уравнения

$$\lambda_1 + c_{11}^\epsilon = 0$$

в зависимости от значений параметра управления λ_1 . Получим, что данное уравнение имеет два решения при $0 \leq \lambda_2 < 31479,6$, при $\lambda_2 = 31479,6$ — единственное (кратное) решение (кривые 1 и 2 пересеклись на оси $O\epsilon$), а при $\lambda_1 > 31479,6$ данное уравнение решений не имеет, следовательно, точка пересечения кривых 1 и 2 уже не лежит на оси $O\epsilon$.

Таким образом, дважды вырожденные критические точки существуют при $\lambda_1 > 31479,6$ и $\lambda_2 < 12119,6$ или $\lambda_1 < 31479,6$ и $\lambda_2 > 12119,6$. Если же $\lambda_1 > 31479,6$ и $\lambda_2 > 12119,6$, то вырожденные критические точки, а тем более дважды вырожденные, отсутствуют.

Отображая линии критических точек функции W в пространство управлений при различных значениях параметров λ_1 и λ_2 (отображение осуществляет равенство $\nabla W = 0$), получаем в пространстве управлений $\{u, \psi, \lambda_1, \lambda_2\}$ искомую сепаратрису (см. рис. 3). Для уменьшения размерности пространства параметров управления положено $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$. Сепаратриса состоит из двух поверхностей, а именно верхней поверхности $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ и расположенной под ней поверхности $A_1 B_1 B_2 B_3 O B_4 A_6$ (см. рис. 3).

Рис. 3. Сепаратриса семейства функций W

В области, ограниченной поверхностями сепаратрисы, функция W имеет три положения равновесия, а именно два морсовских 0-седла (устойчивые положения равновесия) и между ними одно морсовское 1-седло (устойчивость и неустойчивость зависят от пути нагружения). Вне данной области функция W имеет одно положение равновесия (морсовское 0-седло). На поверхностях сепаратрисы функция W имеет одну вырожденную критическую точку, в которой она структурно неустойчива, и одно морсовское 0-седло.

Теперь, исходя из принципа промедления, можно утверждать, что потеря устойчивости процесса деформирования рассмотренной механической системы произойдёт тогда, когда путь нагружения пересечёт поверхность сепаратрисы $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-08-00125).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф: в 2-х книгах. Кн. 1. — М.: Мир, 1984. — 350 с.
2. Стружанов В. В., Просвиряков Е. Ю. Растяжение с кручением. Сообщение 2: Устойчивость процесса деформирования образца в механической системе. Жёсткое и мягкое нагружения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2008. — № 2(17). — С. 77–86.
3. Стружанов В. В., Просвиряков Е. Ю., Бурмашева Н. В. Об одном методе построения

Поступила в редакцию 04/09/2009;
в окончательном варианте — 14/10/2009.

MSC: 74G55

SEPARATRIX IN RIGID TENSION-TORSION LOADING PROBLEM

*V. V. Struzhanov*¹, *E. Yu. Prosviryakov*²

Institute of Engineering Science, Urals Branch, Russian Academy of Sciences,
91, Pervomajskaya str., Ekaterinburg, 620219.
Ural State University,
51, prosp. Lenina, Ekaterinburg, 620083.

E-mails: stru@imach.uran.ru, evgen_pros@mail.ru

In this work construction separatrix is constructed at tension with torsion of one mechanical system for rigid loading which structure includes material possessing a property of deformational loss of strength (properties of a material are described by unconvex potential).

Key words: *tension with torsion, separatrix, stability, stability loss, bifurcational multitude.*

Original article submitted 04/09/2009;
revision submitted 14/10/2009.

Valeriy V. Struzhanov (Dr. Sci. (Phys. & Math), Chief Research Scientist, Division of Machines Mechanics & Technology. *Eugeny Yu. Prosviryakov*, Postgraduate Student, Dept. of Theoretical Mechanics.

УДК 539.374.1

АДИАБАТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ В ОКРЕСТНОСТИ ЦЕНТРА ВЕЕРА ХАРАКТЕРИСТИК

*A. A. Буханько*¹, *Е. П. Кочеров*², *В. А. Самойлов*¹

¹ Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С.П. Королёва,
443086, Самара, Московское ш., 34.

² ОАО «Самарское конструкторское бюро машиностроения»,
443009, Самара, Заводское ш., 29.

E-mails: abukhanko@mail.ru, scbm@samaramail.ru

В рамках теории плоской деформации идеального жёсткопластического тела на примере задачи о растяжении полосы с V-образными вырезами рассматривается метод расчета адиабатического распределения диссипации механической энергии в окрестности центра веера линий скольжения.

Ключевые слова: *пластичность, диссипация энергии, деформация, разрушение.*

Анастасия Андреевна Буханько (к.ф.-м.н.), доцент, каф. прочности летательных аппаратов. *Евгений Павлович Кочеров*, главный конструктор. *Виталий Андреевич Самойлов*, аспирант, каф. прочности летательных аппаратов.