Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Докучаев, А. П. Котенко, Графоаналитический способ решения задачи минимизации затрат, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009, выпуск 2(), 277–279

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 10:52:30

MSC: 80A20, 35A09

GENERAL SCHEME OF SOLUTION FOR A BOUNDARY VALUE PROBLEM OF NON-STEADY THERMAL CONDUCTIVITY WITH INNER THERMAL SOURCES FOR MULTI-LAYER CONSTRUCTIONS

B. V. Averin

Syzran' Branch of Samara State Technical University,
45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001.

E-mail: totig@yandex.ru

General closed analytical solution for non-stationary thermal conductivity is obtained for non-steady thermal conductivity in multi-layer walls of a plane, cylindrical and spherical form with inner thermal sources.

Key words: *analytical solutions, generalized functions, fundamental functions, multi-layer constructions, inner thermal sources.*

Original article submitted 07/IV/2009;
revision submitted 21/VIII/2009.

Boris V. Averin (Ph. D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of General Theoretical Disciplines.

УДК 519.83

ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЙ СПОСОБ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ЗАТРАТ

А. В. Докучаев, А. П. Котенко

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: docuhaev@mail.ru, ako1959@mail.ru

Предлагается графоаналитический способ решения задачи о минимизации затрат при покупке товара у нескольких поставщиков.

Ключевые слова: *теория игр, графоаналитическое решение.*

Рассматривается задача о минимизации затрат при покупке товара у нескольких поставщиков. На рынке присутствуют несколько поставщиков однородного товара. Цена, по которой поставщик будет продавать свой товар, определяется спросом на товар данного поставщика. Чем больше спрос на товар одного из поставщиков, тем дороже он его продает. Под спросом будем понимать долю товара, купленную у одного поставщика. Будем считать, что цена на товар одного поставщика зависит от того, сколько товара покупается у каждого из остальных поставщиков. Затраты покупателя можно минимизировать путём грамотного распределения спроса на товар между всеми поставщиками. Информацию о распределении спроса на товар будем называть планом покупки товара. Исходными данными для задачи будут ко-

Александр Владимирович Докучаев, аспирант, каф. прикладной математики и информатики. *Андрей Петрович Котенко* (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

личество поставщиков и цены на их товар при некоторых планах покупки товара. Результатом решения задачи будет оптимальный план покупки товара и цена единицы товара при таком плане покупки. Задача каждого игрока (поставщика) состоит в выборе такой стратегии, отклонение от которой лишь уменьшит его выигрыш.

Решение игры двух игроков известно [с. 239, 1]. Для первого нахождения оптимальной стратегии сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a_{11}u_1^* + a_{21}u_2^* = v, \\ a_{12}u_1^* + a_{22}u_2^* = v, \\ u_1^* + u_2^* = 1, \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты платёжной (выигрышной) матрицы [с. 240, 1]; u_1^*, u_2^* — оптимальные частоты использования первым игроком своих чистых стратегий [с. 240, 1].

Дадим геометрическую интерпретацию решения данной игры (см. рис. 1). На оси ou в плоскости ouv отложим отрезок A_1A_2 единичной длины, где каждой точке отрезка ставится в соответствие смешанная стратегия $U = (u_1, u_2) = (u_1, 1 - u_1)$. В частности, точке $A_1(0, 0)$ отвечает первая чистая стратегия, а точке $A_2(1, 0)$ — вторая чистая стратегия первого игрока. В этих точках восстановим перпендикуляры, на которых будем откладывать выигрыш первого игрока. Если первый игрок применит первую стратегию, то его выигрыш при выборе вторым игроком первой стратегии составит a_{11} , а при выборе вторым игроком второй стратегии — a_{12} . Если первый игрок применит вторую стратегию, то его выигрыш при выборе вторым игроком первой стратегии составит a_{21} , а при выборе вторым игроком второй стратегии — a_{22} (см. рис. 1). Расстояния от прямых $B_1B'_1$ и $B_2B'_2$ до оси ou определяют средний выигрыш при любом сочетании соответствующих стратегий. Ординаты точек ломаной $B_1MB'_2$ определяют минимальный выигрыш первого игрока при применении им любых смешанных стратегий. Эта величина максимальна в точке M , которой соответствует оптимальная стратегия первого игрока $U^* = (u_1^*, u_2^*)$.

Аналогично решается задача для второго игрока:

$$\begin{cases} a_{11}z_1^* + a_{12}z_2^* = v, \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases}$$

и находится его оптимальная стратегия $Z^* = (z_1^*, z_2^*)$.

В матричной игре с тремя поставщиками решением для первого игрока считается точка (x_1, x_2, x_3) , где x_1 — частота использования первым игроком своей первой стратегии, x_2 — второй, x_3 — третьей. В реальных задачах план покупки двух игроков не всегда согласован с планом покупки третьего игрока (точка D на рис. 2, а).

Рассмотрим случай, когда план покупки любых двух игроков согласован с планом покупки третьего игрока (рис. 2, б). Так как координаты точки являются частотами, то должны выполняться следующие условия:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0; \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Рис. 1. Графическое решение для задачи с двумя поставщиками

Рис. 2. Графическое решение (а) и разбиение треугольника допустимых решений (б) в игре с тремя поставщиками

Следовательно, решение нужно искать среди точек принадлежащих треугольнику с вершинами в точках $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ и $(0, 0, 1)$ (рис. 2, б). Эти точки соответствуют чистым стратегиям первого игрока. Треугольник с вершинами в данных точках является треугольником допустимых решений. Пусть дана игра с тремя поставщиками с матрицей выигрыша A . В основу решения задачи положим следующие соображения. Прежде всего, для всякой матричной игры и всех точек X , принадлежащих треугольнику допустимых решений, должно выполняться условие

$$v_A = \max_X \min_j X A_{.j},$$

где $X A_{.j} = x_1 a_{1j} + x_2 a_{2j} + x_3 a_{3j}$. Здесь внешний максимум достигается на оптимальных стратегиях первого игрока и только на них. Разобьём треугольник допустимых решений на три области: K_1 , K_2 и K_3 (рис. 2, б). В каждой из этих областей v_A принимают свои наименьшие значения. Остаётся только найти внутренние максимумы и сравнить их между собой. Для линейных форм максимумы будут достигаться в вершинах этих областей.

Для определения долей товара, покупаемого у каждого из поставщиков, достаточно использовать только две координаты. Первая координата определяет долю первого поставщика, вторая координата — долю второго поставщика. Для нахождения доли третьего поставщика используется равенство суммарной доли единице. Такой подход позволяет использовать третью координату как значение ценовой функции.

Также получено графоаналитическое решение для игры более трех игроков. Для четырех игроков пространство допустимых решений представляет пространственный треугольник — тетраэдр. На каждой его плоскости находится решение методом решения для трех игроков с учётом условия $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$. Таким образом, задача нахождения решения для четырёх игроков состоит из решения четырёх задач, но для трёх игроков. А задача для трёх игроков может быть решена путем решения трех задач, но уже для двух игроков каждая, то есть снижается размерность и трудоёмкость решаемой задачи. По индукции находится решение задачи для n игроков.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах. — М.: Высш. шк., 1986. — 319 с.

Поступила в редакцию 04/IX/2009;
в окончательном варианте — 02/XI/2009.

MSC: 91A06

GRAPHIC-ANALYTICAL METHOD OF SOLUTION OF EXPENSES MINIMISATION PROBLEM

A. V. Dokuchaev, A. P. Kotenko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.
E-mails: docuhaev@mail.ru, ako1959@mail.ru

he graphic-analytical method of solution of expenses minimisation problem when purchasing goods from several suppliers is proposed.

Key words: *games theory, graphic-analytical solution.*

Original article submitted 04/IX/2009;
revision submitted 02/XI/2009.

Alexander V. Dokuchaev, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Andrey P. Kotenko* (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.