Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. А. Свиридюк, С. А. Загребина, П. О. Пивоварова, Устойчивость уравнений Хоффа на графе, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 6–15

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:25:31

Дифференциальные уравнения

УДК 517.9

УСТОЙЧИВОСТЬ УРАВНЕНИЙ ХОФФА НА ГРАФЕ

Г. А. Свиридюк¹, С. А. Загребина¹, П. О. Пивоварова²¹ Южно-Уральский государственный университет,
454080, Челябинск, пр. Ленина, 76.² Магнитогорский государственный университет,
455000, Магнитогорск, пр. Ленина, 114.

E-mails: ridyu@math.susu.ac.ru, zsophiya@mail.ru, pelageia@bk.ru

Рассмотрена устойчивость стационарного решения уравнений Хоффа на графе, являющихся моделью конструкции из двутавровых балок. Основной подход — второй метод Ляпунова, модифицированный согласно нашей ситуации. В заключении дается объяснение технического смысла параметра λ_0 .

Ключевые слова: уравнения Хоффа, устойчивость, функция Ляпунова, граф.

Введение. Уравнение Хоффа [1]

$$(\lambda - \lambda_0)u_t + u_{txx} = \alpha u + \beta u^3 \quad (1)$$

моделирует выпучивание двутавровой балки, находящейся под постоянной нагрузкой. Функция $u = u(x, t)$, $(x, t) \in (a, b) \times \mathbb{R}$, характеризует отклонение балки от положения $u = 0$; параметры $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ характеризуют нагрузку и свойства материала балки соответственно; физический смысл параметра $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ будет объяснён ниже. Начально-краевые задачи для уравнения (1) в области $(a, b) \times \mathbb{R}$ впервые были изучены Н. А. Сидоровым [2] и его учениками [3, 4], причём в [3, 4] был отмечен феномен несуществования решения этих задач при произвольных начальных данных. Изучение множества начальных значений, обеспечивающих существование и единственность решения начально-краевой задачи, было показано в [5]. В [6] показано, что это множество, понимаемое как фазовое пространство уравнения (1), является простым банаховым C^∞ -многообразием, если $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$. Напомним, что гладкое банахово многообразие называется простым, если любой его атлас эквивалентен атласу, содержащему единственную карту. В [7] показано, что если $\alpha\beta \in \mathbb{R}_-$, то фазовое пространство уравнения (1) уже не будет простым многообразием, — оно лежит на сборке Уитни.

Уравнение Хоффа

$$(\lambda - \lambda_0)u_{jt} + u_{jtxx} = \alpha u_j + \beta u_j^3, \quad (2)$$

Георгий Анатольевич Свиридюк (д.ф.-м.н, проф.), зав. кафедрой, каф. уравнений математической физики. Софья Александровна Загребина (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. уравнений математической физики. Полина Олеговна Пивоварова, аспирант, каф. математического анализа.

заданное на конечном связном ориентированном графе $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\mathfrak{V}, \mathfrak{E})$, моделирует динамику конструкции из двутавровых балок. Здесь $\mathfrak{V} = \{V_i\}$ — множество вершин, а $\mathfrak{E} = \{E_i\}$ — множество рёбер, причём каждое ребро E_j имеет длину $l_j \in \mathbb{R}_+$ и площадь поперечного сечения $d_j \in \mathbb{R}_+$. В вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$ заданы условия

$$\begin{aligned} u_j(0, t) = u_k(0, t) = u_m(l_m, t) = u_n(l_n, t), \\ E_j, E_k \in E^\alpha(V_i), \quad E_m, E_n \in E^\omega(V_i), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\sum_{E_j \in E^\alpha(V_i)} d_j u_{jx}(0, t) - \sum_{E_k \in E^\omega(V_i)} d_k u_{kx}(l_k, t) = 0, \quad (4)$$

где через $E^{\alpha(\omega)}(V_i)$ обозначено множество рёбер с началом (концом) в вершине V_i , $t \in \mathbb{R}$. Если граф состоит из одного нециклического ребра (т.е. вершин у графа две), то условие (3) отсутствует, а условие (4) превращается в условие Неймана. Если же ребро циклическое (т.е. вершина у графа одна), то условия (3), (4) превращаются в условия согласования. В общем случае условия (3) требуют непрерывности решений $u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots)$ уравнений (2) в вершинах $\mathfrak{V}$ графа $\mathbf{G}$, а условия (4) — аналог условий Кирхгофа для электрических цепей — описывает «баланс потока» в вершинах. Заметим ещё, что в контексте условий (3), (4) «отсутствовать» — не значит «быть равным нулю». Например, если в вершину V_i все ребра «входят», то первые два равенства в (3) и уменьшаемое в (4) именно «отсутствуют», а не равны нулю.

Изучение дифференциальных уравнений на графах началось в 80-х годах прошлого столетия. В монографии [8], первой по данной проблематике, содержится прекрасный обзор всех достижений в этой области. Уравнения (2) относятся к уравнениям соболевского типа, исследования которых переживают в настоящее время пору бурного расцвета. Обстоятельный исторический обзор этих исследований и обширную библиографию можно найти в монографии [9]. Впервые уравнения соболевского типа на графах были рассмотрены в [10], а в [11] показано, что при условиях $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ фазовым пространством задачи (2)–(4) служит простое банахово C^∞ -многообразие.

В п. 1 настоящей работы приводится редукция задачи (2)–(4) к уравнению

$$L\dot{u} = Mu + N(u), \quad (5)$$

где L и M — линейные, а N — нелинейный операторы, определённые на специально подобранных функциональных пространствах. Редукция аналогична [11], однако пространства подобраны другие. Поэтому мы сочли необходимым снабдить все результаты набросками доказательств. П. 2 посвящён исследованию устойчивости стационарного решения $u = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ задачи (2)–(4) в терминах динамических систем и функций Ляпунова. Все абстрактные результаты являются обобщениями соответствующих результатов [12, гл. 4]. Их приложения к задаче (2)–(4) представляют главное содержание статьи. В заключении даётся объяснение физического смысла параметра λ_0 . Список литературы не претендует на полноту и отражает только вкусы и пристрастия авторов.

1. Фазовое пространство. Введём в рассмотрение множество $\mathbf{L}_2(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in L_2(0, l_j)\}$, которое становится гильбертовым про-

странством, если ввести скалярное произведение

$$\langle g, h \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} g_j h_j dx.$$

Введём ещё одно гильбертово пространство

$$\mathfrak{U} = \{u = (u_1, u_2, \dots, u_j, \dots) : u_j \in W_2^1(0, l_j), \text{ причём выполнено (3)}\}$$

со скалярным произведением и нормой, соответственно —

$$[u, v] = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + u_j v_j) dx \quad \text{и} \quad \|u\|_{\mathfrak{U}}^2 = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + u_j^2) dx.$$

В силу теорем вложения Соболева пространства $W_2^1(0, l_j)$ состоят из абсолютно непрерывных функций, поэтому пространство $\mathfrak{U}$ корректно определено, а в силу теоремы Кондрашева—Реллиха оно компактно вложено в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$. По теореме Ф. Рисса отождествим пространство $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ со своим сопряженным и через $\mathfrak{F}$ обозначим сопряжённое пространство к $\mathfrak{U}$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Пространство $\mathfrak{F}$ — банахово, причём имеют место непрерывные вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathfrak{F}$.

Возьмём $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$ и построим оператор $A : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$

$$\langle Au, v \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx} v_{jx} + \lambda_0 u_j v_j) dx, \quad u, v \in \mathfrak{U},$$

который является частным случаем оператора Штурма—Лиувилля, определённого на графе $\mathbf{G}$. Оператор $A \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$ (т. е. линеен и непрерывен), причём квадратичная форма $\langle A \cdot, \cdot \rangle$ эквивалентна скалярному произведению $[\cdot, \cdot]$. Воспользовавшись этим и теоремой Ф. Рисса, получим существование оператора Грина $A^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}, \mathfrak{U})$. Оператор $A^{-1} : \mathbf{L}_2(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ компактен в силу вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G})$, поэтому спектр $\sigma(A)$ положителен, дискретен, конечнократен и сгущается только к $+\infty$. Обозначим через $\{\lambda_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, собственные значения оператора A , занумерованные по невозрастанию с учётом их кратности, а через $\{\varphi_k\}$ — ортонормированное в смысле $\langle \cdot, \cdot \rangle$ семейство собственных функций. Ввиду компактности оператора A^{-1} семейство $\{\varphi_k\}$ есть базис в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$, а в силу плотности вложений $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathfrak{F}$ является базисом в $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Как легко видеть, первое собственное значение оператора A равно λ_0 , причём это собственное значение однократно.

Действительно, пусть $A\varphi_1 = \lambda_0\varphi_1$, тогда

$$\langle (A - \lambda_0)\varphi_1, \varphi_1 \rangle = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (\varphi_{1jx})^2 dx = 0.$$

Поэтому в качестве первой собственной функции можно взять

$$\varphi_1 = \left(\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j l_j \right)^{-\frac{1}{2}} (1, 1, \dots, 1, \dots).$$

Далее возьмём $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ и построим операторы $L = A - \lambda$, $M = -\alpha\mathbb{I}$, где $\mathbb{I}$ в данном случае есть оператор вложения $\mathbb{I} : \mathfrak{U} \rightarrow \mathfrak{F}$. Очевидно, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}; \mathfrak{F})$, причём оператор L фредгольмов, т. е. $\text{ind} L = 0$.

ЛЕММА 1.1. *При всех $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ или $\lambda \in \{\lambda_k\}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ оператор M $(L, 0)$ -ограничен, причём L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M есть замыкание множества $\{\mu_k = \alpha(\lambda - \lambda_k) : k \in \mathbb{N} \setminus \{n : \lambda_n = \lambda\}\}$.*

Доказательство. Если $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, то существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$, и результат вытекает из замечания 4.1.1 [13]. Если $\lambda \in \{\lambda_k\}$ и $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то результат вытекает из теоремы 4.6.1 [13]. $\square$

Отметим, что здесь и далее термин «оператор M $(L, 0)$ -ограничен» означает, что оператор M (L, σ) -ограничен и ∞ – устранимая особая точка L -резольвенты оператора M . Терминология формализована в [13, гл. 4].

Введём в рассмотрение банаховы пространства

$$\mathbf{L}_4(\mathbf{G}) = \{g = (g_1, g_2, \dots, g_j, \dots) : g_j \in \mathbf{L}_4(0, l_j)\}$$

с нормой

$$\|g\|_{\mathbf{L}_4(\mathbf{G})} = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} \left(d_j \int_0^{l_j} |g|^4 dx \right)^{1/4}$$

и

$$\mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G}) = \{h = (h_1, h_2, \dots, h_j, \dots) : h_j \in \mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(0, l_j)\}$$

с нормой

$$\|h\|_{\mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G})} = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} \left(d_j \int_0^{l_j} |h|^{\frac{4}{3}} dx \right)^{3/4}.$$

Как нетрудно видеть, имеют место непрерывные и плотные вложения

$$\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_4(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathbf{L}_2(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G}) \hookrightarrow \mathfrak{F}, \quad (6)$$

причём $\mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G})$ можно отождествить с сопряженным к $\mathbf{L}_4(\mathbf{G})$ относительно двойственности $\langle \cdot, \cdot \rangle$ пространством. Теперь возьмем $\beta \in \mathbb{R}$ и построим оператор $N : \mathbf{L}_4(\mathbf{G}) \rightarrow \mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G})$:

$$\langle N(u), v \rangle = -\beta \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^3 v_j dx, \quad u, v \in \mathbf{L}_4(\mathbf{G}).$$

ЛЕММА 1.2. *При любых $\beta \in \mathbb{R}$ оператор $N \in C^\infty(\mathfrak{U}, \mathfrak{F})$.*

В [8] доказано, что оператор $N \in C^\infty(\mathbf{L}_4(\mathbf{G}); \mathbf{L}_{\frac{4}{3}}(\mathbf{G}))$. Наш результат следует отсюда в силу вложений (6).

Итак, редукция задачи (2)–(4) к уравнению (5) закончена. Вектор-функцию $u \in C^\infty((-\tau, \tau); \mathfrak{U})$ назовём решением уравнения (5), если при некотором $\tau \in \mathbb{R}_+$ она удовлетворяет этому уравнению. Решение $u = u(t)$, $t \in (-\tau, \tau)$, уравнения (5) назовём решением задачи Коши, если при некотором $u_0 \in \mathfrak{U}$

$$u(0) = u_0. \quad (7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1. Множество $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$ называется *фазовым пространством уравнения (5)*, если

- (i) любое решение $u = u(t)$ лежит в $\mathfrak{P}$ поточечно, т. е. $u(t) \in \mathfrak{P}$, $t \in (-\tau, \tau)$;
- (ii) при любом $u_0 \in \mathfrak{P}$ существует единственное решение задачи (5), (7).

ТЕОРЕМА 1.1. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$ пространство $\mathfrak{U}$ является *фазовым пространством задачи (2)–(4)*.

Рассматривая задачу (2)–(4) в форме (5), заметим, что если $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, то существует оператор $L^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}; \mathfrak{U})$. Значит, (5) можно привести к эквивалентному виду

$$\dot{u} = F(u), \quad (8)$$

где оператор $F = L^{-1}(M + N) \in C^\infty(\mathfrak{U}; \mathfrak{U})$. Утверждение теоремы вытекает из классической теоремы Коши (см. например, [14, гл. IV]).

Рассмотрим случай $\lambda \in \{\lambda_k\}$, тогда $\ker L = \text{span}\{\varphi_k : \lambda = \lambda_k\}$, и в силу $(L, 0)$ -ограниченности оператора M уравнение (5) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} 0 &= M_0 u^0 + (\mathbb{I} - Q)N(u), \\ \dot{u}^1 &= L_1^{-1}(M_1 u^1 + QN(u)), \end{aligned} \quad (9)$$

где $u^1 = Pu$, $u^0 = u - u^1$,

$$P = \mathbb{I} - \sum_{\lambda_k = \lambda - \lambda_0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

— проектор в $\mathfrak{U}$, L_1 , M_1 — сужения операторов L , M на $\text{im } P$, M_0 — сужение оператора M на $\ker L$,

$$Q = \mathbb{I} - \sum_{\lambda_k = \lambda - \lambda_0} \langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k$$

— проектор в $\mathfrak{F}$. Понятно, что задача (5), (7) неразрешима, если

$$u_0 \notin \mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : M_0 u^0 + (\mathbb{I} - Q)N(u) = 0\}.$$

Поэтому рассмотрим множество $\mathfrak{M}$, которое в терминах задачи (2)–(4) выглядит следующим образом:

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : \alpha \langle u, \varphi_k \rangle + \beta \langle u^3, \varphi_k \rangle = 0, \lambda_k = \lambda\}. \quad (10)$$

ЛЕММА 1.3. Пусть $\lambda \in \{\lambda_k\}$, тогда при любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$, множество $\mathfrak{M}$ является простым банаховым C^∞ -многообразием.

Доказательство дословно переносится из [6]. Сначала с использованием теоремы Вишика—Минти—Браудера устанавливается существование оператора $K : \text{im } P \rightarrow \ker L$ такого, что для любого вектора $u^1 \in \text{im } P$ точка $u = u^1 + K(u^1) \in \mathfrak{M}$. Затем строится оператор $D : \text{im } P \rightarrow \mathfrak{M}$, $D : u^1 \rightarrow u^1 + K(u^1)$, который очевидно биективен (D^{-1} есть сужение проектора P на $\mathfrak{M}$). И, наконец, включение $D \in C^\infty(\text{im } P; \mathfrak{M})$ вытекает из теоремы о неявной функции.

ТЕОРЕМА 1.2. В условиях леммы 1.3 множество $\mathfrak{M}$ является фазовым пространством задачи (2)–(4).

Доказательство. Рассмотрим задачу (2)–(4) в форме (9). Обозначим через D'_{u_1} производную Фреше оператора D в точке $u^1 \in \text{im } P$. Подействовав оператором D'_{u_1} на второе уравнение (9), получим уравнение (8), где оператор $F = D'_{Pu} L_1^{-1} Q(M + N)$ есть сечение касательного расслоения $T\mathfrak{M}$. И опять утверждение теоремы вытекает из классической теоремы Коши ([14, гл. IV]). $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. Доказательство теоремы 1.2 можно провести иным способом. Рассмотрим на $\mathfrak{U}^1$ второе (нижнее) уравнение (9), которое запишем в эквивалентном виде

$$\dot{u}_1 = G(u_1), \quad (11)$$

где оператор $G = L_1^{-1} Q(M + ND) \in C^\infty(\mathfrak{U}^1)$. Теперь к задаче $u_1(0) = u_{01}$ применим все ту же теорему Коши и получим существование ее единственного решения $u_1 \in C^\infty(-\tau, \tau)$. Искомое решение исходной задачи (5), (7) при любом $u_0 \in \mathfrak{M}$ имеет вид $u(t) = u_1(t) + D(u_1(t))$, где $u_1 = u_1(t)$ решение задачи $u_1(0) = u_{01} = Pu_0$.

2. Устойчивость. Как было заявлено выше, мы намереваемся исследовать устойчивость нулевого решения задачи (2)–(4), используя модернизированный второй метод Ляпунова. Считаем нужным пояснить, почему мы прибегли именно ко второму методу; тем более что имеется успешный опыт применения первого метода Ляпунова (он же метод Адамара–Перрона, он же метод исследования устойчивости по линейному приближению) [15]. Дело в том, что возможности применения первого метода ограничены условием

$$\sigma^L(M) \cap \{i\mathbb{R}\} = \emptyset. \quad (12)$$

Между тем, как следует из леммы 1.1, L -спектр $\sigma^L(M)$ оператора M содержит точку нуль, и, стало быть, первый метод здесь неприменим в силу нарушения условия (12). Таким образом, в данной статье впервые применяется второй метод Ляпунова к изучению устойчивости нулевого решения полулинейных уравнений соболевского типа (5).

Теперь сделаем замечание о терминологии. В определении 4.1.1 [12] понятие «динамическая система» отождествляется с понятием «нелинейная полугруппа», хотя полугруппы (в том числе и нелинейные) естественно отождествлять с эволюционными процессами, так же как динамические процессы — с группами [16]. Кроме того, распознавание термина «динамическая система» в математике чрезвычайно затруднено из-за его непомерной перегруженности [17]. В [18, гл. 8А] нелинейные группы и полугруппы предложено называть потоками и полупотоками соответственно. В дальнейшем мы будем придерживаться именно этой терминологии.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть $\mathfrak{X}$ — метрическое пространство. Семейство $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$ операторов $S^t : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ называется *поток*ом на $\mathfrak{X}$, если

- (i) $S^0 = \mathbb{I} : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ — тождественный оператор;
- (ii) $S^t \cdot S^s = S^{t+s}$ при всех $t, s \in \mathbb{R}$;
- (iii) оператор $S^t : \mathfrak{X} \rightarrow \mathfrak{X}$ непрерывен при любом $t \in \mathbb{R}$;
- (iv) при любом $x \in \mathfrak{X}$ вектор-функция $S^t x \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{X})$.

Точка $x \in \mathfrak{X}$ называется *стационарной точкой* потока $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$, если $x = S^t x$ при всех $x \in \mathbb{R}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{\lambda_k\}$, то в силу теоремы 1.1 задача (2) – (4) задает поток на банаховом пространстве $\mathfrak{U}$. Если $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha\beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in \{\lambda_k\}$, то в силу теоремы 1.2 задача (2) – (4) задает поток на простом банаховом C^∞ -многообразии $\mathfrak{M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2. Пусть $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$ – поток на метрическом пространстве $\mathfrak{X}$. *Функцией Ляпунова* называется функционал $V \in C(\mathfrak{X}; \mathbb{R})$ такой, что

$$\dot{V}(x) = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0+} \frac{(V(S^t x) - V(x))}{t} \leq 0$$

при всех $x \in \mathfrak{X}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3. Пусть $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$ – поток на метрическом пространстве $\mathfrak{X}$, причём x – стационарная точка этого потока. Точка x называется *равномерно устойчивой*, если $S^t y \rightarrow x$ при $y \rightarrow x$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$. Точка x называется *равномерно асимптотически устойчивой*, если она равномерно устойчива и существует окрестность $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{X}$ точки x такая, что $S^t y \rightarrow x$ при $t \rightarrow +\infty$ равномерно по $y \in \mathfrak{D}$.

ТЕОРЕМА 2.1. (Теорема 4.1.4 [12]) Пусть $\{S^t : t \in \mathbb{R}\}$ – поток на метрическом пространстве $\mathfrak{X}$, причём $\mathbf{O}$ – стационарная точка этого потока. Пусть V – функция Ляпунова на $\mathfrak{X}$ такая, что

- (i) $V(\mathbf{O}) = 0$;
- (ii) $V(x) \geq \varphi(\|x\|)$, $x \in \mathfrak{X}$.

Тогда точка $\mathbf{O}$ – равномерно устойчива. Если вдобавок

- (iii) $\dot{V}(x) \leq -\psi(\|x\|)$, $x \in \mathfrak{X}$,

то точка $\mathbf{O}$ равномерно асимптотически устойчива.

Здесь $\varphi, \psi \in C(\mathbb{R}_+ \cup \{0\})$ – строго возрастающие функции такие, что $\varphi(0) = \psi(0) = 0$; $\|x\| = \text{dist}(x, \mathbf{O})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. В теореме 4.1.4 [12] $\mathfrak{X}$ – полное метрическое пространство. Однако внимательный анализ ее доказательства показывает, что требованием полноты можно пренебречь.

СЛЕДСТВИЕ 2.1. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda \in [0, \lambda_0)$ решение $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ задачи (2)–(4) равномерно асимптотически устойчиво.

Доказательство. По теореме 1.1 и замечанию 1.1 в этом случае задача (2)–(4) порождает поток на банаховом пространстве $\mathfrak{U}$. Снабдив это пространство нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbf{L}_4}$, превратим его в нормированное (метрическое пространство). Умножив уравнения (2) на u скалярно в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda_0 - \lambda) u_j^2) dx \leq -\beta \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^4 dx. \quad (13)$$

Определив функцию Ляпунова как

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} (u_{jx}^2 + (\lambda_0 - \lambda) u_j^2) dx,$$

мы сразу получим выполнение условия (i) теоремы 2.1. Далее в силу непрерывности вложения $\mathfrak{U} \hookrightarrow \mathbf{L}_4(\mathbf{G})$ мы имеем $V(u) \geq (c\|u\|)^2$, где $c \in \mathbb{R}_+$ — константа вложения. Таким образом, условие (ii) тоже выполнено. Наконец заметим, что в силу эквивалентности нормы в $\mathbf{L}_4(\mathbf{G})$ имеем

$$\sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^4 dx \geq (c_1\|u\|_{\mathbf{L}_4})^4.$$

Поэтому из (13) получаем $\dot{V}(u) \leq -2\beta(c_1\|u\|)^4$, что показывает выполнение условия (iii). $\square$

Следствие 2.2. При любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ и $\lambda = \lambda_0$ решение $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ равномерно устойчиво.

Доказательство. Здесь в качестве метрического пространства возьмем подпространство $\mathfrak{U}^1$, снабженное нормой $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathbf{L}_4}$. Умножив уравнения (2) скалярно в $\mathbf{L}_2(\mathbf{G})$ на u при $\lambda = \lambda_0$, получим

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{1jx}^2 dx \leq -\beta \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_j^4 dx. \quad (14)$$

Задачу (2)–(4) в случае $\lambda = \lambda_0$ можно привести к уравнению (10), которое определяет поток на $\mathfrak{U}^1$. Определив функцию Ляпунова как

$$V(u) = \sum_{E_j \in \mathfrak{E}} d_j \int_0^{l_j} u_{1jx}^2 dx,$$

мы получим выполнение условия (i) теоремы 2.1. Кроме того, $V^{1/2}$ определяет норму на $\mathfrak{U}^1$, эквивалентную индуцированной из $\mathfrak{U}$. Значит, $V(u) \geq (c\|u\|)^2$ в силу теоремы вложения.

Итак, решение $\mathbf{O} = (0, 0, \dots, 0, \dots)$ для потока на $\mathfrak{U}^1$, определенного задачей (2) – (4), равномерно устойчиво. Согласно замечанию 1.2 любое решение $u = u(t)$ задачи (2) – (4) имеет вид $u(t) = u_1(t) + D(u_1(t))$, где $D \in C^\infty(\mathfrak{U}^1; \mathfrak{M})$, $D(\mathbf{O}) = \mathbf{O}$. Поэтому если $u_0 \rightarrow \mathbf{O}$, то и $u_{10} = Pu_0 \rightarrow \mathbf{O}$, а значит в силу доказанного $u_1(t) = u_1(u_{10}, t) \rightarrow \mathbf{O}$ равномерно по $t \in \mathbb{R}$. $\square$

3. Заключение. В работе доказана равномерно асимптотическая устойчивость нулевого решения задачи (2)–(4) при $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\lambda \in [0, \lambda_0)$ и равномерная устойчивость при $\lambda = \lambda_0$. Параметр λ характеризует нагрузку, и поэтому он неотрицателен. Значит, λ_0 выступает здесь как предельная нагрузка, при которой конструкция еще устойчива. В дальнейшем авторы намерены исследовать неустойчивость данной конструкции при $\lambda > \lambda_0$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Hoff N. J. Creep buckling // *Aeron. Quarterly* 7, 1956. — No. 1. — P. 1–20.
2. Сидоров Н. А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. — Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1982. — 312 с.
3. Сидоров Н. А., Романова О. А. О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений // *Дифференц. уравнения*, 1983. — Т. 19, № 9. — С. 1516–1526; англ. пер.: Sidorov N. A., Romanova O. A. Application of branching theory in the solution of differential equations with degeneration // *Differ. Equations*, 1983. — Vol. 19, No. 9. — P. 1139–1148.

4. Сидоров Н. А., Фалалеев М. В. Обобщённые решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // *Дифференц. уравнения*, 1987. — Т. 23, № 4. — С. 726–728.
5. Свиридюк Г. А. Квазистационарные траектории полулинейных динамических уравнений типа Соболева // *Изв. РАН. Сер. матем.*, 1993. — Т. 57, № 3. — С. 192–207; англ. пер.: *Sviridyuk G. A. Quasistationary Trajectories of Semilinear Dynamical Equations of Sobolev Type // Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*, 1994. — Vol. 42, No. 3. — P. 601–614.
6. Свиридюк Г. А., Казак В. О. Фазовое пространство начально-краевой задачи для уравнения Хоффа // *Мат. заметки*, 2002. — Т. 71, № 2. — С. 292–297; англ. пер.: *Sviridyuk G. A., Kazak V. O. The Phase Space of an Initial-Boundary Value Problem for the Hoff Equation // Mathematical Notes*, 2002. — Vol. 71, No. 1–2. — P. 262–266.
7. Свиридюк Г. А., Тринеева И. К. Сборка Уитни в фазовом пространстве уравнения Хоффа // *Изв. вузов. Математика*, 2005. — № 10. — С. 54–60; англ. пер.: *Sviridyuk G. A., Trineeva I. K. A Whitney fold in the phase space of the Hoff equation // Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2005. — Vol. 49, No. 10. — P. 49–55.
8. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004. — 272 с.
9. Demidenko G. V., Uspenskii S. V. Partial differential equations and systems not solvable with respect to the highest-order derivative. — N.Y.; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker, Inc., 2003. — 490 p.
10. Свиридюк Г. А. Уравнения соболевского типа на графах / В сб.: *Неклассические уравнения математической физики*: Сб. науч. работ. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2002. — С. 221–225.
11. Свиридюк Г. А., Шеметова В. В. Уравнения Хоффа на графах // *Дифференц. уравнения*, 2006. — Т. 42, № 1. — С. 126–131.
12. Henry D. Geometric theory of semilinear parabolic equations / *Lecture Notes in Mathematics*, 840. — Berlin; New York: Springer-Verlag, 1981. — 348 pp.; русск. пер.: *Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений*. — М.: Мир, 1985. — 376 с.
13. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E. Linear Sobolev Type Equations and Degenerate Semigroups of Operators / Inverse and Ill-posed Problems Series*. — Utrecht; Boston; Köln; Tokyo: VSP, 2003. — 216 pp.
14. Lang S. Introduction to Differentiable Manifolds. — New York: Interscience, 1962. — 126 pp.; русск. пер.: *Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий*. — М.: Мир, 1967. — 203 с.
15. Китаева О. Г. Исследование устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий полулинейных уравнений соболевского типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02: защищена 09.06.06: утв. 10.11.06 / Китаева Ольга Геннадьевна. — Магнитогорск, 2006. — 111 с.
16. Свиридюк Г. А. Многообразие решений одного класса эволюционных и динамических уравнений // *ДАН СССР*, 1989. — Т. 304, № 2. — С. 301–304; англ. пер.: *Sviridyuk G. A. Manifolds of solutions of a class of evolution and dynamic equations // Soviet Math. Dokl.*, 1989. — Vol. 39, No. 1. — P. 78–81.
17. Аносов Д. В. Динамическая система / *Математическая энциклопедия*. Т. 2 Д–Кoo. — М., 1979. — С. 143–149.
18. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf Bifurcation and Its Applications / *Applied Mathematical Sciences*, 19. — New York: Springer-Verlag, 1976. — 424 pp.; русск. пер.: *Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и её приложения*. — М.: Мир, 1980. — 368 с.

Поступила в редакцию 15/VII/2009;
в окончательном варианте — 13/III/2010.

MSC: 35B35, 35K70

HOFF EQUATION STABILITY ON A GRAPH

*G. A. Sviridyuk*¹, *S. A. Zagrebina*¹, *P. O. Pivovarova*²

¹ State University of South Ural,
454080, Chelyabinsk, Lenin ave., 76

² State University of Magnitogorsk,
455000, Magnitogorsk, Lenin ave., 114

E-mails: ridyu@math.susu.ac.ru, zsophiya@mail.ru, pelageia@bk.ru

We consider the stability of stationary solutions of the Hoff equation on a graph, which is a model design of I-beams. The basic approach is the second Lyapunov method, modified according to our situation. In the end explains the technical meaning of the parameter λ_0 .

Key words: *Hoff equations, stability, Lyapunov function, graph.*

Original article submitted 15/VII/2009;
revision submitted 13/III/2010.

Georgy A. Sviridyuk (Dr. Sc. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Mathematical Physics Equations. *Sophiya A. Zagrebina* (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Mathematical Physics Equations. *Polina O. Pivovarova*, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis.