Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. И. Паровик, Задача Коши для нелокального уравнения диффузии-адвекции радона во фрактальной среде, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 127–132

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 17:17:39

Математическое моделирование

УДК 517.958

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ—АДВЕКЦИИ РАДОНА ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ

Р. И. Паровик

Институт космических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН,
684034, Камчатский край, с. Паратунка ул. Мирная, 7.

E-mail: romano84@mail.ru

С помощью метода функции Грина решена задача Коши для уравнения аномальной диффузии-адвекции радона во фрактальной среде, которое представлено с помощью дробной производной Капуто по времени и дробной производной Рисса—Вейля по пространственной координате.

Ключевые слова: радон, супердиффузия, субдиффузия, фрактальная геосреда, задача Коши, функция Грина.

Введение. В настоящее время все больший интерес вызывает теория массопереноса во фрактальных средах, которая рассматривается в рамках физики открытых систем [1–3]. Этот интерес вызван тем, что многочисленные геофизические и экспериментальные данные указывают на то, что геосреда является нелинейной, имеет блочную структуру или обладает фрактальными свойствами [4]. В таких средах процесс массопереноса может происходить либо более интенсивно, либо наоборот, менее интенсивно, чем в средах с однородной структурой. Механизмы массопереноса в средах с фрактальной структурой называются аномальными, а математические модели, описывающие такие механизмы, — нелокальными [3]. Математический аппарат для описания переноса в таких средах достаточно хорошо разработан и основан на дробном исчислении [5–7].

Настоящая работа посвящена разработке математических нелокальных моделей переноса радона в пористом грунте. Практическая значимость изучения диффузии радона очень велика. Радон является индикатором геодинамических процессов, происходящих в земной коре. Например, деформационные возмущения имеют отклики в радоновых полях, которые характеризуются аномальными значениями концентрации радона и могут при определенных условиях являться предвестниками сейсмических событий [8, 9].

В работе решена задача Коши для уравнения аномальной диффузии радона в грунте. Уравнение включает в себя два режима переноса: режим супердиффузии и режим субдиффузии. Режим супердиффузии характеризует перенос, который протекает более интенсивно, чем перенос в режиме обычной диффузии [10]. Такой режим связан с пространственной нелокальностью

Роман Иванович Паровик (к.ф.-м.н.), младший научный сотрудник, лаб. физики атмосферы.

(полеты Леви) [7]. Режим субдиффузии является менее интенсивным процессом переноса, чем процесс обычной диффузии, и учитывает эффекты памяти (ловушки) [7].

1. Обобщенные законы Фика и неразрывности. Известно, что уравнение диффузии—адвекции радона в однородном пористом грунте можно получить из закона неразрывности и закона Фика [10] при $t > 0$, $x > 0$:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = -\lambda u(x, t) + \frac{Q}{\eta}, \quad q(x, t) = -D \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - v \quad (1)$$

и записать

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + v \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} - \lambda u(x, t) + \frac{Q}{\eta}. \quad (2)$$

Здесь D — коэффициент диффузии радона в грунте ($\text{м}^2/\text{с}$); v — скорость адвекции радона в грунте ($\text{м}/\text{с}$); η — пористость грунта (отн. ед.); λ — постоянная распада радона ($1/\text{с}$); $Q = \lambda \eta u_0$ — источник радона, обусловленный материнским содержанием радия в грунте ($\text{Бк}/(\text{м}^3\text{с})$); $u_0(x, t)$ — поровая активность радона, который находится в радиоактивном равновесии с радием на заданной глубине в грунте ($\text{Бк}/\text{м}^3$); $u(x, t)$ — поровая активность радона в грунте ($\text{Бк}/\text{м}^3$).

Если пористый грунт обладает фрактальными свойствами, т.е. в нём присутствуют эффекты памяти и пространственные корреляции, то законы неразрывности и Фика (1) обобщаются, и их можно записать в следующей форме [7]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial t^\beta} + \frac{\partial^\gamma q(x, t)}{\partial x^\gamma} &= -\lambda(u(x, t) - u_0(x, t)), \\ q(x, t) &= -D \frac{\partial^\gamma u(x, t)}{\partial x^\gamma} - v, \quad 0 < \beta \leq 1, \quad 1/2 < \gamma \leq 1. \end{aligned} \quad (3)$$

Производные в (3) имеют следующий смысл:

$$\frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial t^\beta} = \partial_{0t}^\beta u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^t \frac{\partial u(x, \zeta)}{\partial \zeta} (t - \zeta)^{-\beta} d\zeta$$

— производная Капуто;

$$\frac{\partial^\gamma u(x, t)}{\partial x^\gamma} = \frac{1}{2\Gamma(1 - \gamma) \cos(\frac{\pi}{2}(1 - \gamma))} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\zeta, t)}{|x - \zeta|^\gamma} d\zeta$$

— производная Рисса—Вейля.

Уравнение (2) с учётом (3) можно переписать в виде

$$\frac{\partial^\beta u(x, t)}{\partial t^\beta} = D \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial x^\alpha} + v \frac{\partial^\gamma u(x, t)}{\partial x^\gamma} - \lambda(u(x, t) - u_0(x, t)), \quad 1 < \alpha \leq 2. \quad (4)$$

Введём характерное время t_0 , масштаб x_0 и соответствующие безразмерные координаты $\tau = t/t_0$, $\xi = x/x_0$. Тогда уравнение (4) будет записано в безразмерных координатах:

$$\frac{\partial^\beta u(\xi, \tau)}{\partial \tau^\beta} = \bar{D} \frac{\partial^\alpha u(\xi, \tau)}{\partial \xi^\alpha} + \bar{v} \frac{\partial^\gamma u(\xi, \tau)}{\partial \xi^\gamma} - \bar{\lambda}(u(\xi, \tau) - u_0(\xi, \tau)). \quad (5)$$

Параметры переноса в грунте $\bar{D}$, $\bar{v}$, $\bar{\lambda}$ будут являться тоже безразмерными заданными величинами. Уравнение (5) является основным уравнением переноса радона в грунте, который обладает фрактальными свойствами.

2. Метод функции Грина решения задачи Коши для уравнения аномальной диффузии радона во фрактальной среде. Найдём с помощью функции Грина решение задачи Коши, положив для простоты $u_0(\xi, \tau) = \bar{v} = \bar{\lambda} = 0$ в (5):

$$\frac{\partial^\beta G(\xi, \tau)}{\partial \tau^\beta} = \bar{D} \frac{\partial^\alpha G(\xi, \tau)}{\partial \xi^\alpha}, \quad \xi \geq 0, \quad \tau \geq 0; \quad (6)$$

$$G(\xi, 0) = \delta(\xi).$$

Уравнение (6) является уравнением аномальной диффузии. Когда $\beta = 1$ и $\alpha = 2$, оно переходит в классическое уравнение математической физики, которое используется в задачах тепломассопереноса [2]. В работе [11] было найдено фундаментальное решение задачи Коши, когда в правой части (6) $\alpha = 0$. Найдём фундаментальное решение задачи (6) для $1 < \alpha < 2$. Для этого сделаем преобразование Фурье по пространственной координате ξ . Приходим к следующей задаче Коши:

$$\partial_{0\tau}^\beta F(k, \tau) = \bar{D} |k|^\alpha F(k, \tau), \quad F(k, 0) = 1. \quad (7)$$

Решение задачи (7) известно [5]. Его можно записать следующим образом:

$$F(k, \tau) = E_\beta(-\bar{D} |k|^\alpha \tau^\beta),$$

где $E_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n / \Gamma(\beta n + 1)$ — функция Миттаг—Леффлера. Решение также можно представить через функцию Фокса [5]:

$$F(k, \tau) = E_\beta(-\bar{D} |k|^\alpha \tau^\beta) = H_{12}^{11} \left(\bar{D} |k|^\alpha \tau^\beta \left| \begin{smallmatrix} (0,1) \\ (0,1), (0,\beta) \end{smallmatrix} \right. \right), \quad (8)$$

где $H_{p,q}^{m,n}(z)$ — функция Фокса. Выполняя обратное преобразование Фурье выражения (8), получим

$$\begin{aligned} G(\xi, \tau) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\xi} H_{12}^{11} \left(\bar{D} |k|^\alpha \tau^\beta \left| \begin{smallmatrix} (0,1) \\ (0,1), (0,\beta) \end{smallmatrix} \right. \right) dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \sqrt{k\xi} J_{-1/2}(k\xi) H_{12}^{11} \left(\bar{D} |k|^\alpha \tau^\beta \left| \begin{smallmatrix} (0,1) \\ (0,1), (0,\beta) \end{smallmatrix} \right. \right) dk = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi} H_{32}^{12} \left(\frac{2^\alpha \bar{D} \tau^\beta}{|\xi|^\alpha} \left| \begin{smallmatrix} (1/2,1), (0,1), (0,1) \\ (0,1), (0,\beta) \end{smallmatrix} \right. \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi} H_{23}^{21} \left(\frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha \bar{D} \tau^\beta} \left| \begin{smallmatrix} (1,1), (1,\beta) \\ (1/2,1), (1,1), (1,1) \end{smallmatrix} \right. \right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\xi} H_{12}^{20} \left(\frac{|\xi|^\alpha}{2^\alpha \bar{D} \tau^\beta} \left| \begin{smallmatrix} (1,\beta) \\ (1/2,1), (1,1) \end{smallmatrix} \right. \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Решение (9) является функцией Грина $G(\xi, \tau)$ для задачи (6).

Пусть начальное условие для уравнения (6) $u(\xi, 0) = \phi_0(\xi)$, тогда решение такой задачи Коши можно записать следующим образом:

$$u(\xi, \tau) = \int_0^\xi G(\xi - \zeta, \tau) \phi_0(\zeta) d\zeta. \quad (10)$$

Заметим, что функция Грина $G(\xi, \tau)$ при значениях параметров $\alpha = 2$ и $\beta = 1$ переходит в функцию Грина для классической задачи диффузии. Действительно, можно показать, что

$$G(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}} H_{12}^{20} \left(\frac{\xi^2}{4D\tau} \middle| \begin{matrix} (1,1) \\ (1/2,1), (1,1) \end{matrix} \right) = \frac{1}{2\sqrt{D\tau}} e^{-\frac{\xi^2}{4D\tau}}.$$

3. Метод функции Грина решения задачи Коши для уравнения аномальной диффузии-адвекции радона во фрактальной среде. Найдём функцию Грина для уравнения (5):

$$\frac{\partial^\beta G(\xi, \tau)}{\partial \tau^\beta} - \bar{D} \frac{\partial^\alpha G(\xi, \tau)}{\partial \xi^\alpha} - \bar{v} \frac{\partial^\gamma G(\xi, \tau)}{\partial \xi^\gamma} + \bar{\lambda} G(\xi, \tau) = \delta(\xi) \delta(\tau), \quad \xi > 0, \tau > 0. \quad (11)$$

Применяя преобразование Фурье по координате ξ и Лапласа по τ , получим уравнение $G(k, p) = 1/(p^\beta + \Lambda + \bar{\lambda})$, где $\Lambda = -\bar{D}|k|^\alpha - \bar{v}|k|^\gamma$, и затем преобразуем к виду

$$G(k, p) = \frac{\Lambda}{\Lambda(p^\beta + \bar{\lambda})} \cdot \frac{1}{1 + \Lambda/(p^\beta + \bar{\lambda})}. \quad (12)$$

С учётом того, что $|\Lambda/(p^\beta + \bar{\lambda})| < 1$, получим

$$G(k, p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\Lambda)^n}{(p^\beta + \bar{\lambda})^{n+1}}.$$

Используя формулы [5]

$$\left(\frac{\partial}{\partial \lambda} \right)^n \left[t^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda t^\alpha) \right] = n! t^{\alpha n + \beta - 1} E_{\alpha, \alpha n + \beta}^{n+1}(\lambda t^\alpha),$$

$$L \left[t^{\alpha n + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{n+1}(\lambda t^\alpha) \right] = \frac{n! p^{\alpha - \beta}}{(p^\alpha - \lambda)^{n+1}},$$

выполняем обратное преобразование Лапласа для выражения (12) и получаем

$$G(k, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\Lambda)^n \tau^{\beta n + \beta - 1} E_{\beta, \beta n + \beta}^{n+1}(-\lambda \tau^\beta). \quad (13)$$

Здесь

$$E_{\alpha, \beta}^{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)_k z^k}{k! \Gamma(\alpha + \beta k)}$$

— обобщённая функция Миттаг—Леффлера [5]. Применяя обратное преобразование Фурье к выражению (13) и учитывая, что

$$\begin{aligned} F[(-\Lambda)^n] &= F[(\bar{D}|k|^\alpha + \bar{v}|k|^\gamma)^n] = \\ &= F \left[\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \bar{D}^{n-l} \bar{v}^l |k|^{\alpha n + l(\gamma - \alpha)} \right] = \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \bar{D}^{n-l} \bar{v}^l F[|k|^{\alpha n + l(\gamma - \alpha)}] = \end{aligned}$$

$$= -2 \sum_{l=0}^n \binom{n}{l} \bar{D}^{n-l} \bar{v}^l \sin(\omega\pi/2) \Gamma(\omega+1) |\xi|^{-\omega-1} = -2A_{n,l}, \quad \omega = \alpha n + l(\gamma - \alpha)$$

получим

$$G(\xi, \tau) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,l} \tau^{\beta n + \beta - 1} E_{\beta, \beta n + \beta}^{n+1}(-\lambda \tau^{\beta}). \quad (14)$$

Решение (14) является функцией Грина $G(\xi, \tau)$ для уравнения (11). Если для уравнения (11) источник радона представляет собой функцию $u_0(\xi, \tau)$, то решение этого уравнения можно представить согласно теореме о свертке в виде [7]

$$u(\xi, \tau) = \bar{\lambda} \int_0^{\tau} \int_0^{\xi} u_0(\zeta, \varsigma) G(\xi - \zeta, \tau - \varsigma) d\varsigma d\zeta. \quad (15)$$

Если источник радона величина постоянная $u_0(\zeta, \varsigma) = u_0 = \text{const}$, то решение (15) будет иметь вид $u(\xi, \tau) = \bar{\lambda} u_0 G(\xi, \tau)$. Решение задачи Коши для уравнения (11) можно представить так:

$$u(\xi, \tau) = \bar{\lambda} \int_0^{\tau} \int_0^{\xi} u_0(\zeta, \varsigma) G(\xi - \zeta, \tau - \varsigma) d\varsigma d\zeta + \int_0^{\xi} \phi_0(\xi) \partial_{0\tau}^{\beta-1} G(\xi - \zeta, \tau) d\zeta. \quad (16)$$

Если положить в (16), что функции источника и начального распределения концентрации радона в грунте являются константами, то мы получим следующее решение задачи Коши уравнения (11):

$$u(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n,l} \tau^{\beta n} (\bar{\lambda} u_0 \tau^{\beta} E_{\beta, \beta n + \beta + 1}^{n+1}(-\lambda \tau^{\beta}) + E_{\beta, \beta n + 1}^{n+1}(-\lambda \tau^{\beta})), \quad (17)$$

где $B_{n,l} = -A_{n,l}/\pi$.

Особенностью решения (17) является то, что концентрация радона к земной поверхности падает по степенному закону, а не по экспоненциальному, как в классическом случае ($\beta, \gamma = 1, \alpha = 2$), и поэтому радона больше выноситься к земной поверхности.

4. Заключение. В грунте, который обладает фрактальной структурой, существуют различные аномальные процессы переноса: субдиффузия, супердиффузия, аномальная адвекция. В зависимости от фрактальных параметров α , β и γ будет преобладать тот или иной режим переноса, что может характеризовать изменение фрактальных свойств грунта (геосреды). Такое изменение свойств геосреды может происходить в результате деформационных возмущений, которые могут предшествовать сейсмическим событиям.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (код проекта РНП 2.1.1/544).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Беданоква С. Ю. Математическое моделирование водного и солевого режимов в почвах с фрактальной организацией: Автореф. дисс. ... канд. физ.-мат. наук: 05.13.18. — Таганрог: Юж. фед. ун-т, 2007. — 16 с.
2. Мейланов Р. П., Шабанова М. Р. Уравнение теплопроводности для сред с фрактальной структурой // *Современные наукоёмкие технологии*, 2007. — № 8. — С. 84–85.

3. Сербина Л. И. Нелокальные математические модели переноса в водоносных системах. — М.: Наука, 2006. — 167 с.
4. Лукж А. А., Дещеревский А. В., Сидорин А. Я., Сидорин И. А. Вариации геофизических полей как проявления детерминированного хаоса во фрактальной среде. — М.: ОИФЗ РАН, 1996. — 210 с.
5. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies, 204; ed. J. van Mill. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 pp.
6. Нахушев В. В. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
7. Учайкин В. В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, 2008. — 512 с.
8. Рудаков В. П. Мониторинг напряжённо-деформированного состояния пород сейсмоактивного региона эманационным методом // *Геохимия*, 1986. — № 9. — С. 1337–1342.
9. Фирстов П. П., Рудаков В. П. Регистрация подпочвенного радона в 1997–2000 гг. на Петропавловск–Камчатском геодинамическом полигоне // *Вулканология и сейсмология*, 2002. — № 6. — С. 1–6.
10. Новиков Г. Ф., Капков Ю. Н. Радиоактивные методы разведки. — Л.: Недра, 1965. — 759 с.
11. Глушак А. В. О связи решений абстрактных дифференциальных уравнений, содержащих дробные производные // *Вестн. Воронеж. гос. ун-та. Сер. Физ. и матем.*, 2002. — № 2. — С. 56–58.

Поступила в редакцию 11/X/2009;
в окончательном варианте — 04/I/2010.

MSC: 65N80

CAUCHY PROBLEM FOR THE NONLOCAL EQUATION DIFFUSION-ADVECTION RADON IN FRACTAL MEDIA

R. I. Parovik

Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation of FEB RAS,
7, Mirnaya str., Paratunka, Kamchatka Edge, 684034.

E-mail: romano84@mail.ru

In this article, using the Green's function method the Cauchy problem is solved for the equation of anomalous diffusion-advection of radon in a fractal medium, which is represented by a fractional derivative of the Caputo time fractional derivative and Riesz-Weil on the spatial coordinate.

Key words: radon, superdiffusion, subddiffusion, Cauchy problem, Green's function.

Original article submitted 11/X/2009;
revision submitted 04/I/2010.

Roman I. Parovik (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Researcher, Lab. of Atmospheric Physics.