Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Кудинов, В. П. Радченко, Получение аналитических решений нелинейных задач теплопроводности на основе введения дополнительных граничных условий, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 162–170

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 18:15:58

УДК 517.958+519.633

ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ОСНОВЕ ВВЕДЕНИЯ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

*И. В. Кудинов, В. П. Радченко*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: igor_koudinov@mail.ru; radch@samgtu.ru

С использованием интегрального метода теплового баланса на основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий рассматривается методика нахождения аналитических решений нелинейных задач нестационарной теплопроводности, позволяющая получать решения удовлетворительной точности во всем диапазоне изменения числа Фурье. Решения имеют простой вид степенных алгебраических полиномов, не содержащих специальных функций.

Ключевые слова: нелинейные задачи, аналитические методы, фронт температурного возмущения, дополнительные граничные условия, интеграл теплового баланса.

Известно, что решения задач теплопроводности, полученные с помощью классических аналитических методов, представляются в форме бесконечных рядов, плохо сходящихся в окрестностях граничных точек и при малых значениях временной координаты. К методам, позволяющим избежать указанных трудностей, относятся интегральные методы теплового баланса [1–4]. Однако их широкое применение сдерживается недостаточной точностью получаемых решений. Все попытки увеличения точности не приводили к существенным результатам [3, 4].

Ниже изложен метод, относящийся к группе интегральных методов теплового баланса и позволяющий получать аналитические решения нелинейных задач нестационарной теплопроводности с достаточно высокой точностью практически во всем диапазоне времени нестационарного процесса ($0 \leq Fo < \infty$) без каких-либо ограничений на величину числа Фурье в области малых его значений. Основную идею метода рассмотрим на примере решения нелинейной задачи при линейной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры $a(T) = a_0(1 + \beta T)$. Математическая постановка задачи для бесконечной пластины при граничных условиях первого рода имеет вид:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[1 + \beta (\Theta + T_0) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \quad (Fo > 0; 0 < \xi \leq 1); \quad (1)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \quad (2)$$

$$\Theta(0, Fo) = \Delta T; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad (4)$$

Игорь Васильевич Кудинов, аспирант, каф. прикладной математики и информатики. *Владимир Павлович Радченко* (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. прикладной математики и информатики.

где T — температура; T_0 — начальная температура; $\Theta = (T - T_0)$ — избыточная температура; $Fo = a\tau/R^2$ — число Фурье; $\xi = x/R$ — безразмерная координата; x — координата; R — половина толщины пластины; a_0 — коэффициент температуропроводности; $T_{ст}$ — температура стенки; β — коэффициент; $\Delta T = T_{ст} - T_0$.

Процесс нагрева разделим на две стадии по времени: $0 < Fo \leq Fo_1$ и $Fo_1 \leq Fo < \infty$. Для этого введём движущуюся во времени границу (фронт температурного возмущения), разделяющую исходную область $0 \leq \xi \leq 1$ на две подобласти: $0 \leq \xi \leq q_1(Fo)$ и $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$, где $q_1(Fo)$ — функция, определяющая продвижение границы раздела во времени (см. рис. 1).

При этом в области, расположенной за фронтом температурного возмущения, сохраняется начальная температура. Первая стадия процесса заканчивается при достижении движущейся границей центра пластины ($\xi = 1$), т. е. когда $Fo = Fo_1$. Во второй стадии изменение температуры происходит по всему объёму тела ($0 \leq \xi \leq 1$). Здесь вводится в рассмотрение дополнительная искомая функция $q_2(Fo) = \Theta(1, Fo)$, характеризующая изменение температуры во времени в центре пластины.

Математическая постановка краевой задачи для первой стадии процесса в результате введения фронта температурного возмущения $q_1(Fo)$ будет включать уравнение (1) с граничным условием (2), а также следующие граничные условия, выполняющиеся на фронте температурного возмущения:

$$\Theta(q_1, Fo) = 0; \quad (5)$$

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} = 0, \quad 0 \leq \xi \leq q_1(Fo), \quad (6)$$

где соотношения (5), (6) представляют условия сопряжения прогретой и непрогретой зон. Соотношение (5) устанавливает равенство температуры тела в точке $\xi = q_1(Fo)$ его начальной температуре. Согласно условию (6) тепловой поток не распространяется за пределы фронта температурного возмущения (условие адиабатной стенки).

Обратим внимание на тот очевидный факт, что на первой стадии процесса задача (1), (2), (5), (6) за пределами фронта температурного возмущения, т. е. на отрезке $q_1(Fo) \leq \xi \leq 1$, вообще не определена. В связи с этим здесь нет необходимости выполнения начального условия вида (2) по всей толщине пластины (поэтому такое условие отсутствует в математической постановке задачи (1), (3), (5), (6)). В данном случае вполне достаточным является выполнение граничного условия (5), согласно которому для всех $\xi = q_1(Fo)$ температура тела равна начальной температуре. Кроме того, в данной задаче отсутствует также граничное условие вида (4) ввиду того, что оно не влияет на процесс теплообмена в первой его стадии.

Потребуем, чтобы искомое решение задачи (1), (3), (5), (6) удовлетворяло не первоначальному уравнению (1), а осредненному по толщине термического

Рис. 1. Расчётная схема теплообмена

сложая (интегралу теплового баланса)

$$\int_0^{q_1} \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} d\xi = \int_0^{q_1} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] d\xi. \quad (7)$$

Вычисляя интеграл в правой части соотношения (7), с учетом (6) находим

$$\frac{\partial}{\partial Fo} \int_0^{q_1} \Theta(\xi, Fo) d\xi = -(1 + \beta T_{ст}) \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi}. \quad (8)$$

Решение задачи (1), (3), (5), (6) разыскивается в виде следующего полинома

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=0}^n b_k(q_1) \xi^k, \quad (9)$$

где неизвестные коэффициенты $b_k(q_1)$ ($k \equiv 0, 1, 2$) находятся из граничных условий (3), (5), (6). После их определения соотношение (9) примет вид

$$\Theta(\xi, Fo) = \Delta T \left(1 - \frac{\xi}{q_1} \right)^2. \quad (10)$$

Подставляя (10) в интеграл теплового баланса (8), будем иметь

$$\frac{d}{dFo} \int_0^{q_1} \left(1 - \frac{\xi}{q_1} \right)^2 d\xi = \frac{2(1 + \beta T_{ст})}{q_1(Fo)}. \quad (11)$$

Отсюда для определения неизвестной функции $q_1(Fo)$ приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$q_1(Fo) dq_1(Fo) = 6(1 + \beta T_{ст}) dFo, \quad (12)$$

интегрируя которое при начальном условии $q_1(0) = 0$, находим

$$q_1(Fo) = \sqrt{12(1 + \beta T_{ст}) Fo}. \quad (13)$$

Соотношения (10), (13) определяют решение задачи (1), (3), (5), (6) в первом приближении. Положив $q_1(Fo_1) = 1$, из (13) найдем время окончания первой стадии процесса

$$Fo = Fo_1 = \frac{1}{12(1 + \beta T_{ст})}. \quad (14)$$

Введём относительную избыточную температуру по формуле

$$\bar{\Theta}(\xi, Fo) = \frac{\Theta(\xi, Fo)}{T_{ст} - T_0}. \quad (15)$$

С учётом принятого обозначения соотношение (11) запишется так:

$$\bar{\Theta}(\xi, Fo) = \left(1 - \frac{\xi}{q_1} \right)^2. \quad (16)$$

При $\beta = 0$ (линейная задача) соотношение (14) приводится к виду

$$q_1 = \sqrt{12Fo}. \quad (17)$$

Последние два соотношения полностью совпадают с формулами, полученными при решении в первом приближении линейной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при граничных условиях первого рода.

Результаты расчетов нелинейной задачи по формуле (16) при $\beta = 0,001$, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $T_{\text{ст}} = 100^\circ\text{C}$ в сравнении с расчётом по конечно-разностному методу прогонки представлены на графиках рис. 2. Их анализ позволяет сделать вывод, что максимальное расхождение результатов в диапазоне числа Фурье $1,5 \cdot 10^{-6} \leq Fo \leq 0,05$ не превышает 6%.

Для повышения точности аналитического решения привлечем дополнительные граничные условия. Для этого будем последовательно дифференцировать уравнение (1) по переменной ξ , а граничные условия (3), (5), (6) — по переменной Fo .

Для получения первого дополнительного граничного условия продифференцируем (3) по Fo :

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (18)$$

Запишем уравнение (1) для точки $\xi = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial Fo} = \\ = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right]_{\xi=0}. \end{aligned} \quad (19)$$

Сравнивая (18) и (19), получаем первое дополнительное граничное условие

$$\beta \left(\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial \xi} \right)^2 + (1 + \beta T_{\text{ст}}) \frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (20)$$

Для получения второго дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (5) по Fo , учитывая, что $\xi = q_1(Fo)$ является функцией Fo и, следовательно, $\Theta = (\xi, Fo)$ также будет сложной функцией:

$$\frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi} \frac{dq_1}{dFo} + \frac{\partial \Theta(q_1, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (21)$$

Запишем уравнение (1) для $\xi = q_1(Fo)$:

$$\frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo} \Big|_{\xi=q_1} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right]_{\xi=q_1}. \quad (22)$$

Рис. 2. Распределение безразмерной температуры $\bar{\Theta} = \frac{T-T_0}{T_{\text{ст}}-T_0}$: сплошная линия по формуле (27) (второе приближение); $\circ$ — метод прогонки; $\times$ — по формуле (16) (первое приближение); $\beta = 0,001$

Сравнивая (21) и (22), с учётом соотношений (5), (6) получим второе дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^2} = 0. \quad (23)$$

Для получения третьего дополнительного граничного условия продифференцируем соотношение (6) по Fo с учётом того, что переменная ξ является функцией Fo:

$$\frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi^2} \frac{dq_1}{dFo} + \frac{\partial^2 \Theta(q_1, Fo)}{\partial \xi \partial Fo} = 0. \quad (24)$$

Продифференцируем уравнение (1) по переменной ξ и применим полученное соотношение для $\xi = q_1(Fo)$:

$$\left. \frac{\partial^2 \Theta(\xi, Fo)}{\partial Fo \partial \xi} \right|_{\xi=q_1} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(\xi, Fo)}{\partial \xi} \right] \right\}_{\xi=q_1}. \quad (25)$$

Сравнивая (24) и (25), с учётом соотношений (6) и (23) получим третье дополнительное граничное условие

$$\partial^3 \Theta(q_1, Fo) \partial \xi^3 = 0. \quad (26)$$

Подставляя (9) (ограничиваясь шестью членами ряда) в граничные условия (3), (5), (6), (20), (23), (26), для определения коэффициентов $b_k(q_1)$ ($k \equiv 0, 1, \dots, 5$) получим систему шести алгебраических линейных уравнений. Подставляя найденные из решения этой системы коэффициенты $b_k(q_1)$ в (9), получаем

$$\Theta(\xi, Fo) = \Delta T + B_1 \frac{\xi}{q_1} + B_2 \frac{\xi^2}{q_1^2} - B_3 \frac{\xi^3}{q_1^3} + B_4 \frac{\xi^4}{q_1^4} + B_5 \frac{\xi^5}{q_1^5}, \quad (27)$$

где $B_1 = 2r - \sqrt{B}$, $B_2 = 2(2\sqrt{B} - 5\Delta T - 4r)$, $B_3 = -2(3\sqrt{B} - 10\Delta T - 6r)$, $B_4 = 4\sqrt{B} - 15\Delta T - 8r$, $B_5 = 4\Delta T + 2r - \sqrt{B}$, $B = 10r\Delta T + 4r^2$, $r = \frac{2}{\beta}(1 + \beta T_{ст})$.

Подставляя (27) в интеграл теплового баланса (8), приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $q_1(Fo)$:

$$q dq = k_1 dFo, \quad (28)$$

где

$$k_1 = -30 \frac{2(1+2\beta T_{ст}) - \beta\sqrt{k} + \beta^2 T_{ст}(2T_{ст} - \sqrt{k})}{5\Delta T\beta + 2(1+\beta T_{ст}) - \beta\sqrt{k}}; \quad k = \frac{1}{\beta^2} (1 + \beta T_{ст}) (5\Delta T\beta + 4 + 4\beta T_{ст}).$$

Интегрируя уравнение (27), при начальном условии $q_1(0) = 0$ получим

$$q_1(Fo) = \sqrt{2k_1 Fo}. \quad (29)$$

Положив в (29) $q_1(Fo_1) = 1$, найдем время окончания первой стадии процесса во втором приближении: $Fo_1 = (2k_1)^{-1}$ или с учетом выше приведенных данных — $Fo_1 = 0,04713$.

Соотношения (27), (29) определяют решение задачи (1), (3), (5), (6) во втором приближении. Непосредственной подстановкой можно убедиться, что все

основные и дополнительные граничные условия, а также интеграл теплового баланса удовлетворяются точно. Дифференциальное уравнение (1) благодаря использованию дополнительных граничных условий точно выполняется во всех точках по координате ξ , в которых в данный момент времени находится фронт температурного возмущения, включая точки $\xi = 0$ и $\xi = 1$.

Результаты расчетов по формуле (27) и по методу прогонки представлены на рис. 2. Из анализа графиков следует, что в диапазоне чисел $0 \leq \text{Fo} \leq 0,0000015$ расхождение результатов находится в пределах 1 %. Расчёты по формуле (27) выполнялись для функции $\bar{\Theta}(\xi, \text{Fo}) = \Theta(\xi, \text{Fo})/\Delta T$.

Вторая стадия теплового процесса, соответствующая времени $\text{Fo} \geq \text{Fo}_1$, характеризуется изменением температуры уже по всему сечению пластины, вплоть до наступления стационарного состояния. На этой стадии понятие термического слоя теряет смысл, и в качестве дополнительной искомой функции принимается температура в центре пластины $\Theta(1, \text{Fo}) = q_2(\text{Fo})$ (рис. 1).

Математическая постановка задачи в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 + \beta(\Theta + T_0)) \frac{\partial \Theta(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right] \quad (\text{Fo} \geq \text{Fo}_1; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (30)$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = \Delta T; \quad \Theta(1, \text{Fo}) = q_2(\text{Fo}); \quad \frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0. \quad (31)$$

Начальным условием задачи (30), (31) будет соотношение (10) при $\text{Fo} = \text{Fo}_1$ и при $q_1(\text{Fo}_1) = 1$, т. е.

$$\Theta(\xi, \text{Fo}_1) = \Delta T (1 - \xi^2). \quad (32)$$

Отметим, что специального выполнения начального условия (32) не требуется. Оно будет выполнено в процессе получения решения задачи (30), (31). Это связано с тем, что при $\text{Fo} = \text{Fo}_1$, т. е. когда $q_1(\text{Fo}_1) = 1$ и $q_2(\text{Fo}_1) = 0$, математические постановки задач (1), (3), (5), (6) и (30), (31) полностью совпадают. Следовательно, и решения этих задач при $\text{Fo} = \text{Fo}_1$ будут идентичными. Таким образом, происходит плавный переход от задачи (1), (3), (5), (6) к задаче (30), (31).

Осредняя дифференциальное уравнение (30) по всему объёму тела ($0 \leq \xi \leq 1$), интеграл теплового баланса с учетом третьего соотношения из (31) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \int_0^1 \Theta(\xi, \text{Fo}) d\xi = -(1 + \beta T_{\text{ст}}) \frac{\partial \Theta(0, \text{Fo})}{\partial \xi}. \quad (33)$$

Как и для первой стадии процесса, решение, удовлетворяющее интегралу теплового баланса (33) и краевым условиям (31), будем искать в виде полинома

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \sum_{k=0}^n C_k(q_2) \xi^k. \quad (34)$$

После определения неизвестных коэффициентов $C_k(q_2)$ ($k \equiv 0, 1, 2$) из граничных условий (31) соотношение (34) примет вид

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \Delta T - 2(\Delta T - q_2)\xi + (\Delta T - q_2)\xi^2. \quad (35)$$

Подставляя (35) в интеграл теплового баланса (33), получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial \text{Fo}} \int_0^1 [\Delta T - 2(\Delta T - q_2) \xi + (\Delta T - q_2) \xi^2] d\xi = 2(1 + \beta T_{\text{ст}}) (\Delta T - q_2).$$

Вычисляя интеграл, приходим к следующему обыкновенному дифференциальному уравнению относительно неизвестной функции $q_2(\text{Fo})$:

$$\frac{d(\Delta T + 2q_2)}{\Delta T - q_2} = 6(1 + \beta T_{\text{ст}}) d\text{Fo}. \quad (36)$$

Интегрируя уравнение (36), получим

$$q_2(\text{Fo}) = \Delta T + r \exp[-3(1 + \beta T_{\text{ст}}) \text{Fo}], \quad (37)$$

где r — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия. Так как при $\text{Fo} = \text{Fo}_1$ температура в центре пластины ($\xi = 1$) равна начальной температуре, то начальным условием для функции q_2 будет условие $q_2(\text{Fo}_1) = 0$.

После определения постоянной интегрирования соотношение (37) примет вид

$$q_2(\text{Fo}) = \Delta T \{1 - \exp[-3(1 + \beta T_{\text{ст}}) (\text{Fo} - \text{Fo}_1)]\}. \quad (38)$$

Подставляя (38) в (35), получим решение задачи (30), (31) в первом приближении

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \Delta T \{1 - \xi(2 - \xi) \exp[-3(1 + \beta T_{\text{ст}}) (\text{Fo} - \text{Fo}_1)]\}. \quad (39)$$

Нахождение решения во втором приближении второй стадии аналогично тому, как это было сделано во втором приближении первой стадии процесса.

Результаты расчетов температур во второй стадии процесса в сравнении с расчетом по методу прогонки и с данными из [1] представлены на рис. 3.

Найдём решение нестационарной нелинейной задачи теплопроводности при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры вида $a(T) = a_0 T^\beta$. Математическая постановка задачи для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях первого рода в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial T(\xi, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(T^\beta) \frac{\partial T(\xi, \text{Fo})}{\partial \xi} \right] \quad (\text{Fo} > 0; 0 \leq \xi \leq 1); \quad (40)$$

$$T(\xi, 0) = T_0; \quad \frac{\partial T(0, \text{Fo})}{\partial \xi} = 0; \quad T(1, \text{Fo}) = T_{\text{ст}}. \quad (41)$$

Следуя методу, изложенному выше, решение задачи (40), (41) в первом приближении для первой стадии процесса запишем в виде

$$\bar{\Theta}(y, \text{Fo}) = \left(1 - \frac{y}{q_1}\right)^2, \quad (42)$$

где $q_1(\text{Fo}) = 2\sqrt{3\text{Fo} \exp(\beta \ln T_{\text{ст}})}$.

Результаты расчётов безразмерной температуры $\bar{\Theta}(y, \text{Fo}) = \Theta(y, \text{Fo})/\Delta T$ по формуле (42) при $\beta = 0,1$, $T_0 = 0^\circ\text{C}$, $T_{\text{ст}} = 100^\circ\text{C}$ представлены на рис. 4.

Решение задачи (40), (41) во втором приближении запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \Theta(y, \text{Fo}) = \Delta T - \left(4\Delta T + \frac{\eta}{2\beta}\right) \frac{y}{q_1} + \left(6\Delta T + \frac{2\eta}{\beta}\right) \frac{y^2}{q_1^2} - \\ - \left(4\Delta T + \frac{3\eta}{\beta}\right) \frac{y^3}{q_1^3} + \left(\Delta T - \frac{2\eta}{\beta}\right) \frac{y^4}{q_1^4} + \frac{\eta}{2\beta} \frac{y^5}{q_1^5}, \end{aligned} \quad (43)$$

где $\eta = 8(\beta\Delta T + T_{\text{ст}}) - 4\sqrt{T_{\text{ст}}(5\beta\Delta T + 4T_{\text{ст}})}$, $q_1(\text{Fo}) = \frac{2\sqrt{\eta_2(T_{\text{ст}} - \eta_1)\text{Fo}}}{3T_{\text{ст}} + 5\beta\Delta T}$, $\eta_2 = -(45T_{\text{ст}} + 75\beta\Delta T) \exp(\beta \ln T_{\text{ст}})$.

Результаты расчетов безразмерной температуры $\bar{\Theta}(y, \text{Fo}) = \Theta(y, \text{Fo})/\Delta T$ по формуле (43) в сравнении с решением в первом приближении даны на рис. 4.

Рис. 3. Распределение безразмерной температуры $\bar{\Theta} = \frac{T - T_0}{T_{\text{ст}} - T_0}$: сплошная линия — по данным [1]; $\circ$ — метод прогонки; $\times$ — первое приближение; Δ — второе приближение; $\beta = 0,001$

Рис. 4. Распределение температуры в пластине при степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры: 1 — по формуле (42); 2 — по формуле (45)

Математическая постановка задачи для второй стадии процесса в данном случае имеет вид

$$\frac{\partial \Theta(y, \text{Fo})}{\partial \text{Fo}} = \frac{\partial}{\partial y} \left[(\Theta + T_0)^\beta \frac{\partial \Theta(y, \text{Fo})}{\partial y} \right] \quad (\text{Fo} \geq \text{Fo}_1; 0 \leq y \leq 1); \quad (44)$$

$$\Theta(0, \text{Fo}) = \Delta T; \quad \Theta(1, \text{Fo}) = q_2(\text{Fo}); \quad \frac{\partial \Theta(1, \text{Fo})}{\partial y} = 0. \quad (45)$$

Решение задачи (44), (45) в первом приближении записывается следующим образом:

$$\Theta(y, \text{Fo}) = \Delta T - y(\Delta T - q_2)(2 - y), \quad (46)$$

где $q_2 = \Delta T \left\{ 1 - \exp \left[-3T_{\text{ст}}^\beta (\text{Fo} - \text{Fo}_1) \right] \right\}$.

Закключение. На основе введения фронта температурного возмущения и дополнительных граничных условий получены аналитические решения нелинейных задач теплопроводности при линейной и степенной зависимости коэффициента температуропроводности от температуры. Решения имеют простой вид степенных алгебраических полиномов, не содержащих специальных функций. Получение таких решений оказалось возможным благодаря разделению процесса теплопроводности на два взаимосвязанных процесса и введению дополнительных граничных условий.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В. А., Карташов Э. М., Калашников В. В. Аналитические решения задач теплопереноса и термоупругости для многослойных конструкций: Учебн. пособие для вузов. — М.: Высш. шк., 2005. — 430 с.
2. Кудинов В. А. Метод координатных функций в нестационарных задачах теплопроводности. Обзор // *Извест. РАН. Энергетика*, 2004. — № 3. — С. 84–107.
3. Гудмен Т. применение интегральных методов в нелинейных задачах нестационарного теплообмена / В сб.: *Проблемы теплообмена*. — М.: Атомиздат, 1967. — С. 41–96.
4. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы нестационарной теплопроводности: Учебн. пос. для вузов. — М.: Высш. шк., 1978. — 328 с.

Поступила в редакцию 11/X/2009;
в окончательном варианте — 15/III/2010.

MSC: 80A17, 80M25

RECEPTION OF ANALYTICAL DECISIONS NONLINEAR PROBLEMS OF HEAT CONDUCTIVITY ON THE BASIS OF INTRODUCTION OF ADDITIONAL BOUNDARY CONDITIONS

I. V. Kudinov, V. P. Radchenko

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: igor_kudinov@mail.ru; radch@samgtu.ru

With the use of an integrated method of thermal balance on the basis of introduction of front of temperature indignation and additional boundary conditions the technique of a finding of analytical decisions of nonlinear problems of the non-stationary heat conductivity is studied, allowing to receive satisfactory accuracy of the decision in all range of change of Fourier number. Decisions have a simple appearance of the sedate algebraic polynoms which do not contain special functions.

Key words: *nonlinear problems, analytical methods, front of temperature indignation, additional boundary conditions, integral of thermal balance.*

Original article submitted 11/X/2009;
revision submitted 15/III/2010.

Igor V. Kudinov, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.
Vladimir P. Radchenko (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept., Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.