Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, М. А. Яшин, Исследование случайных полей напряжений при чистом сдвиге стохастически неоднородной полуплоскости в условиях ползучести, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 104–110

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu769>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 14:07:22

УДК 539.376

ИССЛЕДОВАНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ЧИСТОМ СДВИГЕ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

Н. Н. Попов, М. А. Яшин

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: ponick25@gmail.com; mikhailyashin@rambler.ru

Приводится решение нелинейной краевой задачи установившейся ползучести при чистом сдвиге стохастически неоднородной полуплоскости. Задача решается в корреляционном приближении на основе метода спектрального представления случайной функции. На основе полученного решения проведён статистический анализ поля напряжений вблизи границы полуплоскости. Показано, что в пограничном слое разброс напряжения значительно больше, чем в глубинных слоях.

Ключевые слова: стохастическая неоднородность, статистическая нелинейность, установившаяся ползучесть, чистый сдвиг, спектральное представление случайной функции.

Приближенный метод решения плоских стохастической задачи ползучести рассматривался в работах [1, 2]. Этот метод основывался на ряде допущений, среди которых одним из существенным было допущение о том, что краевые условия пренебрежимо мало влияют на напряженно-деформированное состояние в достаточно удалённых от границы в точках. Однако вблизи поверхности тела, где задаются детерминированные граничные условия, возможно увеличение коэффициента вариации напряжения. Поэтому для поверхностных слоев требуется дополнительный анализ влияния стохастических микрон неоднородностей на напряженно-деформированное состояние.

Пусть к границе стохастически неоднородной полуплоскости $x_2 \geq 0$, находящейся в условиях плоского напряженного состояния, приложено только касательное напряжение:

$$\sigma_{22}|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma^0 = \text{const.} \quad (1)$$

Определяющие соотношения ползучести принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме [2]:

$$\dot{p}_{ij} = cs^{n-1} \left(\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{mm} \right) (1 + \alpha U(x_1, x_2)), \quad (2)$$

где $s = \sqrt{0,5(3\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{ii}\sigma_{jj})}$ — интенсивность напряжений; $\dot{p}_{ij}$ — компоненты тензора скоростей деформаций; δ_{ij} — символ Кронекера; $U(x_1, x_2)$ — случайная однородная функция, описывающая возмущения реологических

Николай Николаевич Попов (к.ф.-м.н., доц.), докторант, каф. прикладной математики и информатики. Михаил Александрович Яшин, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

свойств материала с математическим ожиданием $\langle U \rangle = 0$ и дисперсией $\langle U^2 \rangle = 1$; α — число, играющее роль коэффициента вариации реологических свойств материала; c, n — постоянные материала. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 2.

Пусть компоненты тензора напряжений σ_{ij} удовлетворяют уравнениям равновесия

$$\sigma_{ij,j} = 0, \quad (3)$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}$ — условию

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl}\dot{p}_{jk,il} = 0, \quad (4)$$

которое получается из уравнений совместности для деформаций путём дифференцирования по времени. Здесь Λ_{ij} — единичный антисимметричный псевдотензор.

Соотношения (2)–(4) при краевых условиях (1) задают стохастическую краевую задачу ползучести, которая в дальнейшем решается приближенно относительно напряжений.

Пусть тензор напряжений σ_{ij} представлен в виде суммы двух слагаемых — детерминированной части σ_{ij}^0 и флуктуации σ_{ij}^* :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^*, \quad \langle \sigma_{ij} \rangle = \sigma_{ij}^0 = \text{const.}$$

Линеаризация двумерной задачи ползучести была произведена в работе [3]. С целью физической линеаризации функция s^n , входящая в определяющие соотношения (2), была разложена в степенной ряд и в этом разложении были учтены только линейные члены. Для статистической линеаризации определяющих соотношений (1) использовалось корреляционное приближение теории случайных функций, то есть предполагалось, что произведениями вида $\sigma_{ij}^*\sigma_{kl}^*$ и $\alpha\sigma_{ij}^*U$ допустимо пренебречь. В результате система (2)–(4) сводится к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно флуктуации напряжений σ_{ij}^* :

$$\begin{aligned} & (2 + kl_1^2)\sigma_{11,22}^* + (-1 + kl_1l_2)(\sigma_{11,11}^* + \sigma_{22,22}^*) + (2 + kl_2^2)\sigma_{22,11}^* + \\ & + 6k\sigma_{12}^0(l_1(\sigma_{12,22}^* - \sigma_{11,12}^*) + l_2(\sigma_{12,11}^* - \sigma_{22,12}^*)) - 6(1 + 6k\sigma_{12}^{02})\sigma_{12,12}^* = \\ & = -\alpha(l_1U_{,22} + l_2U_{,11} - 6\sigma_{12}^0U_{,12}), \end{aligned} \quad (5)$$

где $l_1 = 2\sigma_{11}^0 - \sigma_{22}^0$, $l_2 = 2\sigma_{22}^0 - \sigma_{11}^0$, $s_0^2 = (\sigma_{11}^0)^2 + (\sigma_{22}^0)^2 - \sigma_{11}^0\sigma_{22}^0 + 3(\sigma_{12}^0)^2$, $k = (n-1)/(2s_0^2)$.

В силу того, что детерминированные части напряжений σ_{11}^0 и σ_{22}^0 для случая чистого сдвига равны нулю, а $\sigma_{12}|_{x_2=0} = \sigma^0 = \text{const}$, имеем $l_1 = l_2 = 0$, $s_0^2 = 3(\sigma^0)^2$, $k = (n-1)/(6(\sigma^0)^2)$.

Тогда дифференциальное уравнение (5) примет вид

$$2\sigma_{11,22}^* - \sigma_{11,11}^* - \sigma_{22,22}^* + 2\sigma_{22,11}^* - 6n\sigma_{12,12}^* = 6\alpha\sigma_{12}^0U_{,12}. \quad (6)$$

К уравнению (6) необходимо добавить уравнения равновесия для флуктуаций σ_{ij}^* :

$$\sigma_{ij,j}^* = 0. \quad (7)$$

Краевые условия для системы (6), (7) имеют вид

$$\sigma_{22}^*|_{x_2=0} = 0, \quad \sigma_{12}^*|_{x_2=0} = 0. \quad (8)$$

Пусть случайная функция $U(x_1, x_2)$, описывающая возмущения реологических свойств материала, является однородной и изотропной. Тогда она допускает спектральное представление в виде интеграла Фурье—Стилтьеса

$$U(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_k x_k} d\varphi(\omega_1, \omega_2), \quad (9)$$

причём для случайного дифференциала $d\varphi(\omega_1, \omega_2)$ выполняется условие стохастической ортогональности:

$$\langle d\varphi(\omega_1, \omega_2) \overline{d\varphi(\omega'_1, \omega'_2)} \rangle = S_U(\omega_1, \omega_2) \delta(\omega_1 - \omega'_1) \delta(\omega_2 - \omega'_2) d\omega_1 d\omega_2 d\omega'_1 d\omega'_2,$$

где $S_U(\omega_1, \omega_2)$ — спектральная плотность поля, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, а черта означает комплексное сопряжение.

Решение краевой задачи (6), (7) в произвольном сечении пространства $x_2 = \text{const}$ можно искать в виде [4]

$$\sigma_{kl}^* = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_1 x_1} \beta_{kl}(\omega_1, \omega_2) d\varphi(x_2, \omega_1, \omega_2), \quad (10)$$

где $\beta_{kl}(x_2, \omega_1, \omega_2)$ — неизвестные весовые функции координаты x_2 и параметров ω_1 и ω_2 .

В результате подстановки (9), (10) в (6), (7) получается система неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} i\omega_1 \beta_{11} + \beta_{12,2} &= 0, & i\omega_1 \beta_{12} + \beta_{22,2} &= 0, \\ 2\beta_{11,22} + \omega_1^2 \beta_{11} - \beta_{22,22} - 2\omega_1^2 \beta_{22} - 6ni\omega_1 \beta_{12,2} &= -6\alpha\sigma_{12}^0 \omega_1 \omega_2 e^{i\omega_2 x_2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Общее решение системы (11) имеет вид

$$\beta_{ij} = \sum_{k=1}^4 C_k v_{ij}^k e^{r_k x_2} + \varphi_{ij}, \quad (12)$$

где φ_{ij} — частное решение системы; C_k — произвольные постоянные; v_{ij}^k — координаты собственного вектора, соответствующего корню r_k характеристического уравнения системы:

$$\det B(r) = \begin{vmatrix} i\omega_1 & 0 & r \\ 0 & r & i\omega_1 \\ 2r^2 + \omega_1^2 & -(r^2 + 2\omega_1^2) & -6ni\omega_1 r \end{vmatrix} = 0. \quad (13)$$

Решая характеристическое уравнение (13), получим следующие корни:

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \sqrt{3n-1 \pm \sqrt{3(n-1)(3n+1)}},$$

$$r_{3,4} = \frac{\omega_1}{\sqrt{2}} \sqrt{3n-1 \pm \sqrt{3(n-1)(3n+1)}}.$$

Координаты V_{ij}^k собственного вектора, определенные из матричного уравнения $B(r)V = 0$, оказались следующими: $v_{11}^k = -r_k^2$, $v_{22}^k = \omega_1^2$, $v_{12}^k = i\omega_1 r_k$.

Частное решение системы (11) можно искать в виде

$$\varphi_{kl} = f_{kl} e^{i\omega_2 x_2}. \quad (14)$$

Постоянные f_{kl} можно найти из системы алгебраических уравнений, которая получается подстановкой (14) в систему (11):

$$f_{12} = -\frac{3\alpha\sigma_{12}^0\omega_1^2\omega_2^2}{\omega_1^4 + \omega_2^4 + (3n-1)\omega_1^2\omega_2^2}, \quad f_{11} = \frac{3\alpha\sigma_{12}^0\omega_1\omega_2^3}{\omega_1^4 + \omega_2^4 + (3n-1)\omega_1^2\omega_2^2},$$

$$f_{22} = \frac{3\alpha\sigma_{12}^0\omega_1^3\omega_2}{\omega_1^4 + \omega_2^4 + (3n-1)\omega_1^2\omega_2^2}.$$

Таким образом, общее решение системы (11) имеет вид

$$\beta_{11} = -C_1 r_1^2 e^{r_1 x_2} - C_2 r_2^2 e^{r_2 x_2} - C_3 r_3^2 e^{r_3 x_2} - C_4 r_4^2 e^{r_4 x_2} + f_{11} e^{i\omega_2 x_2},$$

$$\beta_{22} = C_1 r_1^2 e^{r_1 x_2} + C_2 r_2^2 e^{r_2 x_2} + C_3 r_3^2 e^{r_3 x_2} + C_4 r_4^2 e^{r_4 x_2} + f_{22} e^{i\omega_2 x_2},$$

$$\beta_{12} = C_1 i\omega_1 r_1 e^{r_1 x_2} + C_2 i\omega_1 r_2 e^{r_2 x_2} + C_3 i\omega_1 r_3 e^{r_3 x_2} + C_4 i\omega_1 r_4 e^{r_4 x_2} + f_{12} e^{i\omega_2 x_2}.$$

В силу ограниченности решения на бесконечности следует, что постоянные C_3 , C_4 , находящиеся при положительных корнях характеристического уравнения, равны нулю. Для нахождения двух других постоянных интегрирования используем условия

$$\beta_{22}|_{x_2=0} = 0, \quad \beta_{12}|_{x_2=0} = 0, \quad (15)$$

которые получаются из граничных условий (8). Подставляя условия (15) в общее решение (12), получим систему

$$C_1 \omega_1^2 + C_2 \omega_1^2 + C_{22} = 0, \quad C_1 i\omega_1 r_1 + C_2 i\omega_1 r_2 + C_{12} = 0,$$

из которой находим значения постоянных интегрирования:

$$C_1 = \frac{if_{22}r_2 - f_{12}\omega_1}{i\omega_1^2(r_1 - r_2)}, \quad C_2 = \frac{f_{12}\omega_1 - if_{22}r_1}{i\omega_1^2(r_1 - r_2)}.$$

Таким образом, весовые функции β_{ij} имеют следующий вид:

$$\beta_{11} = -\frac{if_{22}r_2 - f_{12}\omega_1}{i\omega_1^2(r_1 - r_2)} r_1^2 e^{r_1 x_2} - \frac{f_{12}\omega_1 - if_{22}r_1}{i\omega_1^2(r_1 - r_2)} r_2^2 e^{r_2 x_2} + f_{11} e^{i\omega_2 x_2},$$

$$\beta_{22} = \frac{if_{22}r_2 - f_{12}\omega_1}{i(r_1 - r_2)} e^{r_1 x_2} + \frac{f_{12}\omega_1 - if_{22}r_1}{i(r_1 - r_2)} e^{r_2 x_2} + f_{22} e^{i\omega_2 x_2}, \quad (16)$$

$$\beta_{12} = \frac{if_{22}r_2 - f_{12}\omega_1}{\omega_1(r_1 - r_2)} r_1 e^{r_1 x_2} + \frac{f_{12}\omega_1 - if_{22}r_1}{\omega_1(r_1 - r_2)} r_2 e^{r_2 x_2} + f_{12} e^{i\omega_2 x_2}.$$

При помощи формулы (10) и известной формулы для вычисления дисперсий напряжений $D[\sigma_{mn}] = \langle |\sigma_{mn}|^2 \rangle$ получаем

$$D_{mn}(x_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int S_U(\omega_1, \omega_2) |\beta_{mn}(x_2, \omega_1, \omega_2)|^2 d\omega_1 d\omega_2. \quad (17)$$

Спектральная плотность S_U изотропного скалярного поля U зависит только от модуля волнового вектора $\omega_0 = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, а для дисперсии имеет место следующее равенство [4]:

$$D_U = 2\pi \int_0^{+\infty} S(\omega_0) \omega_0 d\omega_0 = 1.$$

Поэтому целесообразно в интеграле (17) перейти к полярной системе координат по формулам $\omega_1 = \omega_0 \cos \varphi$, $\omega_2 = \omega_0 \sin \varphi$. Тогда интеграл (17) приводится к виду

$$D_{mn}(x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \beta_{mn}(x_2, \sin \varphi, \cos \varphi) \overline{\beta_{mn}(x_2, \sin \varphi, \cos \varphi)} d\varphi, \quad (18)$$

где $\beta_{mn}(x_2, \sin \varphi, \cos \varphi)$ получается из (16) путём перехода к полярным координатам.

Полученные результаты позволяют проанализировать основные особенности пограничного слоя при ползучести. Используя выражение (18), можно найти статистические характеристики случайного поля напряжений в любой точке полуплоскости.

Таблица 1

n	p
1	1,789
2	2,133
3	2,374
4	2,562
5	2,718
6	2,852
7	2,971
8	3,076

Исследуем концентрацию напряжений, возникающую на границе полуплоскости $x_2 = 0$. Концентрация напряжений определяется коэффициентом изменчивости среднего квадратического отклонения $\rho = \sqrt{D_{11}(0)}/\sqrt{D_{11}(\infty)}$. Значения ρ в зависимости от степени нелинейности материала n приведены в табл. 1.

В табл. 2 приведены значения величины $d_{11} = (\sqrt{D_{11}(0)}/\sigma^0)100\%$, характеризующей относительный разброс напряжений σ_{11} , в зависимости от переменных α и n на границе полуплоскости $x_2 = 0$.

На рисунке представлены зависимости нормированных дисперсий напряжений $D_{ij}^0 = D_{ij}(x_2)/D_{ij}(\infty)$ от координаты x_2 при $n = 3$. Нормированные дисперсии D_{11}^0 и D_{22}^0 на границе полуплоскости равны нулю, а D_{11}^0 принимает наибольшее значение, равное 2,374. С ростом x_2 дисперсии довольно быстро приближаются к постоянным значениям, совпадающим с их значениями для неограниченной среды.

Таблица 2

$\alpha \backslash n$	1	2	3	4	5	6	7	8
0,1	10,606	8,557	7,425	6,673	6,124	5,698	5,355	5,071
0,2	21,213	17,114	14,85	13,346	12,247	11,396	10,711	10,142
0,3	31,819	25,671	22,275	20,019	18,371	17,095	16,066	15,213
0,4	42,426	34,227	29,7	26,692	24,495	22,793	21,421	20,284
0,5	53,032	42,784	37,125	33,365	30,619	28,491	26,777	25,355

Таким образом, в поверхностном слое флуктуации напряжений достигают заметных величин, которые могут быть значительно больше, чем для глубинных слоев. Отсюда ясно, что флуктуации напряжений в пограничном слое играют существенную роль при решении вопроса о надежности конструкций по критериям длительной прочности и мгновенных локальных разрушений за счет выбросов напряжений. Неучёт краевых эффектов может привести к необоснованному завышению оценок работоспособности конструкций в условиях ползучести.

Зависимость D_{ij}^0 от координаты x_2 при $n = 3$:
1 — σ_{11} ; 2 — σ_{12} ; 3 — σ_{22}

Работа выполнена при поддержке РФФИ (код проекта 10-01-00644-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кузнецов В. А. Ползучесть стохастически неоднородных сред в условиях плоского напряжённого состояния / В сб.: *Математическая физика*. — Куйбышев: КуАИ, 1976. — С. 69–74.
2. Радченко В. П., Попов Н. Н. Статистические характеристики полей напряжений и деформаций при установившейся ползучести стохастически неоднородной плоскости // *Изв. вузов. Машиностроение*, 2006. — № 2. — С. 3–11.
3. Коваленко Л. В., Попов Н. Н., Радченко В. П. Решение плоской стохастической краевой задачи ползучести // *ПММ*, 2009. — Т. 73, № 6. — С. 1009–1016; англ. пер.: *Kovalenko L. V., Popov N. N., Radchenko V. P. Solution of the plane stochastic creep boundary value problem // Journal of Applied Mathematics and Mechanics* Vol. 73, No. 6. — P. 727–733.
4. Болотин В. В. Методы теории вероятностей и теории надежности в расчётах сооружений. — М.: Стройиздат, 1982. — 352 с.

Поступила в редакцию 01/II/2010;
в окончательном варианте — 15/III/2010.

MSC: 74E35, 74K20

**THE STUDY OF RANDOM FIELDS OF STRESS IN PURE SHEAR
STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS HALF-PLANE UNDER
CREEP**

N. N. Popov, M. A. Yashin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: ponick25@gmail.com; mikhailyashin@rambler.ru

We studied the solution of a nonlinear boundary value problem of the steady-state creep at pure shear of a stochastically non-uniform half-plane. The solution of the problem is searched in correlation approximation on the basis of a spectral representation of random function method. On the basis of the received solution the statistical analysis of stress field near to half-plane boundary is carried out. It is shown, that in an interface dispensing of stress much more, than for deep layers.

Key words: *stochastic heterogeneity, the statistical nonlinearity, the steady-state creep, pure shear, spectral representation of random function.*

Original article submitted 01/II/2010;
revision submitted 15/III/2010.

Nikolay N. Popov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Doctoral Candidate, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Michail M. Yashin*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.