Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин, Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана–Лиувилля, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 24–36

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu771>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 11:17:03

УДК 517.968.72

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДРОБНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

Е. Н. Огородников, Н. С. Яшагин

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: eugen.ogo@gmail.com; nik-yashagin@yandex.ru

Для двух линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля обоснована корректность задачи Коши соответственно в локальной (классической) и нелокальной постановках. Решения найдены в явном виде в терминах некоторых специальных функций, связанных с функцией типа Миттаг—Леффлера. Отмечена непрерывная зависимость найденных решений от параметра дробности β . Для второго из рассмотренных уравнений предложена видоизмененная постановка задачи типа Коши, совпадающая с классической при $\beta = 0$. Указанные дифференциальные уравнения предложены в качестве модельных уравнений дробных осцилляторов.

Ключевые слова: дробное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения с дробными производными Римана—Лиувилля, дробные осцилляционные уравнения, задача типа Коши, специальные функции типа Миттаг—Леффлера.

Введение. Уравнения, в которых неизвестная функция $y(x)$ присутствует под знаком производных дробного порядка, принято называть обыкновенными дифференциальными уравнениями дробного порядка [1]. Предполагается, что собственно порядок дифференциального уравнения, который, как обычно, определяется порядком старшей производной, может быть, в частности, и целым числом. Производные D^{α_i} , где α_i в общем случае — комплексное число, в свою очередь, могут быть как производными Римана—Лиувилля, так и производными Маршо, Капуто, Эрдейи—Кобера и др.

В зарубежной математической литературе [2–4] сложился устойчивый термин «дробные дифференциальные уравнения» (fractional differential equations). Представляется, что термин «дифференциальные уравнения с дробными производными» более точно отражает суть предмета.

К настоящему моменту времени накоплено огромное количество материалов, относящихся к теории и приложениям дифференциальных уравнений с дробными производными. Прежде всего, отметим монографию А. А. Kilbas, Н. М. Srivastava, J. J. Trujillo [2], в которой отражены основные теоретические результаты и методы решения, приведено большое количество примеров, а библиографический список содержит более девятисот источников, опубликованных к 2006 году. Теории и методам решения дифференциальных уравнений с дробными производными посвящены работы I. Podlubny [3], K. S. Miller, B. Ross [4]. Обстоятельное изложение основ дробного исчисления и некоторые его приложения к дифференциальным (обыкновенным и с частными производными) и интегральным уравнениям помимо [1] содержатся также в мо-

Евгений Николаевич Огородников (к.ф.-м.н., доцент), доцент, каф. прикладной математики и информатики. *Николай Сергеевич Яшагин*, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

нографиях А. М. Нахушева [5, 6] и Н. О. Вірченко, В. Я. Рибак [7]. Отметим также исторически первую монографию К. В. Oldham, J. Spanier [8], целиком посвященную дробному исчислению и некоторым его приложениям.

Неослабевающий поток публикаций по различным вопросам теории и приложений дифференциальных уравнений с дробными производными в периодической печати и материалах конференций позволяет сделать вывод о том, что это направление дробного исчисления продолжает интенсивно развиваться, а разработка его теории, по-видимому, еще далека от своего завершения. Не секрет, что столь повышенный интерес к дробному исчислению не случаен, а связан с многочисленными приложениями его в задачах реологии, вязкоупругости, аномальной диффузии в пористых (фрактальных) структурах, теории автоматического управления, физической химии, биологии и т. д.

В монографии [2] сформулированы и доказаны теоремы существования и единственности задач типа Коши для дифференциальных уравнений дробного (точнее произвольного) порядка самого общего вида:

$$(D_{a+}^{\alpha} y)(x) = f[x, y(x), (D_{a+}^{\alpha_1} y)(x), (D_{a+}^{\alpha_2} y)(x), \dots, (D_{a+}^{\alpha_m} y)(x)],$$

где $\alpha, \alpha_k \in \mathbb{C}$ ($k \equiv 1, 2, \dots, m$), $n - 1 < \operatorname{Re} \alpha < n$ ($n = [\operatorname{Re} \alpha] + 1$, при $\alpha \notin \mathbb{N}$ и $n = \alpha$, если $\alpha \in \mathbb{N}$); $0 < \alpha_0 < \operatorname{Re} \alpha_1 < \operatorname{Re} \alpha_2 < \dots < \operatorname{Re} \alpha_m$; $(D_{a+}^{\alpha} y)(x)$, $(D_{a+}^{\alpha_k} y)(x)$ — левосторонние дробные производные Римана—Лиувилля порядка α и α_k соответственно.

Доказательства теорем опираются на идею редукции дифференциальных уравнений к соответствующим интегральным уравнениям типа Вольтерра второго рода и теорему Банаха о неподвижной точке. Указанная редукция осуществляется с помощью хорошо известного свойства дробных интегралов I_{a+}^{α} и производных D_{a+}^{α} Римана—Лиувилля, именно, если $f(x) \in L(a, b)$ и $f_{n-\alpha}(x) = (I_{a+}^{n-\alpha} f)(x) \in AC^n[a, b]$, то почти всюду на отрезке $[a, b]$ справедливо равенство

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \sum_{k=1}^n \frac{f_{n-\alpha}^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (x - a)^{\alpha-k},$$

где

$$f_{n-\alpha}^{(n-k)}(a) = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} [(I_{a+}^{n-\alpha} f)(x)] = \lim_{x \rightarrow a+} [(D_{a+}^{\alpha-k} f)(x)], \quad k \equiv 1, 2, \dots, n.$$

Задание значений

$$\lim_{x \rightarrow a+} [(D_{a+}^{\alpha-k} y)(x)] = b_k, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad k \equiv 1, 2, \dots, n$$

для дифференциального уравнения и формирует так называемую задачу типа Коши.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Тождество для композиции $I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha}$, приведенное выше, в случае $0 < \operatorname{Re} \alpha < 1$ принимает вид

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(\alpha)} (x - a)^{\alpha-1},$$

где $f_{1-\alpha}(x) = (I_{a+}^{1-\alpha} f)(x)$.

Нетрудно показать, что в классе абсолютно непрерывных функций $AC[a, b]$ имеет место равенство

$$(I_{a+}^{\alpha} D_{a+}^{\alpha} f)(x) = f(x).$$

Это равенство тем более справедливо для функций $f(x) \in C^1(a, b)$: $f'(x) \in L(a, b)$.

В теоремах о существовании единственного решения заранее оговаривается класс функций, в котором это решение может быть найдено. В [2] рассмотрены различные функциональные пространства: $L^{\alpha}(a, b)$ — пространство функций с суммируемой производной $D_{a+}^{\alpha} y$, различные весовые пространства непрерывных функций $C_{n-\alpha}^{\alpha}$, $C_{n-\alpha, \gamma}^{\alpha}$, так или иначе обеспечивающие суммируемость старшей производной в дифференциальном уравнении.

Возникает вопрос: как формулировать задачу с начальными данными, не предполагая суммируемости старшей дробной производной?

Хорошо известно, что для дифференциальных уравнений с дробными производными Капуто ${}^C D_{a+}^{\alpha}$ при определенных условиях корректна задача Коши в её классической постановке: $y^{(k)}(a) = b_k$ ($k \equiv 1, 2, \dots, n$). В некоторых работах высказывается мнение [9], что нелокальные начальные условия в задачах типа Коши для уравнений с дробными производными Римана—Лиувилля «не имеют чёткой физической интерпретации». В действительности математические модели динамических систем с памятью, диффузии в пористых средах и др. приводят именно к дифференциальным уравнениям с дробными производными Римана—Лиувилля. Отметим, что вместе с производными $D_{a+}^{\alpha} y$, $\alpha \in \mathbb{R}$, в дифференциальном уравнении могут быть и дробные производные $D_{a+}^{\alpha} y^{(n)}$ при $\alpha \in (0, 1)$, однако таким уравнениям не уделяется достаточного внимания.

1. Пусть $T > 0$, $[0, T]$ — конечный отрезок действительной числовой оси $\mathbb{R}$, $L(0, T) \stackrel{\text{def}}{=} L_1(0, T)$ — пространство суммируемых по Лебегу функций $f(t)$ (вообще говоря, комплекснозначных), $AC[0, T]$ — пространство абсолютно непрерывных на $[0, T]$ функций, а пространство $AC^n[0, T]$ состоит из функций $f(t) : [0, T] \rightarrow \mathbb{C}$, $f(t) \in C^{n-1}[0, T]$, причём $f^{(n-1)}(t) \in AC[0, T]$, где $C^{n-1}[0, T]$ — множество функций непрерывно дифференцируемых до порядка $n - 1$ включительно на отрезке $[0, T]$. Для левосторонних дробных производных Римана—Лиувилля $(I_{0+}^{\alpha} f)(t)$ и $(D_{0+}^{\alpha} f)(t)$ на отрезке $[0, T]$ всюду в работе используется не менее употребимое обозначение $I_{0t}^{\alpha} f$ и $D_{0t}^{\alpha} f$, причём если $\alpha > 0$, то $D_{0t}^{-\alpha} f \stackrel{\text{def}}{=} I_{0t}^{\alpha} f$.

Уравнение

$$\sum_{k=0}^n a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{k=0}^m b_k D_{0t}^{\beta_k} u = f(t), \quad (1)$$

где $u(t)$ — искомая, а $f(t)$ — заданная функции, $\dot{u} = du/dt$, $t \in [0, T]$; $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, $\alpha_k \in (0, 1]$, $\beta_k \in [0, 2)$, — является наиболее общей записью линейного неоднородного дифференциального уравнения порядка не выше двух с постоянными коэффициентами и левосторонними дробными производными Римана—Лиувилля от искомой функции и её первой производной $\dot{u}(t)$. Полагая в уравнении (1) $a_0 = 1$ при $\alpha_0 = 1$, приходим к дифференциальному уравнению

второго порядка

$$\ddot{u} + \sum_{k=1}^n a_k D_{0t}^{\alpha_k} \dot{u} + \sum_{k=0}^m b_k D_{0t}^{\beta_k} u = f(t), \quad (2)$$

где $\alpha_k \in (0, 1)$, $\beta_k \in [0, 2)$.

Уравнения (1) и (2) можно рассматривать в качестве модельных дифференциальных уравнений дробных осцилляторов [10]. Заметим сразу, что и постановка начальных задач, и структура их решения, и поведение в окрестности начальной точки $t = 0$ существенно зависят от наличия или отсутствия в уравнениях (1) и (2) дробных производных искомой функции порядка $\beta_k > 1$. Нетрудно показать, что при $\beta_k \in [0, 1]$ и $f(t) \in L(0, T)$ для уравнения (2) корректна постановка классической задачи Коши с условиями

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = \dot{u}_0. \quad (3)$$

Особенности постановки задач с начальными данными при $t = 0$ и метод их решения ниже продемонстрируем на примере двух дифференциальных уравнений типа уравнения (2):

$$\ddot{u} + p D_{0t}^{\beta} \dot{u} + q D_{0t}^{2\beta} u = f(t), \quad (4)$$

$$\ddot{u} + p D_{0t}^{1+\beta} u + q D_{0t}^{2\beta} u = f(t), \quad (5)$$

где $p, q \in \mathbb{R}$, $\beta \in (0, 1/2)$, $f(t) \in L(0, T)$ — заданная функция.

При $\beta = 0$ уравнения (4) и (5) по определению дробной производной Римана—Лиувилля переходят в хорошо известное дифференциальное уравнение возмущенного осциллятора с вязким трением

$$\ddot{u} + p\dot{u} + qu = f(t). \quad (6)$$

При $\beta \in (0, 1)$ они являются математическими моделями, вообще говоря, существенно разных динамических процессов, т. к. в общем случае дробная производная $D_{0t}^{1+\beta} u \neq D_{0t}^{\beta} \dot{u}$. Действительно, даже для функций класса $AC^2[0, T]$ в силу достаточного признака существования дробной производной порядка $1 < 1 + \beta < 2$ и её определения [1] получим

$$D_{0t}^{1+\beta} u = \frac{d}{dt} D_{0t}^{\beta} u = \frac{d}{dt} \left[\frac{u(0)t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} + I_{0t}^{1-\beta} \dot{u} \right] = \frac{u_0 t^{-(1+\beta)}}{\Gamma(-\beta)} + D_{0t}^{\beta} \dot{u}.$$

С другой стороны, на множестве функций $u(t) : u(0) = u_0 = 0$ уравнения (4) и (5) совпадают, что позволяет использовать любое из них в качестве математической модели процесса возмущения осциллятора в состоянии покоя.

2. Рассмотрим вначале уравнение (4) с начальными условиями (3) и воспользуемся идеей редукции задачи к интегральному уравнению Вольтерра второго рода.

Прежде заметим, что решением рассматриваемых дифференциальных уравнений мы называем любую суммируемую функцию, обращающую уравнение в тождество почти всюду на отрезке $[0, T]$. А это значит, что решение

уравнения (4) с условиями (3) следует искать в классе функций $AC^2[0, T]$, обеспечивающем существование почти всюду на $[0, T]$ суммируемой второй производной $\ddot{u}(t)$.

Имеет место следующее утверждение.

ЛЕММА 1. Пусть $\beta \in (0, 1/2)$, $p, q \in \mathbb{R}$, $f(t) \in L(0, T)$, $u(t) \in AC^2[0, T]$. Функция $u(t)$ удовлетворяет почти всюду равенствам (3) и (4) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет почти всюду интегральному уравнению

$$u(t) + pI_{0t}^\alpha u + qI_{0t}^{2\alpha} u = I_{0t}^2 f + u_0 + \dot{u}_0 t + p \frac{u_0}{\Gamma(1+\alpha)} t^\alpha, \quad (7)$$

где $\alpha = 1 - \beta$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u(t) \in AC^2[0, T]$ удовлетворяет почти всюду равенствам (3) и (4). Проинтегрируем дважды левую и правую части равенства (4) при начальных условиях (3). Вычислим композиции операторов с учетом полугруппового свойства дробных интегралов [1] и замечания 1, сделанного во введении:

$$\begin{aligned} I_{0t}^2 D_{0t}^\beta \dot{u} &= I_{0t}^1 I_{0t}^{1-\beta} \left(I_{0t}^\beta D_{0t}^\beta \dot{u} \right) = I_{0t}^1 I_{0t}^{1-\beta} \dot{u} = I_{0t}^{1-\beta} I_{0t}^1 \dot{u} = I_{0t}^{1-\beta} (u - u_0) = \\ &= I_{0t}^{1-\beta} u - \frac{u_0}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^\beta} = I_{0t}^{1-\beta} u - \frac{u_0}{\Gamma(1-\beta)} t^{1-\beta}, \\ I_{0t}^2 D_{0t}^{2\beta} u &= I_{0t}^{2-2\beta} \left(I_{0t}^{2\beta} D_{0t}^{2\beta} u \right) = I_{0t}^{2(1-\beta)} u, \end{aligned}$$

и, обозначая $1 - \beta = \alpha$, получим равенство (7), что и доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть функция $u(t) \in AC^2[0, T]$ удовлетворяет интегральному уравнению (7). Продифференцируем равенство (7) по t :

$$\dot{u}(t) + p \frac{d}{dt} I_{0t}^\alpha u + q \frac{d}{dt} I_{0t}^{2\alpha} u = I_{0t}^1 f + \dot{u}_0 + p \frac{u_0 t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}.$$

В силу достаточного признака существования дробной производной выполняется

$$\frac{d}{dt} I_{0t}^\alpha u = D_{0t}^{1-\alpha} u = \frac{u_0}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} + I_{0t}^\alpha \dot{u},$$

поэтому

$$\dot{u}(t) + p I_{0t}^\alpha \dot{u} + q I_{0t}^{2\alpha-1} u = I_{0t}^1 f + \dot{u}_0. \quad (8)$$

Дифференцируя равенство (8) ещё раз, получим

$$\ddot{u}(t) + p D_{0t}^{1-\alpha} \dot{u} + q D_{0t}^{2(1-\alpha)} u = f(t).$$

Переобозначая $\alpha = 1 - \beta$, приходим к уравнению (4).

Теперь покажем, что равенства (3) также выполняются. Действительно, переходя к пределу при $t \rightarrow 0+$ в левой и правой частях равенств (7) и (8), получим, что $\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u_0 = u(0)$ и $\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{u}(t) = \dot{u}_0 = \dot{u}(0)$. Таким образом, достаточность доказана. $\square$

Итак, на основании леммы 1 задача Коши для дифференциального уравнения (4) с условиями (3) эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра (7) с абелевыми ядрами, решение которого заведомо существует и единственно [11].

Нетрудно показать, что интегральный оператор $I + pI_{0t}^\alpha + qI_{0t}^{2\alpha}$, где I — тождественный оператор, в силу полугруппового свойства дробных интегралов допускает следующую факторизацию:

$$I + pI_{0t}^\alpha + qI_{0t}^{2\alpha} = (I - \lambda_1 I_{0t}^\alpha) (I - \lambda_2 I_{0t}^\alpha)$$

где λ_1, λ_2 — корни многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$. Тогда, обозначая правую часть интегрального уравнения (7) за $\varphi(t)$ и вводя новую функцию $v(t) = u(t) - \lambda_2 I_{0t}^\alpha u$, приводим уравнение (7) к равносильной ему системе интегральных уравнений

$$(I - \lambda_1 I_{0t}^\alpha) v = \varphi(t), \quad (I - \lambda_2 I_{0t}^\alpha) u = v(t), \quad (9)$$

решение которой начнём с первого уравнения.

Оба уравнения системы (9) являются хорошо известными уравнениями Вольтерра второго рода с ядром Абеля, и их решения выписываются в терминах функций типа Миттаг—Леффлера [12]. Используя далее интегральный оператор [13]

$$E_{at;\lambda}^{\alpha,\sigma} f = \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} E_\sigma [\lambda(t - \tau)^\sigma; \alpha] f(\tau) d\tau, \quad (10)$$

где $\alpha, \sigma > 0, \lambda \in \mathbb{C}$, запишем решение системы интегральных уравнений в виде

$$v(t) = \varphi(t) + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi, \quad u(t) = v(t) + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} v.$$

Тогда решением интегрального уравнения (7) является функция

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi(t) + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} \left[\varphi(t) + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi \right] = \\ &= \varphi(t) + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} \varphi + \lambda_1 \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi. \end{aligned}$$

Вычислим композицию операторов $E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi$ с помощью тождества

$$E_{0t;\lambda_2}^{\mu,\alpha} E_{0t;\lambda_1}^{\nu,\alpha} \varphi = E_{0t;\lambda_2}^{\nu,\alpha} E_{0t;\lambda_1}^{\mu,\alpha} \varphi = E_{0t;\lambda_1, \lambda_2}^{\mu+\nu, \alpha, \alpha} \varphi,$$

где

$$E_{0t;\lambda_1, \lambda_2}^{\mu, \alpha, \beta} \varphi = \int_0^t (t - \tau)^{\mu-1} E_{\alpha, \beta} \left[\lambda_1 (t - \tau)^\alpha, \lambda_2 (t - \tau)^\beta; \mu \right] \varphi(\tau) d\tau, \quad (11)$$

введенный в работе [14] интегральный оператор с функцией типа Миттаг—Леффлера двух аргументов:

$$E_{\alpha, \beta}(x, y; \mu) = \sum_{k, n=0}^{\infty} \frac{x^k y^n}{\Gamma(k\alpha + n\beta + \mu)}. \quad (12)$$

Используя свойства (11), (12), получим

$$u(t) = \varphi(t) + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} \varphi + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(\lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{2\alpha,\alpha} \varphi - \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{2\alpha,\alpha} \varphi \right).$$

Нам понадобится ещё одно легко проверяемое тождество для оператора $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\sigma}$. Именно, для любой суммируемой функции $\varphi(t)$ справедливо равенство

$$\lambda E_{0t;\lambda}^{2\alpha,\alpha} \varphi = E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} \varphi - I_{0t}^{\alpha} \varphi. \quad (13)$$

Действительно, решением интегрального уравнения $v(t) - \lambda I_{0t}^{\alpha} v = \varphi(t)$ является функция $v(t) = \varphi(t) + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} \varphi$. Подставляя это решение в исходное уравнение и используя свойства композиции дробного интеграла с оператором $E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha}$ [15], получим

$$\varphi(t) + \lambda E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} \varphi - \lambda I_{0t}^{\alpha} \varphi - \lambda^2 I_{0t}^{\alpha} E_{0t;\lambda}^{\alpha,\alpha} \varphi = \varphi(t),$$

откуда следует (13). Тогда

$$\begin{aligned} u(t) &= \varphi(t) + \lambda_1 E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi + \lambda_2 E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} \varphi + \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \left(E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi - E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} \varphi \right) = \\ &= \varphi(t) + \frac{\lambda_1^2}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{0t;\lambda_1}^{\alpha,\alpha} \varphi - \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{0t;\lambda_2}^{\alpha,\alpha} \varphi. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя выражение для функции $\varphi(t)$ в равенство (14) с использованием некоторых свойств оператора (10) из работы [14] и известных свойств функции типа Миттаг—Леффлера [12], после несложных, но громоздких преобразований находим решение задачи (3), (4):

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \left[-\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}; 1) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{\alpha}(\lambda_2 t^{\alpha}; 1) \right] + \\ &\quad + \dot{u}_0 t \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{\alpha}(\lambda_1 t^{\alpha}; 2) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{\alpha}(\lambda_2 t^{\alpha}; 2) \right] + \\ &\quad + \int_0^t (t - \tau) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{\alpha}(\lambda_1 (t - \tau)^{\alpha}; 2) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E_{\alpha}(\lambda_2 (t - \tau)^{\alpha}; 2) \right] f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

В терминах дробной экспоненциальной функции [16]

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = t^{\mu-1} E_{\alpha}(\lambda t^{\alpha}; \mu) \quad (15)$$

это решение записывается так:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 \left[-\frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda_1, t) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda_2, t) \right] + \\ &\quad + \dot{u}_0 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1, t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2, t) \right] + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1, t - \tau) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2, t - \tau) \right] f(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в уравнении (4) $\beta \in (0, 1/2)$; $p, q \in \mathbb{R}$, λ_1, λ_2 — различные корни многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$; $f(t) \in L(0, T)$. Тогда единственное в классе функций $u(t) \in C^1[0, T] \cap C^2(0, T]$ решение задачи Коши (3) для уравнения (4) существует и может быть найдено по формуле (16).

Вместо формального доказательства ограничимся замечанием о том, что существование и единственность решения являются следствием эквивалентной редукции задачи Коши к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода и его однозначной разрешимости (см. лемму 1). С другой стороны, существование решения можно обосновать непосредственной подстановкой (16) в дифференциальное уравнение (4), что позволяет непосредственно убедиться в принадлежности найденного решения $u(t)$ классу функций $C^1[0, T] \cap C^2(0, T]$, причём $\ddot{u}(t)$ в точке $t = 0$ имеет интегрируемую особенность порядка $2\beta < 1$.

Предельным переходом при $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$ в формуле (16) нетрудно записать решение $u(t)$ для случая $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 = \lambda_2$. Случай, когда один из корней $\lambda^2 + p\lambda + q$ равен нулю, получается непосредственно из (16). Если $\lambda_{1,2} = \sigma \pm \omega i$, то решение (16) принимает вид

$$u(t) = u_0 \left[\text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t) - \frac{\sigma}{\omega} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t) \right] + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \text{Exp}(\alpha, 2 - \alpha; \lambda; t) + \frac{1}{\omega} \int_0^t \text{Exp}(\alpha, 2 - \alpha; \lambda, t - \tau) f(t - \tau) d\tau,$$

где $\lambda = \sigma + \omega i$, а введённые в работе [16] действительные функции

$$\begin{aligned} \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) &= t^{\mu-1} \text{Ec}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) = \frac{1}{2} t^{\mu-1} [\text{E}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) - \text{E}_\alpha(\bar{\lambda} t^\alpha; \mu)], \\ \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) &= t^{\mu-1} \text{Es}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) = \frac{1}{2i} t^{\mu-1} [\text{E}_\alpha(\lambda t^\alpha; \mu) - \text{E}_\alpha(\bar{\lambda} t^\alpha; \mu)] \end{aligned} \quad (17)$$

являются дробными аналогами функций $e^{\sigma t} \cos \omega t$ и $e^{\sigma t} \sin \omega t$, совпадая с последним при $\alpha = \mu = 1$.

Функции (15) и (17) имеют простые формулы целочисленного дифференцирования [16] и связаны формулами, аналогичными формуле Эйлера

$$\text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) = \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t) + i \text{Exp}(\alpha, \mu; \lambda; t),$$

в частности,

$$\text{Exp}(\alpha, 1; \lambda; t) = \text{Ec}_\alpha(\lambda t^\alpha; 1) + i \text{Es}_\alpha(\lambda t^\alpha; 1).$$

Формулы дробного интегрирования и дифференцирования функции (15) будут следующими:

$$I_{0t}^\alpha \text{Exp}(\sigma, \mu; \lambda; t) = \text{Exp}(\sigma, \mu + \alpha; \lambda; t), \quad D_{0t}^\alpha \text{Exp}(\sigma, \mu; \lambda; t) = \text{Exp}(\sigma, \mu - \alpha; \lambda; t),$$

где $\alpha > 0$, μ, α — произвольные комплексные параметры.

Наконец, используем дробные аналоги функций $\cos z$ и $\sin z$ [16]:

$$C_{\alpha}(z; \mu) = \frac{1}{2} [E_{\alpha}(iz; \mu) - E_{\alpha}(-iz; \mu)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2\alpha k + \mu)},$$

$$S_{\alpha}(z; \mu) = \frac{1}{2i} [E_{\alpha}(iz; \mu) - E_{\alpha}(-iz; \mu)] = z \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2)^k}{\Gamma(2\alpha k + \alpha + \mu)},$$

для которых в случае $\lambda = i\omega$ справедлива формула Эйлера

$$\text{Exp}(\alpha, 1; i\omega, t) = C_{\alpha}(\omega t^{\alpha}; 1) + iS_{\alpha}(\omega t^{\alpha}; 1).$$

Выпишем теперь решение задачи (3), (4) в случае чисто мнимых $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$. Оно имеет вид

$$u(t) = u_0 C_{\alpha}(\omega t^{\alpha}; 1) + \frac{i_0}{\omega} t^{\beta} S_{\alpha}(\omega t^{\alpha}; 1 + \beta) + \frac{1}{\omega} \int_0^t (t - \tau)^{\beta} S_{\alpha}[\omega(t - \tau)^{\alpha}; 1 + \beta] f(\tau) d\tau, \quad (18)$$

где $\beta = 1 - \alpha$. Хорошо видно, что при $\alpha = 1$ функции $C_1(\omega t; 1) = \cos \omega t$, $S_1(\omega t; 1) = \sin \omega t$, и тогда $u(t)$ из (18) является решением задачи Коши для дифференциального уравнения гармонического осциллятора (6) при $p = 0$.

Рассмотрим, наконец, решение $u(t)$ в (16) как функцию параметра α . Справедливо утверждение.

ТЕОРЕМА 2. *Решение задачи Коши (3) для дифференциального уравнения (4) является непрерывной функцией параметра $\alpha \in (1/2, 1)$, причём при $\alpha \rightarrow 1$ ($\beta \rightarrow 0$) оно переходит в хорошо известное решение дифференциального уравнения (6).*

3. В этом разделе будет рассмотрено дифференциальное уравнение (5) в предположении, что его решение в начальной точке $t = 0$ заведомо отлично от нуля, и тем самым одно из начальных условий: $u(0) = u_0$, — можно считать заданным.

Основная проблема постановки начальных задач для дифференциальных уравнений с дробными производными порядка больше единицы состоит в том, что даже для «достаточно хороших» функций дробная производная может оказаться функцией несуммируемой на отрезке $[0, T]$.

Запишем дифференциальное уравнение (5) в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} (\dot{u} + p D_{0t}^{\beta} u + q I_{0t}^{1-2\beta} u) = f(t). \quad (19)$$

Если ввести новую функцию $v(t) = \dot{u} + p D_{0t}^{\beta} u + q I_{0t}^{1-2\beta} u$, то для простейшего дифференциального уравнения относительно функции $v(t)$ естественно предположить существование предела

$$\lim_{t \rightarrow 0+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 0+} (\dot{u} + p D_{0t}^{\beta} u + q I_{0t}^{1-2\beta} u) = \lim_{t \rightarrow 0+} (\dot{u} + p D_{0t}^{\beta} u) = u_1.$$

Тогда $v(t) = u_1 + I_{0t}^1 f$ при $f(t) \in L(0, T)$. Эти наводящие рассуждения приводят к следующей нелокальной постановке задачи типа Коши:

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} [\dot{u}(t) + pD_{0t}^\beta u] = u_1 \quad (20)$$

для дифференциального уравнения (5) или (19).

ЛЕММА 2. Пусть $\beta \in (0, 1/2)$; $p, q \in \mathbb{R}$, $f(t) \in L(0, T)$. Функция $u(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T)$: $\ddot{u}(t) + pD_{0t}^{1+\beta} u \in L(0, T)$ удовлетворяет равенствам (5) и (20) тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению

$$u(t) + pI_{0t}^\alpha u + qI_{0t}^{2\alpha} u = I_{0t}^2 f + u_0 + u_1 t \quad (21)$$

в каждой точке $(0, T]$, где $\alpha = 1 - \beta$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $u(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T]$ удовлетворяет равенствам (5) и (20). Интегрируя уравнение (19) первый раз, получим

$$\dot{u}(t) + pD_{0t}^\beta u + q \frac{d}{dt} I_{0t}^{1-2\beta} u = I_{0t}^1 f + u_1. \quad (22)$$

Второе интегрирование приводит к уравнению (21), так как для функций $u(t) \in C[0, T]$ выполняется $\lim_{t \rightarrow 0+} I_{0t}^{1-2\beta} u = \lim_{t \rightarrow 0+} I_{0t}^{1-\beta} u = 0$.

Достаточность очевидна в силу свойства $D_{0t}^\alpha I_{0t}^\alpha \varphi = \varphi(t)$, справедливого для любой функции $\varphi(t) \in L(0, T)$.

Осталось убедиться, что равенства (20) выполняются. Это тоже хорошо видно, если в уравнениях (21) и (22) перейти к пределу при $t \rightarrow 0+$. $\square$

Решение интегрального уравнения (21) проводится по той же схеме, что и решение уравнения (7), и имеет вид (14), где следует подставить $\varphi(t) = I_{0t}^2 f + u_0 + u_1 t$. После необходимых вычислений получим решение задачи типа Коши (5)–(20) в виде

$$\begin{aligned} u(t) = & u_0 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha; 1) - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha; 1) \right] + \\ & + u_1 t \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_\alpha(\lambda_1 t^\alpha; 2) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E_\alpha(\lambda_2 t^\alpha; 2) \right] + \\ & + \int_0^t (t - \tau) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} E_\alpha(\lambda_1 (t - \tau)^\alpha; 2) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} E_\alpha(\lambda_2 (t - \tau)^\alpha; 2) \right] f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} u(t) = & u_0 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda_1, t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda_2, t) \right] + \\ & + u_1 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1, t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2, t) \right] + \\ & + \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1, t - \tau) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2, t - \tau) \right] f(\tau) d\tau. \quad (23) \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Пусть в уравнении (5) $\beta \in (0, 1/2)$; $p, q \in \mathbb{R}$, λ_1, λ_2 — различные корни многочлена $\lambda^2 + p\lambda + q$; $f(t) \in L(0, T)$. Тогда единственное в классе функций $u(t) \in C[0, T] \cap C^2(0, T)$ решение задачи типа Коши (20) существует в форме равенства (23).

Как и в теореме 1, доказательство существования решения легко проверить непосредственной подстановкой $u(t)$ из формулы (23) в дифференциальное уравнение (5). В процессе вычисления производных устанавливается принадлежность функции $u(t)$ классу $C[0, T] \cap C^2(0, T)$ и характер поведения её производных в окрестности точки $t = 0$. Именно $\dot{u}(t) = O(t^{\alpha-1})$, $D_{0t}^\beta u = O(t^{\alpha-1})$, $\alpha = 1 - \beta$, и сумма $\dot{u}(t) + pD_{0t}^\beta u$ есть функция, непрерывная в нуле, так как

$$\lim_{t \rightarrow 0+} [\dot{u}(t) + pD_{0t}^\beta u] = [\dot{u}(t) + pD_{0t}^\beta u] \Big|_{t=0} = u_1.$$

Вторая производная решения $\ddot{u}(t)$ имеет несуммируемую особенность в нуле, поскольку $\ddot{u}(t) = O(t^{\alpha-2})$.

Справедливо утверждение, аналогичное теореме 2.

ТЕОРЕМА 4. Решение задачи Коши (20) для дифференциального уравнения (5) является непрерывной функцией параметра $\alpha \in (1/2, 1)$, причём при $\alpha \rightarrow 1$ ($\beta \rightarrow 0$) оно переходит в известное решение дифференциального уравнения (6) с начальными условиями

$$u(0) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} [\dot{u}(t) + pu(t)] = u_1. \quad (24)$$

Вид второго начального условия в (24) подсказывает иную конструкцию второго условия в (20), обладающего тем свойством, что при $\beta \rightarrow 0$ оно переходит в классическое начальное условие $\lim_{t \rightarrow 0+} \dot{u}(t) = u_2$.

Рассмотрим видоизмененную задачу типа Коши для дифференциального уравнения (5)

$$\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0+} \left\{ \dot{u}(t) + p \left[D_{0t}^\beta u - u(t) \right] \right\} = u_2. \quad (25)$$

Решение задачи с начальными условиями (25) очевидно существует, единственно и может быть найдено по формуле (23), в которой следует заменить u_1 на $pu_0 + u_2$.

Действительно, если существует $\lim_{t \rightarrow 0+} u(t) = u_0$, то будет существовать и

$$\lim_{t \rightarrow 0+} [\dot{u}(t) + pD_{0t}^\beta u] = pu_0 + u_2,$$

откуда $u_1 = pu_0 + u_2$.

При $\beta \rightarrow 0$ второе условие в (25) переходит в классическое, а решение уравнения (5) с условиями (25)

$$u(t) = u_0 \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda_1, t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 1; \lambda_2, t) \right] +$$

$$\begin{aligned}
& + (pu_0 + u_2) \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1, t) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2, t) \right] + \\
& + \int_0^t \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_1, t - \tau) - \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \text{Exp}(\alpha, 2; \lambda_2, t - \tau) \right] f(\tau) d\tau \quad (26)
\end{aligned}$$

при $\beta \rightarrow 0$ — в решение уравнения (6).

Заключение. Рассмотрены два обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка с дробными производными Римана—Лиувилля порядка меньше и больше единицы. Найдены точные решения задачи Коши и видоизмененной задачи типа Коши, обладающие тем свойством, что при устремлении параметра дробности β к нулю и сами уравнения, и постановки начальных задач, и их решения переходят в классическую задачу и её решение для дифференциального уравнения осциллятора с вязким трением. Указанные дифференциальные уравнения могут выступать в качестве модельных уравнений дробных осцилляторов, описывающих некоторые динамические процессы, характерные для систем с памятью или сред с фрактальной структурой [5]. Однопараметрические семейства решений этих уравнений, в свою очередь, могут оказаться полезными в задачах аппроксимации и параметрической идентификации нелинейных динамических систем.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (код проекта РНП 2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987. — 688 с.
2. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations / North-Holland Mathematics Studies, 204; ed. J. van Mill. — Amsterdam: Elsevier, 2006. — 523 pp.
3. Podlubny I. Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, Some Methods of Their Solution and Some of Their Applications / Mathematics in Science and Engineering, 198. — San Diego: Academic Press, 1999. — 340 pp.
4. Miller K. S., Ross B. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. — New York: Jon Wiley & Sons. Inc., 1993. — 366 pp.
5. Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003. — 272 с.
6. Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. — М.: Высшая школа, 1995. — 301 с.
7. Вірченко Н. О., Рубак В. Я. Основи дробового інтегро-диференціювання. — Київ: Задруга, 2007. — 361 с.
8. Oldham K. B., Spanier J. The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order / Mathematics in Science and Engineering, 111. — San Diego: Academic Press, 1974. — 234 pp.
9. Чикрий А. А., Матичин И. И. Об аналоге формулы Коши для линейных систем произвольного дробного порядка // *Доповіді Національної академії наук України*, 2007. — № 1. — С. 50–55.
10. Огородников Е. Н. Математические модели дробных осцилляторов, постановка и структура решения задачи Коши / В сб.: *Тр. Шестой Всерос. научн. конф. с междунар. участием. Ч. 1: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краевые задачи.* — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 177–181.
11. Tricomi F. G. Integral Equations / Pure and Applied Mathematics, Vol. 5. — New York: Interscience, Inc., 1957. — 238 pp.; русск. пер.: *Трикоми Ф. Интегральные уравнения.* — М.: Ин. лит., 1960. — 300 с.
12. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 672 с.

13. Огородников Е. Н. О некоторых краевых задачах для системы уравнений Бицадзе—Лыкова с инволютивной матрицей / В сб.: *Тр. десятой межвуз. науч. конф. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи* / Мат. моделирование и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2000. — С. 119–126.
14. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. О некоторых свойствах операторов с функцией Mittag—Леффлера в ядрах / В сб.: *Тр. шестой Всероссийской научн. конф. с междунар. участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи* / Мат. моделирование и краевые задачи. — Самара: СамГТУ, 2009. — С. 181–188.
15. Огородников Е. Н. Корректность задачи Коши—Гурса для системы вырождающихся нагруженных гиперболических уравнений в некоторых специальных случаях и её равносильность задачам с нелокальными краевыми условиями // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2004. — № 26. — С. 26–38.
16. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Некоторые специальные функции в решении задачи Коши для одного дробного осцилляционного уравнения // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2009. — № 1(18). — С. 276–279.

Поступила в редакцию 01/II/2010;
в окончательном варианте — 15/III/2010.

MSC: 45J05, 26A33

SETTING AND SOLVING OF THE CAUCHY TYPE PROBLEMS FOR THE SECOND ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RIEMANN—LIOUVILLE FRACTIONAL DERIVATIVES

E. N. Ogorodnikov, N. S. Yashagin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mails: eugen.ogo@gmail.com; nik-yashagin@yandex.ru

The correctness of the Cauchy problems in local (classical) and nonlocal staging for two linear ordinary second order differential equations with Riemann—Liouville fractional derivatives is substantiated. The explicit solutions in terms of some special functions related Mittag—Leffler type function are found out. Continuous dependence from the fractional parameter β for these solutions is indicated. For the second equation the changing statement of the Cauchy type problem coinciding with classical when $\beta = 0$ is studied. These equations are proposed such as some model fractional oscillating equation.

Key words: fractional calculus, ordinary differential equations with Riemann—Liouville fractional derivatives, fractional oscillating equation, Cauchy type problem, Mittag—Leffler type functions.

Original article submitted 01/II/2010;
revision submitted 15/III/2010.

Eugeny N. Ogorodnikov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Nikolay S. Yashagin*, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.