Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Курушина, Ю. В. Желнов, И. П. Завершинский, В. В. Максимов, Образование диссипативных структур в двухкомпонентных системах типа реакция-диффузия во флуктуирующей среде, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 143–153

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu777>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 18:06:47

УДК 517.957:519.21:519.62

ОБРАЗОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ СТРУКТУР В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ ТИПА РЕАКЦИЯ–ДИФФУЗИЯ ВО ФЛУКТУИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ

*С. Е. Курушина, Ю. В. Желнов, И. П. Завершинский,
В. В. Максимов*

Самарский государственный аэрокосмический университет им. ак. С. П. Королёва,
443086, Самара, Московское ш., 34.

E-mail: kurushina72@mail.ru

Исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы на образование диссипативных структур при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах «хищник – жертва» на примере модели Шеффера. Получена система уравнений, описывающих взаимодействие незатухающих мод (параметров порядка). Показано, что флуктуации параметров приводят к изменению собственных значений неустойчивых мод системы. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы. Исследовано изменение уровня флуктуаций плотностей биомасс популяций в процессе формирования диссипативных структур при изменении параметров внешнего случайного поля.

Ключевые слова: мультипликативные флуктуации параметров, формирование диссипативных структур, неустойчивые моды, уравнения Гинзбурга–Ландау, численное моделирование.

Введение. Возникновение и эволюция пространственных и пространственно-временных структур в экологических системах вызывают в настоящее время возрастающий интерес [1–4]. Недавно были опубликованы работы, в которых исследуется образование пространственно-временных структур в системах «хищник – жертва», находящихся во внешней флуктуирующей среде [2–4]. В [2] показано, что внешний шум разрушает симметрию и способствует «размыванию» контуров спиральных волн и структур, что, по мнению авторов [2], делает моделируемые структуры более адекватными естественным. Кроме того показано, что в случае тьюринговых структур шум может индуцировать переходы между альтернативными стабильными пространственными структурами. В работах [3, 4] рассматривается влияние дельта-коррелированного в пространстве и во времени внешнего случайного поля на динамику системы «фитопланктон – зоопланктон» с лизогенной вирусной инфекцией в популяции фитопланктона. Показано, что внешний шум может способствовать выживанию и пространственному распространению восприимчивых и инфицированных видов, которые в детерминированной среде исчезают, а также индуцировать локальные вспышки «подверженных опасности» видов в случае, когда области параметров соответствуют неустойчивому состоянию системы. Этот эффект аналогичен шумоиндуцированному кинетическому переходу, описанному в [5, 6]. В настоящей работе исследуется

Светлана Евгеньевна Курушина (к.ф.-м.н., доц.), докторант, каф. физики. Юрий Валериевич Желнов, магистрант, каф. физики. Игорь Петрович Завершинский (д.ф.-м.н., проф.), зав. кафедрой, каф. физики. Валерий Владимирович Максимов (к.т.н., доц.), доцент, каф. физики.

влияние внешней флуктуирующей среды на возникновение и формирование пространственных диссипативных структур (ДС) взаимодействующих популяций фитопланктона и зоопланктона в рамках модели Шеффера [7].

1. Математическая модель. В отсутствие внешнего флуктуирующего фона взаимодействие популяций фитопланктона x_1 (жертвы) и зоопланктона x_2 (хищники) описываются системой [7]

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial t} &= rx_1(1 - x_1) - \frac{ax_1}{1 + bx_1}x_2 + d_1\nabla^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial t} &= \frac{ax_1}{1 + bx_1}x_2 - mx_2 - \frac{g^2 x_2^2}{1 + h^2 x_2^2}f + d_2\nabla^2 x_2,\end{aligned}\tag{1}$$

где параметры r, a, b, m, g, h, d_1 и d_2 описаны в [7]. Параметр f определяет постоянную численность планктоноядной рыбы и является контрольным. Бифуркационный анализ системы (1) проведен в работах [7, 8]. Известно, что в подобных системах с трофической функцией хищника, не меняющей знака кривизны (модель «глупый хищник» [9]), происходит мягкая потеря устойчивости. Вводя безразмерное время $\tau = rt$ и координаты $\vec{x}' = \vec{x}\sqrt{r/d_1}$ и представляя параметры m/r и a/r , зависящие от коэффициентов естественного прироста фитопланктона r , естественной смертности зоопланктона m и трофического коэффициента a , в следующем виде:

$$m/r = (m_0/r_0)(1 + f_1(\vec{x}', t)), \quad a/r = (a_0/r_0)(1 + f_2(\vec{x}', t)),$$

где m_0, r_0, a_0 — пространственно-временные средние соответствующих коэффициентов, перепишем уравнения модели (1):

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial \tau} &= x_1(1 - x_1) - \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\vec{x}', \tau))\frac{x_1 x_2}{(1 + bx_1)} + \nabla'^2 x_1, \\ \frac{\partial x_2}{\partial \tau} &= \frac{a_0}{r_0}(1 + f_2(\vec{x}', \tau))\frac{x_1 x_2}{(1 + bx_1)} - \frac{m_0}{r_0}(1 + f_1(\vec{x}', \tau))x_2 - \\ &\quad - \frac{g^2 x_2^2}{r_0(1 + h^2 x_2^2)}f + \frac{d_2}{d_1}\nabla'^2 x_2.\end{aligned}\tag{2}$$

Здесь случайные однородные изотропные поля $f_i(\vec{x}, \tau)$ определяют пространственно-временные гауссовы флуктуации этих параметров.

2. Пространственные структуры

2.1. Аналитическое решение. Уравнения Гинзбурга—Ландау. Исследование системы (2) будем проводить, используя концепцию параметров порядка, развитую в [10]. Пусть поля $f_i(\vec{x}, \tau)$ характеризуются корреляционным тензором $\langle f_i(\vec{x}', t')f_j(\vec{x}'', \tau) \rangle = F_i(|\vec{x}' - \vec{x}''|)\delta(t' - \tau)\delta_{ij}$ ($i, j \equiv 1, 2$) и нулевыми средними значениями. Функции $F_i(|\vec{x}' - \vec{x}''|)$ определяют пространственную зависимость корреляций случайного поля [11]. Дельта-коррелированность во времени означает, что время корреляции случайного поля гораздо меньше всех характерных времен задачи. Перепишем систему (2) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tau} - K(\nabla'^2)\right)\vec{q} = \vec{g} + \vec{F},\tag{3}$$

где

$$K(\nabla^2) = \begin{pmatrix} 1 - 2x_{10} - A + \nabla^2 & -B \\ A & B - m_0/r_0 - Cf + D\nabla^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $A = a_0 x_{20}/[r_0(1 + bx_{10})^2]$, $B = a_0 x_{10}/[r_0(1 + bx_{10})]$, $C = 2g^2 x_{20}/[r_0(1 + h^2 x_{20}^2)^2]$, $D = d_2/d_1$. Величины $q_1 = x - x_{10}$, $q_2 = x - x_{20}$ определяют отклонения концентраций от стационарных состояний x_{10} , x_{20} . Стационарные состояния определяются численно как точки пересечения главных изоклин локальной системы (1). Вектор $\vec{g}$ содержит нелинейные слагаемые, полученные разложением в ряд детерминированных слагаемых в правой части уравнения (2):

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g_{1,11}^{(2)} q_1^2 + g_{1,12}^{(2)} q_1 q_2 + g_{1,111}^{(3)} q_1^3 + g_{1,112}^{(3)} q_1^2 q_2 \\ g_{2,11}^{(2)} q_1^2 + g_{2,22}^{(2)} q_2^2 + g_{2,12}^{(2)} q_1 q_2 + g_{2,111}^{(3)} q_1^3 + g_{2,112}^{(3)} q_1^2 q_2 + g_{2,222}^{(3)} q_2^3 \end{pmatrix}.$$

Величины $g_{j,nm}^{(2)}$, $g_{j,nml}^{(3)}$ ($n, m, l \equiv 1, 2$) определены следующим образом:

$$\begin{aligned} g_{1,11}^{(2)} &= -1 + \frac{a_0 b x_{20}}{r_0 (1 + b x_{10})^3}, \quad g_{1,12}^{(2)} = -\frac{a_0}{r_0 (1 + b x_{10})^2}; \\ g_{1,111}^{(3)} &= -\frac{a_0 b^2 x_{20}}{r_0 (1 + b x_{10})^4}, \quad g_{1,112}^{(3)} = \frac{a_0 b}{r_0 (1 + b x_{10})^3}, \quad g_{2,222}^{(3)} = \frac{4g^2 f h^2 x_{20} (1 - h^2 x_{20}^2)}{r_0 (1 + h^2 x_{20}^2)^4}; \\ g_{2,11}^{(2)} &= -\frac{a_0 b x_{20}}{r_0 (1 + b x_{10})^3}, \quad g_{2,22}^{(2)} = -\frac{g^2 f (1 - 3h^2 x_{20}^2)}{r_0 (1 + h^2 x_{20}^2)^3}; \\ g_{2,12}^{(2)} &= -g_{1,12}^{(2)}, \quad g_{2,111}^{(3)} = -g_{1,111}^{(3)}, \quad g_{2,112}^{(3)} = -g_{1,112}^{(3)}. \end{aligned}$$

Вектор $\vec{F} = (F_1, F_2)$ содержит случайные компоненты

$$\begin{aligned} F_1 &= -f_2(\vec{x}, \tau) (a_0 x_{20} x_{10}/[r_0(1 + bx_{10})] + Aq_1 + Bq_2 + \\ &\quad + g_{2,11}^{(2)} q_1^2 + g_{2,12}^{(2)} q_1 q_2 + g_{2,111}^{(3)} q_1^3 + g_{2,112}^{(3)} q_1^2 q_2), \\ F_2 &= -F_1 - (m_0/r_0) f_1(\vec{x}, \tau) (x_{20} + q_2), \end{aligned}$$

которые получены разложением в ряд функции $x_1 x_2/(1 + bx_1)$. Представим вектор $\vec{q}$ в виде разложения по собственным функциям оператора $K(\nabla^2)$:

$$\vec{q}(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, j} \vec{O}^{(j)} \xi_{\vec{k}}^{(j)}(t) e^{i\vec{k}\vec{x}}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

где $\vec{O}^{(j)}$ — собственные векторы оператора $K(\nabla^2)$. Тогда из (3), (4) следуют уравнения для $\xi_{\vec{k}}^{(j)}$:

$$\frac{d\xi_{\vec{k}}^{(j)}}{d\tau} - \lambda_j(k) \xi_{\vec{k}}^{(j)} = \sum_{m,n=1}^2 \sum_{\vec{k}', \vec{k}''} \delta(\vec{k}' + \vec{k}'' - \vec{k}) \sigma_{mn}^{(j)} \xi_{\vec{k}'}^{(m)} \xi_{\vec{k}''}^{(n)} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{m;n;l=1}^2 \sum_{\vec{k}'\vec{k}''\vec{k}'''} \delta(\vec{k}' + \vec{k}'' + \vec{k}''' - \vec{k}) \sigma_{mnl}^{(j)} \xi_{\vec{k}'}^{(m)} \xi_{\vec{k}''}^{(n)} \xi_{\vec{k}'''}^{(l)} + \\
& + (a_0/r_0) (O_2^{*(j)}(k) - O_1^{*(j)}(k)) \left[(x_{20}x_{10}/(1 + bx_{10})) z_{2,\vec{k}}(t) + \right. \\
& + \sum_{m=1}^2 \sum_{\vec{k}'} \varepsilon_m^{(1)}(k') \xi_{\vec{k}'}^{(m)} z_{2,(\vec{k}-\vec{k}')} (t) + \sum_{m;n=1}^2 \sum_{\vec{k}'\vec{k}''} \varepsilon_{mn}^{(2)}(k', k'') \xi_{\vec{k}'}^{(m)} \xi_{\vec{k}''}^{(n)} z_{2,(\vec{k}-\vec{k}'-\vec{k}'')} (t) + \\
& \left. + \sum_{m;n;l=1}^2 \sum_{k'k''} \varepsilon_{mnl}^{(3)}(k', k'', k''') \xi_{\vec{k}'}^{(m)} \xi_{\vec{k}''}^{(n)} \xi_{\vec{k}'''}^{(l)} z_{2,(\vec{k}-\vec{k}'-\vec{k}''-\vec{k}''')} (t) \right] - \\
& - O_2^{*(j)}(k) (m_0/r_0) x_{20} z_{1,\vec{k}}(t) - \\
& O_2^{*(j)}(k) (m_0/r_0) \sum_{m=1}^2 \sum_{\vec{k}'} O_2^{(m)}(k') \xi_{\vec{k}'}^{(m)} z_{1,(\vec{k}-\vec{k}')} (t), \quad (5)
\end{aligned}$$

где собственные значения и собственные векторы оператора $K(\nabla^2)$ следующие:

$$\begin{aligned}
\alpha(k) &= 1 - 2x_{10} - A + B - \frac{m_0}{r_0} - Cf - (D + 1)k^2; \\
\beta(k) &= (1 - 2x_{10} - A - k^2 D) \left(B - \frac{m_0}{r_0} - Cf - Dk^2 \right) + AB, \\
\lambda_j(k) &= \frac{\alpha(k)}{2} \pm \sqrt{\frac{\alpha^2(k)}{4} - \beta(k)}, \\
\vec{O}^{(j)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-2x_{10}-A-k^2-\lambda_j}{B} \end{pmatrix}, \quad \vec{O}^{*(j)} = \begin{pmatrix} (-1)^j \frac{1-2x_{10}-A-k^2-\lambda_\mu}{\lambda_2-\lambda_1} \\ (-1)^j \frac{B}{\lambda_1-\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \mu = \begin{cases} 2, & \text{если } j = 1, \\ 1, & \text{если } j = 2, \end{cases}
\end{aligned}$$

а $O_l^{*(j)}(k)$ — компоненты собственных векторов оператора, сопряженного к $K(\nabla^2)$. Выражения для $\sigma_{nm}^{(j)}(k, k', k'')$, $\sigma_{nml}^{(j)}(k, k', k'', k''')$, $\varepsilon_n^{(1)}(k')$, $\varepsilon_{nm}^{(2)}(k', k'')$, $\varepsilon_{nml}^{(3)}(k', k'', k''')$ здесь не приводятся в силу своей громоздкости;

$$z_{j,\vec{k}}(t) = \int e^{-i\vec{k}\vec{x}} f_j(\vec{x}, t) d\vec{x}$$

— компоненты случайного векторного поля $\vec{z}_{\vec{q}}(t)$, имеющие нулевые средние; j и $\vec{k}$ — индексные аргументы этого поля. Корреляционные функции для компонент поля $\vec{z}(t)$ имеют следующий вид [10, 11]:

$$\langle z_{j,\vec{k}}(t) z_{l,\vec{k}'}(\tau) \rangle = g_{jl}(|\vec{k}|) \delta(\vec{k} - \vec{k}') \delta(t - \tau) \delta_{jl}.$$

Положим далее, для определенности $F_j(|\vec{x} - \vec{x}'|) = \theta_j \exp(-k_{fj}|\vec{x} - \vec{x}'|)$. Здесь k_{fj} — величины, обратные радиусам корреляций. Тогда для двумерной среды $g_{jj} = 2\pi\theta_j k_{fj}/(k^2 + k_{fj}^2)^{3/2}$.

Система (5) содержит как устойчивые, так и неустойчивые моды. Вблизи точки бифуркации Тьюринга времена релаксации незатухающих мод стремятся к бесконечности, т.е. действительные части $\lambda_1(k)$ стремятся к нулю. Поэтому затухающие моды адиабатически следуют за незатухающими модами. Чтобы провести процедуру адиабатического исключения устойчивых мод, перепишем (5), выделив из нее две подсистемы уравнений: для неустойчивых (u) и устойчивых (s) мод. Амплитуды устойчивых мод много меньше амплитуд неустойчивых мод ($|\xi_s| \ll |\xi_u|$), и их изменения происходят самоогласованным образом: $\xi_s \sim \xi_u^2$, а $|z_{j,k}(t)|$ имеет тот же порядок малости, что $|\xi_s|$. Тогда, учитывая, что при возникновении неустойчивости типа мягкой моды производной $d\xi_{\vec{k}s}^{(j)}/d\tau$ можно пренебречь, с точностью до слагаемых третьего порядка получим уравнения Гинзбурга—Ландау:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_{\vec{k}u}^{(1)}}{\partial \tau} - \lambda_1(k_u) \xi_{\vec{k}u}^{(1)} = & f[k_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t)] + \sum_{\vec{k}', u} \alpha(k_u, k'_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t)) \xi_{\vec{k}'u}^{(1)} + \\ & + \sum_{\vec{k}', \vec{k}'', uu} \left[\beta(k_u, k'_u, k''_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t)) + \sigma_{11}^{(1)}(k_u, k'_u, k''_u) \delta(\vec{k}'_u + \vec{k}''_u - \vec{k}_u) \right] \xi_{\vec{k}'u}^{(1)} \xi_{\vec{k}''u}^{(1)} + \\ & + \sum_{\vec{k}', \vec{k}'', \vec{k}''', uu} \left[\gamma(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t)) + \right. \\ & \left. + \omega(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, k_s) \delta(\vec{k}'_u + \vec{k}''_u + \vec{k}'''_u - \vec{k}_u) \right] \xi_{\vec{k}'u}^{(1)} \xi_{\vec{k}''u}^{(1)} \xi_{\vec{k}'''u}^{(1)}. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь функции $\omega(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, k_s)$, $\alpha(k_u, k'_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t))$, $\beta(k_u, k'_u, k''_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t))$, $\gamma(k_u, k'_u, k''_u, k'''_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t))$ и $f[k_u, k_s, \vec{z}_{\vec{q}}(t)]$ не приведены ввиду их крайней громоздкости. Дельта функции определяют отбор для взаимодействующих мод.

Усредняя уравнения системы (6) по ансамблю реализаций, принимая во внимание ее формальные решения и раскрывая моменты и корреляторы на основании правил, описанных в [12], окончательно получим систему, структура которой имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle \xi_{\vec{k}u}^{(1)} \rangle}{\partial t} = & \widehat{L}_0(\vec{k}_u) + \widehat{L}_1(\vec{k}_u, \vec{k}'_u, \vec{k}''_u, \vec{k}_s) \langle \xi_{\vec{k}''u}^{(1)} \rangle + \\ & + \widehat{L}_2(\vec{k}_u, \vec{k}'_u, \vec{k}''_u, \vec{k}'''_u, \vec{k}_s) \langle \xi_{\vec{k}''u}^{(1)} \xi_{\vec{k}'''u}^{(1)} \rangle + \\ & + \widehat{L}_3(\vec{k}_u, \vec{k}'_u, \vec{k}''_u, \vec{k}'''_u, \vec{k}^{IV}_u, \vec{k}_s, \vec{k}'_s) \langle \xi_{\vec{k}''u}^{(1)} \xi_{\vec{k}'''u}^{(1)} \xi_{\vec{k}^{IV}u}^{(1)} \rangle. \quad (7) \end{aligned}$$

Процедура раскрытия корреляторов будет приводить к появлению аналогичных корреляторов для других взаимодействующих мод. Поэтому её нужно проводить, пока не будут учтены все слагаемые, содержащие соответствующую степень интенсивности флуктуаций.

Отметим особенности системы (7). Во-первых, после усреднения системы (6) в (7) возникают детерминированные слагаемые, входящие в оператор $\widehat{L}_0(\vec{k}_u)$ и не зависящие от $\langle \xi_{\vec{k}_u}^{(1)}(t) \rangle$, соответствующие постоянной силе, действующей на моду $\langle \xi_{\vec{k}_u}^{(1)}(t) \rangle$ и зависящей от параметров задачи, вида корреляционной функции g_{jj} , интенсивности флуктуаций и волнового числа данной моды. Наличие таких слагаемых в уравнениях (7) приводит к смещению стационарного состояния. Во-вторых, в системе (7) возникают слагаемые, входящие в оператор $\widehat{L}_1(\vec{k}_u, \vec{k}'_u, \vec{k}''_u, \vec{k}_s)$ и пропорциональные $\langle \xi_{\vec{k}_u}^{(1)}(t) \rangle$, что приводит к изменению собственного числа каждой моды и, как следствие, к изменению области неустойчивости. Пусть значения θ_j настолько малы, что в (7) можно ограничиться членами, линейными по интенсивности шума. Выделяя из $\widehat{L}_1(\vec{k}_u, \vec{k}'_u, \vec{k}''_u, \vec{k}_s)$ слагаемые, дающие вклад в собственное значение моды, получаем

$$\lambda = \lambda_1(k_u) + \theta_2(\chi(k_u)/k_{f2}^2 + k_{f2}\varphi(k_u)/(k_u^2 + k_{f2}^2)^{3/2}) + \theta_1(\eta(k_u)/k_{f1}^2 + k_{f1}\rho(k_u)(k_u^2 + k_{f1}^2)^{3/2}). \quad (8)$$

Функции $\chi(k_u)$, $\varphi(k_u)$, $\eta(k_u)$, $\rho(k_u)$ здесь не приводятся в силу громоздкости. При выводе выражения (8) учтено, что $\xi_{-\vec{k}}^{(j)} = \xi_{\vec{k}}^{*(j)} = \xi_{\vec{k}}^{(j)}$, так как решения уравнений (6) должны быть действительными. Из выражения (8) для собственных значений λ неустойчивых мод видно, что их действительная часть пропорциональна интенсивностям флуктуаций θ_j и зависит от радиусов корреляции $r_{fj} = 1/k_{fj}$. И, как следствие, изменение инкремента нарастания каждой моды должно приводить к изменению скорости образования диссипативных структур в зависимости от параметров мультипликативного случайного поля. В [13] показано, что аддитивный шум динамических переменных в модели морфогенеза Гирера—Майнхардта приводит к аналогичному эффекту.

Наконец, при малой интенсивности флуктуаций параметров в процессе образования ДС неустойчивая мода с волновым числом $\vec{k}_u$, кроме мод с волновыми числами $\vec{k}'_u + \vec{k}''_u = \vec{k}_u$ и $\vec{k}'_u + \vec{k}''_u + \vec{k}'''_u = \vec{k}_u$, с которыми она взаимодействует в отсутствии флуктуаций, взаимодействует и с другими неустойчивыми модами, для которых выполняется условие $2\vec{k}'_u - \vec{k}''_u = \vec{k}_u$. При увеличении интенсивности шума во взаимодействие включается все большее число мод.

2.2. Численное моделирование. В [2] показано, что бифуркация Тьюринга в системе (1) может возникать, когда параметры системы изменяются в реальном диапазоне. Здесь выбраны параметры, соответствующие появлению неустойчивости типа мягкой моды [2]: $m_0/r_0 = \mu_1 = 0,49$, $a_0/r_0 = \mu_2 = 8$, $g^2/r_0 = 2,056$, $f = 0,093$, $h = 0,857$, $b = 11,905$, $d_2/d_1 = 1000$ и граничные условия следующего вида:

$$\begin{aligned} x_1(0, y, t) &= x_1(l_1, y, t), & x_1(x, 0, t) &= x_1(x, l_2, t); \\ x_2(0, y, t) &= x_2(l_1, y, t), & x_2(x, 0, t) &= x_2(x, l_2, t); \\ \frac{\partial x_1}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial x_1}{\partial x} \Big|_{x=l_1}, & \frac{\partial x_1}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\partial x_1}{\partial y} \Big|_{y=l_2}; \end{aligned}$$

$$\left. \frac{\partial x_2}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial x_2}{\partial x} \right|_{x=l_1}, \quad \left. \frac{\partial x_2}{\partial y} \right|_{y=0} = \left. \frac{\partial x_2}{\partial y} \right|_{y=l_2}.$$

Здесь $l_1 = l_2 = 200$. Начальные условия соответствуют однородному стационарному состоянию системы, то есть здесь моделируется процесс спонтанного образования ДС.

Реальная флуктуирующая среда моделируется как однородное изотропное гауссово поле с корреляционным тензором [14]

$$\langle f_i(\vec{x}', \tau') f_j(\vec{x}'', \tau'') \rangle = \theta_i \exp(-k_{fi}|\vec{x}' - \vec{x}''|) \exp(-k_{ti}|\tau' - \tau''|) \delta_{ij}.$$

Случайные изменения внешней среды обусловлены суммарным действием множества слабосвязанных факторов и происходят значительно быстрее, чем заметные изменения в поведении системы. Поэтому времена корреляции случайного поля выбраны значительно меньшими характерных времен системы (1). Величины k_{ti} , обратные временам корреляции, в ходе расчёта считаются равными 10^2 . Такой выбор величины k_{ti} позволяет провести сравнение аналитических результатов п. 2.1 с результатами численного эксперимента.

Заметим для дальнейшего, что интенсивность флуктуаций имеет порядок $\theta_j = \delta^2(\bar{\varepsilon}_j)$ в силу связи $\eta_\varepsilon = (\delta(\bar{\varepsilon}_j)/\bar{\varepsilon}_j) \cdot 100\%$, где $(\bar{\varepsilon} = \mu_1, \mu_2)$. Таким образом, рассматриваемый в работе диапазон изменения интенсивностей мультипликативного шума $0 \leq \theta_1 \leq 0,049$ достаточно велик, так как соответствует изменению $\eta_{\mu 1}$ от 0 до 45%. Диапазон $0 \leq \theta_2 \leq 1,44$ соответствует изменению $\eta_{\mu 2}$ от 0 до 15%.

На рис. 1 изображены процессы формирования ДС в распределении плотности биомассы фитопланктона при увеличении интенсивности флуктуаций θ_2 параметра a_0/r_0 , зависящего от коэффициентов естественного прироста фитопланктона r_0 и трофического коэффициента a_0 , от $1,6 \cdot 10^{-3}$ ($\eta_{\mu 2} = 0,5\%$) до $0,16$ ($\eta_{\mu 2} = 5\%$) при неизменном θ_1 . Кроме обычной картины распределения численности фитопланктона по поверхности на этих рисунках добавлен соответствующий вид сверху, дающий более наглядное представление о конфигурации ДС. Для изображения сверху градиент цвета от черного к белому визуализирует изменение значений переменной от минимального до максимального соответственно. Чёрные области соответствуют пустым участкам пространства. Первая, вторая и третья пары вертикальных рядов иллюстрируют образование структур при значениях интенсивности шума θ_2 , равных $1,6 \cdot 10^{-3}$, $6,4 \cdot 10^{-3}$ и $0,16$ (0,5%, одно- и пятипроцентная степень зашумления параметра a_0/r_0), соответственно. Нижний горизонтальный ряд иллюстрирует статистически стационарные состояния при разных значениях θ_2 и $\theta_1 = 2,401 \cdot 10^{-5}$ (1%).

Численно исследовано изменение уровня флуктуаций плотностей биомасс популяций при переходе системы от однородного состояния к ДС в описанном выше эксперименте. На рис. 2 приведены усредненные по поверхности слоя флуктуации $\sigma = \left\langle \sqrt{\langle x_j^2 \rangle - \langle x_j \rangle^2} \right\rangle_s$ в зависимости от времени. Эти графики иллюстрируют тот факт, что в течение переходного режима флуктуации в системе возрастают до макроскопических масштабов. Из рис. 1 и 2 видно, что увеличение θ_2 до $0,16$ приводит к разрушению однородного состояния и формированию статистически стационарной ДС. Скорость этого процесса растёт с ростом интенсивности шума. Аналогичные эффекты наблюдались и в численном эксперименте, проводимом при увеличении интенсивности

флуктуаций θ_1 параметра m_0/r_0 , зависящего от коэффициентов естественного прироста фитопланктона r_0 и естественной смертности зоопланктона m_0 , от нуля до 0,049 ($\eta_{\mu 1} = 45\%$) при неизменном значении θ_2 . Кроме того видно, что наличие внешних флуктуаций разрушает симметрию пространственных структур.

Влияние на эволюцию рассматриваемой системы дальнейшего увеличения

Рис. 1. Временная эволюция тьюринговских структур в распределении плотности биомассы фитопланктона при увеличении интенсивности флуктуаций θ_2 параметра a_0/r_0 ($k_{f1} = k_{f2} = 1$)

Рис. 2. Зависимости от времени усредненных по поверхности слоя флуктуаций плотностей биомасс фитопланктона (а) и зоопланктона (б): 1 — $\theta_1 = 2,401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 1,6 \cdot 10^{-3}$; 2 — $\theta_1 = 2,401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 6,4 \cdot 10^{-3}$ ($k_{f1} = k_{f2} = 1$)

интенсивности θ_2 иллюстрируют рис. 3. Уже при $\theta_2 = 0,16$ статистически стационарная ДС с постоянной конфигурацией не устанавливается. Происходит чередование во времени ДС различной конфигурации. При этом форма и размеры отдельных «впадин» изменяются. При $\theta_2 = 0,64$ отдельные структуры все ещё образуются, но они имеют сильно измененную форму и существуют непродолжительное время. При дальнейшем увеличении θ_2 поведение системы становится хаотическим. Такой тип поведения соответствует переходу к хаосу в распределенных нелинейных системах через перемежаемость [15].

Рис. 4 иллюстрирует процессы структурообразования при увеличении радиусов корреляции и постоянной интенсивности внешнего шума. Из сравне-

Рис. 3. Эволюция системы (2) при больших интенсивностях шума θ_2 в виде сверху: верхний ряд — $\theta_1 = 2,401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 0,16$; средний ряд — $\theta_1 = 2,401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 0,64$; нижний ряд — $\theta_1 = 2,401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 1,44$ ($k_{f1} = k_{f2} = 1$)

Рис. 4. Формирование во времени ДС в распределении плотности биомассы фитопланктона при увеличении радиусов корреляции при постоянной интенсивности шума в виде сверху ($\theta_1 = 2,401 \cdot 10^{-5}$, $\theta_2 = 6,4 \cdot 10^{-3}$): моменты времени, указанные в правом столбце соответствуют моментам установления статистически стационарного состояния; верхний ряд — $r_{f1} = r_{f2} = 10$; средний ряд — $r_{f1} = r_{f2} = 1$; нижний ряд — $r_{f1} = r_{f2} = 0,1$

ния рис. 1 и 4 видно, что изменение радиусов корреляции случайного поля оказывает на процессы образования пространственных структур большее влияние, чем изменение интенсивностей шума.

Заключение. Исследовано влияние мультипликативных флуктуаций параметров системы, описываемых случайным однородным изотропным гауссовым полем, на образование ДС при возникновении неустойчивости типа мягкой моды в системах «хищник – жертва» на примере модели Шеффера. С точностью до слагаемых, линейных по интенсивности флуктуаций и кубических по амплитуде неустойчивых мод, получены уравнения Гинзбурга–Ландау, описывающие взаимодействие этих мод. Показано, что мультипликативные флуктуации параметров системы приводят к смещению стационарного состояния каждой моды, изменению собственных значений задачи и, как следствие, — изменению области неустойчивых мод системы. Из полученной системы уравнений для параметров порядка также следует, что при малой интенсивности шума процесс формирования ДС определяется взаимодействием трех и четырех мод, а при увеличении интенсивности этот процесс определяется многомодовым взаимодействием. Проведено численное моделирование эволюции рассматриваемой системы. Показано качественное соответствие теоретических выводов с численным экспериментом. Найдены бифуркационные значения величин θ_1 и θ_2 , определяющие области существования пространственных ДС различного типа при изменении параметров внешнего поля. Разработанный метод численного анализа трехмерных распределенных систем типа реакция – диффузия в поле мультипликативных и аддитивных флуктуаций может применяться и для изучения других двухкомпонентных систем этого типа.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (код проекта РНП 2.1.1/309).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Amritkar R. E., Rangarajan G. Spatially synchronous extinction of species under external forcing // *Phys. Rev. Lett.*, 2006. — Vol. 96, No. 25. — P. 258102-1–258102-4.
2. Malchow H., Hilker F. M., Petrovskii S. V. Noise and productivity dependence of spatiotemporal pattern formation in a prey-predator system // *Discrete and continuous dynamical systems. Series B*, 2004. — Vol. 4, No. 3. — P. 705–711.
3. Malchow H., Hilker F. M., Sarkar R. R., Brauer K. Spatiotemporal patterns in an excitable plankton system with lysogenic viral infection // *Mathematical and Computer Modelling*, 2005. — Vol. 42, No. 9–10. — P. 1035–1048.
4. Malchow H., Hilker F. M., Petrovskii S. V., Brauer K. Oscillations and waves in a virally infected plankton system. Part I: The lysogenic stage // *Ecological Complexity*, 2004. — Vol. 1, No. 3. — P. 211–223.
5. Михайлов А. С., Упоров И. В. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией // *УФН*, 1984. — Т. 144, № 1. — С. 79–114.
6. Курушина С. Е., Максимов В. В. Шумоиндуцированные фазовые переходы в процессах конкуренции во флуктуирующих средах // *Извест. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2010. — № 1. — С. 4–16.
7. Scheffer M. Fish and nutrients interplay determines algal biomass: a minimal model // *OIKOS*, 1991. — Vol. 62, No. 3. — P. 271–282.
8. Satnoianu R. A., Menzinger M. Non-Turing stationary patterns in flow-distributed oscillators with general diffusion and flow rates // *Phys. Rev. E*, 2000. — Vol. 62, No. 1. — P. 113–119.
9. Свирижев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. — М.: Наука, 1987. — 368 с.
10. Haken H. Synergetik. — Berlin: Springer Verlag, 1982; русск. пер.: Хакен Г. Синергети-

- ка. — М.: Мир, 1980. — 405 с.
11. Азманов С. А., Дьяков Ю. Е., Чиркин А. С. Введение в статистическую радиофизику и оптику. — М.: Наука, 1981. — 640 с.
12. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения глазами физика. — М.: Физматлит, 2001. — 528 с.
13. Курушина С. Е. Аналитическое исследование и численное моделирование контрастных диссипативных структур в поле флуктуаций динамических переменных // *Извест. вузов. Прикладная нелинейная динамика*, 2009. — № 6. — С. 125–138.
14. Horsthemke W., Lefever R. Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology / Springer Series in Synergetics, Vol. 15, Springer, 1983. — 318 pp.; русск. пер.: Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы: теория и применение. — М.: Мир, 1987. — 345 с.
15. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах: Механизмы возникновения, структура и свойства динамического хаоса в радиофизических системах. — М.: Эдиториал УРСС, 2009. — 320 с.

Поступила в редакцию 08/II/2010;
в окончательном варианте — 11/III/2010.

MSC: 37H10, 60H15

PATTERN FORMATION IN TWO-COMPONENT REACTION-DIFFUSION SYSTEMS IN FLUCTUATE ENVIRONMENT

S. E. Kurushina, Yu. V. Zhelnov, I. P. Zavershinskii, V. V. Maximov

S. P. Korolyov Samara State Aerospace University,
34, Moskovskoe sh., Samara, 443086.

E-mail: kurushina72@mail.ru

The influence of multiplicative fluctuations of parameters on pattern formation was researched. The system was obtained which described the interaction of undamped modes when soft mode instability is generated. It was shown that the fluctuations of parameters lead to changing of eigenvalues of unstable modes. The computational modeling of spatial structures evolution was conducted. Changing of fluctuating level of dynamic variables in process of dissipative pattern formation which is conditioned by changing of external random field parameters were researched.

Key words: *multiplicative fluctuations of parameters, pattern formation, unstable modes, Ginzburg–Landau equation, numerical modeling.*

Original article submitted 08/II/2010;
revision submitted 11/III/2010.

Svetlana E. Kurushina (Ph.D. (Phys. & Math.)), Doctoral Candidate, Dept. of Physics. *Yuriy V. Zhelnov*, Graduate Student, Dept. of Physics. *Igor' P. Zavershinskii* (Dr.Sci. (Phys. & Math.)), Head of Dept, Dept. of Physics. *Valeriy V. Maximov* (Ph.D. (Techn.)), Associate Professor, Dept. of Physics.