Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Егорова, В. Е. Зотеев, О сходимости итерационной процедуры средне-квадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели колебаний систем с турбулентным трением, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 171–177

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu778>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 16:48:22

УДК 519.246

О СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЫ СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОГО ОЦЕНИВАНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЛИНЕЙНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ТУРБУЛЕНТНЫМ ТРЕНИЕМ

А. А. Егорова, В. Е. Зотеев

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: aleksandrairanova@yandex.ru

Рассматриваются достаточные условия сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели, описывающей в форме стохастических разностных уравнений результаты наблюдений колебаний систем с турбулентным трением. Применение итерационной процедуры позволяет существенно повысить точность вычисления динамических характеристик систем с турбулентным трением за счет устранения смещения среднеквадратичных оценок коэффициентов разностного уравнения.

Ключевые слова: турбулентное трение, обобщённая регрессионная модель, среднеквадратичное оценивание, сходимость итерационной процедуры.

Одним из эффективных методов параметрической идентификации систем с турбулентным трением является метод, в основе которого лежит среднеквадратичное оценивание коэффициентов стохастического разностного уравнения, описывающего результаты наблюдений ординат колебаний механической системы [1, 2]. Построена линейно-параметрическая дискретная модель свободных колебаний системы с турбулентным трением, связывающая в рекуррентной форме несколько последовательных мгновенных значений виброграммы свободных колебаний, причём коэффициенты модели известным образом связаны с динамическими характеристиками системы. В матричной форме линейно-параметрическая модель колебаний систем с турбулентным трением имеет следующий вид:

$$\begin{cases} b = F\lambda + \eta, \\ \eta = P_\lambda \varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

где P_λ — невырожденная матрица линейного преобразования вектора ε случайной помехи в результатах наблюдений. Алгоритм численного метода среднеквадратичного оценивания коэффициентов разностного уравнения описывается совокупностью рекуррентных формул

$$\hat{\lambda}^{(i)} = (F^\top U_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1} b, \quad (2)$$

где $U_{\hat{\lambda}^{(i)}}^{-1}$ — ленточная пятидиагональная симметричная матрица размера $N \times N$:

$$u_{11} = u_{22} = u_{31} = 1, \quad u_{32} = u_{23} = -\hat{\lambda}_0^{(i)}(1 + \hat{\lambda}_1^{(i)}), \quad u_{42} = u_{24} = 1 + \hat{\lambda}_1^{(i)},$$

Александра Арсеновна Егорова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.
Владимир Евгеньевич Зотеев (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. прикладной математики и информатики.

$$u_{kk} = 2 + 4\hat{\lambda}_1^{(i)}(k-2) + 2(\hat{\lambda}_1^{(i)})^2(k^2 - 4k + 5) + (\hat{\lambda}_0^{(i)})^2(1 + (k-2)\hat{\lambda}_1^{(i)})^2, \\ k \equiv 3, 4, \dots, N;$$

$$u_{k\ k-1} = u_{k-1\ k} = -\hat{\lambda}_0^{(i)}(2 + 2(2k-5)\hat{\lambda}_1^{(i)} + (2k^2 - 10k + 13)(\hat{\lambda}_1^{(i)})^2), \\ k \equiv 4, 5, \dots, N;$$

$$u_{k\ k-2} = u_{k-2\ k} = (1 + (k-3)\hat{\lambda}_1^{(i)})^2, \quad k \equiv 5, 6, \dots, N,$$

где $i \in \mathbb{N}$, $\hat{\lambda}^{(i)}$ — среднеквадратичная оценка вектора коэффициентов, вычисленная на i -той итерации. Остальные элементы $u_{kj} = 0$.

В данной работе рассматриваются достаточные условия сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели колебаний систем с турбулентным трением, описываемой формулами (2).

Обозначим векторную функцию $q(\hat{\lambda}) = (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} b$, где $q = (q_0, q_1, \dots, q_4) \in \mathbb{R}^5$. Далее рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_0 = q_0(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_4), \\ \hat{\lambda}_1 = q_1(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_4), \\ \vdots \\ \hat{\lambda}_4 = q_4(\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_4), \end{cases}$$

которая в матричной форме имеет вид

$$\hat{\lambda} = q(\hat{\lambda}). \quad (3)$$

В n -мерном пространстве введём норму вектора λ и матрицы W следующим образом: $\|\lambda\| = \max_i |\lambda_i|$, $\|W\| = \max_i \sum_{j=1}^n |w_{ij}|$, $i \equiv 1, 2, \dots, n$.

ТЕОРЕМА. Пусть функции $q_i(\hat{\lambda})$ и $\frac{\partial q_i(\hat{\lambda})}{\partial \lambda_j}$ ($i, j \equiv 0, 1, \dots, 4$) определены и непрерывны в известной замкнутой области G действительного n -мерного пространства E^n , причём в области G выполняется неравенство:

$$\lambda = \max \hat{\lambda} \in G \left[\left\| (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top \right\| \|e\| \max_i \left(\sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^0| + \sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^1| \right) \right] < 1, \quad (4)$$

где ω_{ik}^j — элементы матрицы $U_{\hat{\lambda}}^{-1} \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \lambda_j} U_{\hat{\lambda}}^{-1}$ размера $N \times N$; $e = F\hat{\lambda} - b$ — вектор остатков.

Тогда, если последовательные приближения

$$\hat{\lambda}_k = q(\hat{\lambda}_{k-1}), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

не выходят за пределы области G : $\hat{\lambda}_k \in G$, то

- 1) независимо от выбора начального приближения $\hat{\lambda}_0 \in G$, итерационный процесс (5) сходится, т. е. существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}_k = \bar{\lambda}$;
- 2) предельный вектор $\bar{\lambda}$ является единственным решением уравнения (3) в области G ;

3) имеет место оценка

$$\|\bar{\lambda} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}\|, \quad (6)$$

где $0 \leq \alpha < 1$.

Доказательство. Пусть $\lambda^{(1)}$ и $\lambda^{(2)} \in G$. Тогда известно, что существует вектор $\xi \in G$ такой, что выполняется неравенство

$$\|q(\lambda^{(1)}) - q(\lambda^{(2)})\| \leq \|W(\xi)\| \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}\| \leq \max_{\hat{\lambda} \in G} \|W(\hat{\lambda})\| \|\lambda^{(1)} - \lambda^{(2)}\|, \quad (7)$$

где

$$W(\xi) = \left[\frac{\partial q_i(\hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}_j} \right]_{\hat{\lambda}=\xi} \quad (8)$$

— матрица Якоби системы функций $\{q_i(\hat{\lambda})\}_{i=0}^4$ по переменным $\hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_4$, вычисленная в точке $\xi \in G$.

Покажем, что при выполнении условия (4) выполняется условие

$$\max_{\hat{\lambda} \in G} \|W(\hat{\lambda})\| \leq \alpha < 1,$$

т. е. отображение (3) является сжимающим в области G . Действительно, матрицу Якоби (8) можно представить в виде $W(\hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_0} & \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_1} & \dots & \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_4} \end{bmatrix}$, где $\frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_j}$ — вектор-функции. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_j} &= \frac{\partial (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1}}{\partial \hat{\lambda}_j} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} b + (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}^{-1}}{\partial \hat{\lambda}_j} b = \\ &= -(F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} \frac{\partial F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F}{\partial \hat{\lambda}_j} (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} b - (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_j} U_{\hat{\lambda}}^{-1} b = \\ &= (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_j} U_{\hat{\lambda}}^{-1} F (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} b - \\ &\quad - (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_j} U_{\hat{\lambda}}^{-1} b = \\ &= (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_j} U_{\hat{\lambda}}^{-1} (F \hat{\lambda} - b). \end{aligned}$$

Обозначив вектор остатков через $e = F \hat{\lambda} - b$, получим

$$\frac{\partial q}{\partial \hat{\lambda}_j} = (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_j} U_{\hat{\lambda}}^{-1} e,$$

где $\frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_0} = U_{\hat{\lambda}}^0$ — ленточная трёхдиагональная симметричная матрица размера $N \times N$:

$$u_{kk}^0 = 2\hat{\lambda}_0(1 + (k-2)\hat{\lambda}_1)^2, \quad k \equiv 3, 4, \dots, N;$$

$u_{k\ k-1}^0 = u_{k-1\ k}^0 = -2 - 2(2k-5)\hat{\lambda}_1 - (2k^2 - 10k + 13)\hat{\lambda}_1^2$, $k \equiv 4, 5, \dots, N$;
 $u_{32}^0 = u_{23}^0 = -(1 + \hat{\lambda}_1)$; остальные элементы $u_{kj}^0 = 0$; $\frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_1} = U_{\hat{\lambda}}^1$ — ленточная
 пятидиагональная симметричная матрица размера $N \times N$:

$$u_{32}^1 = u_{23}^1 = -\hat{\lambda}_0; \quad u_{42}^1 = u_{24}^1 = 1;$$

$$u_{kk}^1 = 4(k-2) + 4\hat{\lambda}_1(k^2 - 4k + 5) + 2(k-2)\hat{\lambda}_0^2(1 + (k-2)\hat{\lambda}_1), \quad k \equiv 3, 4, \dots, N;$$

$$u_{k\ k-1}^1 = u_{k-1\ k}^1 = -2\hat{\lambda}_0(2k-5 + (2k^2 - 10k + 13)\hat{\lambda}_1), \quad k \equiv 4, 5, \dots, N;$$

$$u_{k\ k-2}^1 = u_{k-2\ k}^0 = 2(k-3)(1 + (k-3)\hat{\lambda}_1), \quad k \equiv 5, 6, \dots, N;$$

остальные элементы $u_{kj}^1 = 0$; $\frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_2}$, $\frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_3}$, $\frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_4}$ — нулевые матрицы размера $N \times N$, поскольку матрица $U_{\hat{\lambda}}$ зависит только от коэффициентов $\hat{\lambda}_0$ и $\hat{\lambda}_1$.

Тогда матрица Якоби (8) примет вид

$$W(\xi) = (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top V(\hat{\lambda}), \quad (9)$$

где $V(\hat{\lambda}) = \begin{bmatrix} U_{\hat{\lambda}}^{-1} U_{\hat{\lambda}}^0 U_{\hat{\lambda}}^{-1} e & U_{\hat{\lambda}}^{-1} U_{\hat{\lambda}}^1 U_{\hat{\lambda}}^{-1} e & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ — матрица размера $N \times 5$,
 и элементы v_{ij} матрицы $V(\hat{\lambda})$ могут быть описаны формулой

$$v_{ij} = \sum_{k=1}^N \omega_{ik}^j e_k,$$

где ω_{ik}^j — элементы матрицы $U_{\hat{\lambda}}^{-1} \frac{\partial U_{\hat{\lambda}}}{\partial \hat{\lambda}_j} U_{\hat{\lambda}}^{-1}$.

Оценим норму матрицы $V_{\hat{\lambda}}$:

$$\begin{aligned} \|V_{\hat{\lambda}}\| &= \max_i \sum_{j=0}^4 v_{ij} = \max_i \left(\left| \sum_{k=1}^N \omega_{ik}^0 e_k \right| + \left| \sum_{k=1}^N \omega_{ik}^1 e_k \right| \right) \leq \\ &\leq \max_i \left(\sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^0 e_k| + \sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^1 e_k| \right) \leq \|e\| \max_i \left(\sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^0| + \sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^1| \right), \end{aligned}$$

где $\|e\| = \max_k |e_k|$, $k \equiv 1, 2, \dots, N$; $i \equiv 1, 2, \dots, N$.

В соответствии с (9) получаем

$$\begin{aligned} \|W(\xi)\| &= \|(F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top\| \cdot \|V(\hat{\lambda})\| \leq \\ &\leq \|(F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top\| \|e\| \max_i \left(\sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^0| + \sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^1| \right). \end{aligned}$$

Следовательно, с учётом (4) имеем оценку

$$\begin{aligned} \max_{\hat{\lambda} \in G} \|W(\xi)\| &= \max_{\hat{\lambda} \in G} \left[\left\| (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top \cdot \|V(\hat{\lambda})\| \right\| \right] \leq \\ &\leq \max_{\hat{\lambda} \in G} \left[\left\| (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top \right\| \|e\| \max_i \left(\sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^0| + \sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^1| \right) \right] < 1. \end{aligned}$$

Тогда, усиливая неравенство (7), получим

$$\|q(\hat{\lambda}^{(1)}) - q(\hat{\lambda}^{(2)})\| \leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(2)}\|, \quad (10)$$

где $0 \leq \alpha < 1$. Следовательно, отображение (3) является сжимающим в области G .

Покажем, что при выполнении условия (10) итерационный процесс (5) сходится. Для этого используем обобщённый критерий Коши:

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &= \|q(\hat{\lambda}^{(k)}) - q(\hat{\lambda}^{(k-1)})\| \leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\| \leq \\ &\leq \alpha^2 \|\hat{\lambda}^{(k-1)} - \hat{\lambda}^{(k-2)}\| \leq \dots \leq \alpha^k \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\|. \end{aligned} \quad (11)$$

Рассмотрим норму

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &= \|(\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}) + (\hat{\lambda}^{(k+2)} - \hat{\lambda}^{(k+1)}) + \dots + (\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k+p-1)})\| \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \|\hat{\lambda}^{(k+i+1)} - \hat{\lambda}^{(k+i)}\|. \end{aligned} \quad (12)$$

Отсюда с учётом (11) получаем

$$\|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq \frac{\alpha^k (1 - \alpha^p)}{1 - \alpha} \|\hat{\lambda}^{(1)} - \hat{\lambda}^{(0)}\|. \quad (13)$$

Так как $0 \leq \alpha < 1$, то $\lim_{i \rightarrow \infty} \alpha^i = 0$ и из (13) следует, что $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon)$: $\forall k > N(\varepsilon)$ и $\forall p > 0 \Rightarrow \|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| < \varepsilon$, т. е. для последовательности $\{\hat{\lambda}^{(k)}\}_{k=0}^\infty$ выполнен критерий Коши. Поэтому существует $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k)} = \bar{\lambda}$, причём $\bar{\lambda} \in G$ в силу замкнутости области G .

Перейдем к пределу в равенстве (5): $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} q(\hat{\lambda}^{(k-1)})$. Учитывая непрерывность функции $q(\hat{\lambda})$ в области G , получим $\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k)} = q(\lim_{k \rightarrow \infty} \hat{\lambda}^{(k-1)})$ или

$$\bar{\lambda} = q(\bar{\lambda}). \quad (14)$$

т. е. $\bar{\lambda}$ — решение уравнения (3).

Покажем, что это решение единственное в области G . Пусть $\exists \bar{\bar{\lambda}} \neq \bar{\lambda}$, причём

$$\bar{\bar{\lambda}} = q(\bar{\bar{\lambda}}). \quad (15)$$

Вычтем из (14) равенство (15):

$$\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}} = q(\bar{\lambda}) - q(\bar{\bar{\lambda}}).$$

С учётом (10) имеем $\|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| = \|q(\bar{\lambda}) - q(\bar{\bar{\lambda}})\| \leq \alpha \|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\|$ или $(1 - \alpha) \|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| \leq 0$. Так как $0 \leq \alpha < 1$, то $0 < 1 - \alpha \leq 1$, а следовательно, $\|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| \leq 0$. Однако это возможно только в случае, если $\|\bar{\lambda} - \bar{\bar{\lambda}}\| = 0$, т.е. $\bar{\lambda} = \bar{\bar{\lambda}}$.

Поскольку в соответствии с (11)

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+2)} - \hat{\lambda}^{(k+1)}\| &\leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\|, \\ \|\hat{\lambda}^{(k+3)} - \hat{\lambda}^{(k+2)}\| &\leq \alpha \|\hat{\lambda}^{(k+2)} - \hat{\lambda}^{(k+1)}\| \leq \alpha^2 \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\|, \\ &\dots \\ \|\hat{\lambda}^{(k+i)} - \hat{\lambda}^{(k+i-1)}\| &\leq \alpha^i \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\|, \quad i \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

то из формулы (12) получаем

$$\begin{aligned} \|\hat{\lambda}^{(k+p)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \|\hat{\lambda}^{(k+i+1)} - \hat{\lambda}^{(k+i)}\| \leq \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \sum_{i=0}^{p-1} \alpha^i \leq \\ &\leq \frac{1 - \alpha^p}{1 - \alpha} \|\hat{\lambda}^{(k+1)} - \hat{\lambda}^{(k)}\| \leq \frac{\alpha(1 - \alpha^p)}{1 - \alpha} \|\hat{\lambda}^{(k)} - \hat{\lambda}^{(k-1)}\|. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $p \rightarrow \infty$, получаем (6), что и требовалось доказать. $\square$

Следствие. Вектор остатков e в формуле (4) может быть представлен в следующем виде:

$$e = HP_\lambda \varepsilon,$$

где

$$H = F(F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} - E. \quad (16)$$

Доказательство. Из обобщенной регрессионной модели в виде (1) сразу можно получить

$$\begin{aligned} e = F\hat{\lambda} - b &= F\hat{\lambda} - F\lambda - P_\lambda \varepsilon = F((F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} b - \lambda) - P_\lambda \varepsilon = \\ &= F((F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} (F\lambda + P_\lambda \varepsilon) - \lambda) - P_\lambda \varepsilon = \\ &= F(\lambda + (F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} P_\lambda \varepsilon - \lambda) - P_\lambda \varepsilon = \\ &= (F(F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} - E) P_\lambda \varepsilon = HP_\lambda \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Используя (4), можно сформулировать ограничение на величину случайной помехи в результатах наблюдений, позволяющее обеспечить достаточное условие сходимости итерационной процедуры (5):

$$\|\varepsilon\| = \left(\|(F^\top U_{\hat{\lambda}}^{-1} F)^{-1} F^\top\| \cdot \|HP_\lambda\| \max_i \left(\sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^0| + \sum_{k=1}^N |\omega_{ik}^1| \right) \right)^{-1},$$

где матрица H находится по формуле (16), $i \equiv 1, 2, \dots, N$.

Таким образом, рассмотрены достаточные условия сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели колебаний систем с турбулентным трением.

Работа выполнена при поддержке Федерального агентства по образованию (код проекта РНП 2.1.1/745) и РФФИ (код проекта 10-01-00644-а).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Зотеев В. Е. Итерационный метод среднеквадратичного оценивания коэффициентов стохастического разностного уравнения колебаний систем с турбулентным трением // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2005. — № 38. — С. 100–109.
2. Зотеев В. Е. О сходимости итерационной процедуры среднеквадратичного оценивания коэффициентов линейно-параметрической дискретной модели // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки*, 2009. — № 1(18). — С. 133–141.

Поступила в редакцию 10/II/2010;
в окончательном варианте — 15/III/2010.

MSC: 65P40, 34C15, 37M05

ON CONVERGENCE OF ITERATION PROCEDURE FOR ROOT-MEAN-SQUARE ESTIMATION OF COEFFICIENTS OF LINEAR PARAMETRIC DISCRETE MODELS DESCRIBING OSCILLATIONS OF SYSTEMS WITH TURBULENT FRICTION

A. A. Egorova, V. E. Zoteev

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100.

E-mail: aleksandrairanova@yandex.ru

Sufficient conditions for convergence of the iteration procedure for mean-square estimation of coefficients of linear parametric discrete models describing in the form of stochastic difference equations the observational data of oscillations of systems with turbulent friction are studied. Application of iterative procedure gives a chance to improve accuracy of calculation of dynamic characteristics of systems with turbulent friction fundamentally with the help of elimination biases of mean-square estimations of difference equation coefficients.

Key words: *turbulent friction, extended regression model, mean-square estimation, iterative procedure convergence.*

Original article submitted 10/II/2010;
revision submitted 15/III/2010.

Alexandra A. Egorova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science. *Vladimir E. Zoteev* (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.