Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Бейлина, О существовании решения одной нелокальной задачи для уравнения Лапласа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 1(), 205–208

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu791>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 08:00:57

Краткие сообщения

Дифференциальные уравнения

УДК 517.95

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА

Н. В. Бейлина

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: natalie@samdiff.ru

Изучается вопрос о разрешимости одной нелокальной задачи с интегральными условиями для уравнения Лапласа в прямоугольной области. Получены условия существования решения.

Ключевые слова: нелокальная задача, интегральные условия, разрешимость.

Введение. За последние несколько десятилетий в математической литературе появился ряд работ, посвященных исследованию нелокальных задач для дифференциальных уравнений. Одной из первых среди них была статья А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [1], в которой были предложены новые постановки задач для эллиптических уравнений и которая стала отправной точкой большинства исследований в этом направлении.

Среди нелокальных задач большой интерес представляют задачи с интегральными условиями, которые являются обобщением нелокальных условий, заданных в виде линейной комбинации. Разрешимость нелокальных задач с нелокальными, в том числе интегральными, условиями и качественные свойства решений для эллиптических уравнений рассмотрены в работах А. Л. Скубачевского [2], А. К. Гуцина и В. П. Михайлова [3, 4] и ряда других авторов.

В предлагаемой работе рассматривается нелокальная задача с интегральными условиями для уравнения Лапласа второго порядка в прямоугольной области.

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $D = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = f(x, y) \quad (1)$$

и поставим для него задачу со следующими условиями:

$$u(x, b) = r(x), \quad u(a, y) = s(y), \quad (2)$$

$$u(0, y) = \alpha \int_0^a N(x, y)u(x, y)dx, \quad u(x, 0) = \beta \int_0^b M(x, y)u(x, y)dy. \quad (3)$$

Здесь $r(x)$, $s(y)$, $M(x, y)$, $N(x, y)$ и $f(x, y)$ — заданные в $\overline{D}$ функции, α , β — числа.

Наталья Викторовна Бейлина (к.ф.-м.н.), старший преподаватель, каф. высшей математики и прикладной информатики.

2. Разрешимость поставленной задачи. Сформулируем и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА. Если $f(x, y) \in C(\overline{D})$, $M(x, y) \in C(\overline{D})$, $N(x, y) \in C(\overline{D})$, $N_x(x, y) \in C(\overline{D})$, $M_x(x, y) \in C(\overline{D})$,

$$ab(\alpha^2 N_1^2 + \beta^2 M_1^2) + \frac{2}{3}(\alpha^2 N_1^2 a^2 + \beta^2 M_1^2 b^2) < 1,$$

где $\max_D |N(x, y)| \leq N_1$, $\max_D |M(x, y)| \leq M_1$, и выполняются условия согласования $M(0, y) = N(x, 0)$, $r(a) = s(b)$, то существует решение $u(x, y) \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ задачи (1)–(3).

Доказательство. Будем искать решение задачи (1)–(3) в виде суммы $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$, где $v(x, y)$ — решение задачи (A):

$$\begin{aligned} v_{xx}(x, y) + v_{yy}(x, y) &= 0; \\ v(x, b) &= r(x), \quad v(a, y) = s(y); \\ v(0, y) &= \alpha \int_0^a N(x, y) v(x, y) dx, \quad v(x, 0) = \beta \int_0^b M(x, y) v(x, y) dy, \end{aligned}$$

а $w(x, y)$ — решение задачи (B):

$$\begin{aligned} w_{xx}(x, y) + w_{yy}(x, y) &= f(x, y); \\ w(x, b) &= 0, \quad w(a, y) = 0; \quad w(0, y) = 0, \quad w(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Для нахождения решения задачи (A) и функции $v(x, y)$ рассмотрим вспомогательные задачи, считая временно известными функции $p(x)$ и $q(y)$:

ЗАДАЧА I. $\Delta v_1(x, y) = 0$; $v_1(x, 0) = p(x)$, $v_1(x, b) = 0$; $v_1(0, y) = 0$, $v_1(a, y) = 0$;

ЗАДАЧА II. $\Delta v_2(x, y) = 0$; $v_2(x, 0) = 0$, $v_2(x, b) = r(x)$; $v_2(0, y) = 0$, $v_2(a, y) = 0$;

ЗАДАЧА III. $\Delta v_3(x, y) = 0$; $v_3(x, 0) = 0$, $v_3(x, b) = 0$; $v_3(0, y) = q(y)$, $v_3(a, y) = 0$;

ЗАДАЧА IV. $\Delta v_4(x, y) = 0$; $v_4(x, 0) = 0$, $v_4(x, b) = 0$; $v_4(0, y) = 0$, $v_4(a, y) = s(y)$.

Тогда $v(x, y) = v_1(x, y) + v_2(x, y) + v_3(x, y) + v_4(x, y)$. Решая задачи (I)–(IV) методом Фурье, находим, что

$$\begin{aligned} v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a}} \left[p_n \operatorname{sh} \frac{\pi n(b-y)}{a} + r_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{a} \right] \sin \frac{\pi n x}{a} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \left[q_n \operatorname{sh} \frac{\pi n(a-x)}{b} + s_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b} \right] \sin \frac{\pi n y}{b}, \quad (4) \end{aligned}$$

где p_n , r_n , q_n , s_n — коэффициенты разложения соответствующих функций в ряд Фурье по системе синусов.

Для отыскания функций $p(x)$ и $q(y)$ применим к (4) нелокальные условия (3), получим

$$\begin{aligned} q(y) = \alpha \int_0^a N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a}} \left[p_n \operatorname{sh} \frac{\pi n(b-y)}{a} + r_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{a} \right] \sin \frac{\pi n x}{a} dx + \\ + \alpha \int_0^a N(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \left[q_n \operatorname{sh} \frac{\pi n(a-x)}{b} + s_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b} \right] \sin \frac{\pi n y}{b} dx, \quad (5) \end{aligned}$$

$$p(x) = \beta \int_0^b M(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a}} \left[p_n \operatorname{sh} \frac{\pi n(b-y)}{a} + r_n \operatorname{sh} \frac{\pi n y}{a} \right] \sin \frac{\pi n x}{a} dy +$$

$$+ \beta \int_0^b M(x, y) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \left[q_n \operatorname{sh} \frac{\pi n(a-x)}{b} + s_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b} \right] \sin \frac{\pi n y}{b} dy. \quad (6)$$

Ряды, стоящие в правой части (5) и (6), сходятся равномерно в прямоугольнике D по признаку Абеля. Меняя порядок суммирования и интегрирования, имеем

$$q(y) - \int_0^a K_1(y, \xi) p(\xi) d\xi - \int_0^b K_2(x, \xi) q(\xi) d\xi = f(y), \quad (7)$$

$$p(x) - \int_0^a K_3(y, \xi) p(\xi) d\xi - \int_0^b K_4(x, \xi) q(\xi) d\xi = g(x), \quad (8)$$

где

$$K_1(y, \xi) = \frac{2\alpha}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \frac{N(x, y)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a}} \operatorname{sh} \frac{\pi n(b-y)}{a} \sin \frac{\pi n x}{a} dx \sin \frac{\pi n \xi}{a},$$

$$K_2(y, \xi) = \frac{2\alpha}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^a \frac{N(x, y)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \operatorname{sh} \frac{\pi n(a-x)}{b} \sin \frac{\pi n y}{a} dx \sin \frac{\pi n \xi}{b},$$

$$K_3(x, \xi) = \frac{2\beta}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b \frac{M(x, y)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n b}{a}} \operatorname{sh} \frac{\pi n(b-y)}{a} \sin \frac{\pi n x}{a} dy \sin \frac{\pi n \xi}{a},$$

$$K_4(x, \xi) = \frac{2\beta}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^b \frac{M(x, y)}{\operatorname{sh} \frac{\pi n a}{b}} \operatorname{sh} \frac{\pi n(a-x)}{b} \sin \frac{\pi n y}{a} dy \sin \frac{\pi n \xi}{b}.$$

Возьмём $c = \max\{a, b\}$ и продолжим ядра K_i нулем до квадрата $(0, c) \times (0, c)$. Тогда система (7)–(8) примет вид

$$q(\eta) - \int_0^c K_1(\eta, \xi) p(\xi) d\xi - \int_0^c K_2(\eta, \xi) q(\xi) d\xi = f(\eta), \quad (9)$$

$$p(\eta) - \int_0^c K_3(\eta, \xi) p(\xi) d\xi - \int_0^c K_4(\eta, \xi) q(\xi) d\xi = g(\eta). \quad (10)$$

Выясним, при каких условиях на $a, b, \alpha, \beta, N(x, y)$ и $M(x, y)$ система интегральных уравнений (9), (10) разрешима.

Для ядер K_i справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|K_1(\eta, \xi)\|_{L_2(D)}^2 &\leq ab\alpha^2 N_1^2, & \|K_2(\eta, \xi)\|_{L_2(D)}^2 &\leq \frac{2}{3}a^2\alpha^2 N_1^2, \\ \|K_3(\eta, \xi)\|_{L_2(D)}^2 &\leq ab\beta^2 M_1^2, & \|K_4(\eta, \xi)\|_{L_2(D)}^2 &\leq \frac{2}{3}b^2\beta^2 M_1^2. \end{aligned}$$

Следовательно, если выполняется условие

$$ab\alpha^2 N_1^2 + \frac{2}{3}a^2\alpha^2 N_1^2 + ab\beta^2 M_1^2 + \frac{2}{3}b^2\beta^2 M_1^2 < 1,$$

то система интегральных уравнений (9), (10) однозначно разрешима.

Таким образом, классическое решение задачи (A) имеет вид (4), где $p(x)$ и $q(y)$ — решение системы интегральных уравнений (9), (10).

Решение задачи (B) находится стандартным способом:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{\pi n}{a} x,$$

где $Y_n(y)$ — решение задачи

$$Y_n''(y) - \frac{\pi n}{a} Y_n(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin \frac{\pi n}{a} x dx; \quad Y_n(0) = Y_n(b) = 0.$$

Итак, построено классическое решение задачи (1)–(3). $\square$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (госконтракт № П2589 от 26.11.2009).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях эллиптических задач // *ДАН СССР*, 1969. — Т. 185, № 4. — С. 739–740; англ. пер.: Bitsadze A. V., Samarskii A. A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems // *Sov. Math., Dokl.*, 1969. — Vol. 10. — P. 398–400.
2. Скубачевский А. Л. Нелокальные эллиптические задачи с параметром // *Матем. сб.*, 1983. — Т. 121(163), № 2(6). — С. 201–210; англ. пер.: Skubachevskii A. L. Nonlocal Elliptic Problems with a Parameter // *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1984. — Vol. 49, No. 1. — P. 197–206.
3. Гушчин А. К., Михайлов В. П. О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка // *Матем. сб.*, 1994. — Т. 185, № 1. — С. 121–160; англ. пер.: Gushchin A. K., Mikhailov V. P. On Solvability of Nonlocal Problems for a Second-Order Elliptic Equation // *Russian Academy of Sciences. Sbornik. Mathematics*, 1995. — Vol. 81, No. 1. — P. 101–136.
4. Гушчин А. К. Условие компактности одного класса операторов и его применение к исследованию разрешимости нелокальных задач для эллиптических уравнений // *Матем. сб.*, 2002. — Vol. 193, No. 5. — P. 17–36; англ. пер.: Gushchin A. K. A condition for the compactness of operators in a certain class and its application to the analysis of the solubility of non-local problems for elliptic equations // *Sbornik: Mathematics*, 2002. — Vol. 193, No. 5. — P. 649–668.

Поступила в редакцию 15/I/2010;
в окончательном варианте — 15/III/2010.

MSC: 35J65

ON SOLVABILITY OF A CERTAIN NONLOCAL PROBLEM FOR A LAPLACE EQUATION

N. V. Beylina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya str., Samara, 443100
E-mail: natalie@samdiff.ru

In this article, we prove the solvability of a nonlocal problem with integral conditions for the Laplace equation in a rectangular domain.

Key words: nonlocal problem, integral condition, solvability.

Original article submitted 15/I/2010;
revision submitted 15/III/2010.

Natalya V. Beylina (Ph. D. (Phys. & Math.)), Lecturer, Dept. of Higher Mathematics & Applied Informatics.