Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Х. Расулов, О существенном спектре одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 3(), 42–51

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu796>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:34:44

Функциональный анализ

УДК 517.984

О СУЩЕСТВЕННОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, АССОЦИИРОВАННОГО С СИСТЕМОЙ ТРЁХ ЧАСТИЦ НА РЕШЁТКЕ

Т. Х. Расулов^{1,2}

¹ Бухарский государственный университет,
физико-математический факультет,
Узбекистан, 200100, Бухара, ул. Мухаммад Икбол, 11.

² Университет Берна, научно-философский факультет,
Швейцария, CH-3012, Берн.

E-mail: rth@mail.ru

Рассматривается модельный оператор H , ассоциированный с системой трёх одинаковых частиц на трёхмерной решётке $\mathbb{Z}^3$. Описано местоположение существенного спектра оператора H через спектр соответствующей модели Фридрихса, т. е. выделены двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра оператора H . Доказано, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем трёх отрезков. Показано появление двухчастичных ветвей по обе стороны трёхчастичной ветви существенного спектра H . Кроме того, получен аналог уравнения Фаддеева, а также его симметризованный вариант, для собственных функций оператора H .

Ключевые слова: модельный оператор, модель Фридрихса, класс Гильберта—Шмидта, уравнения Фаддеева, существенный спектр.

Введение. Существенный спектр многочастичных операторов в евклидовом пространстве достаточно хорошо изучен во многих работах, см. например [1–3]. Системы трёх частиц на решётке были рассмотрены в работах [4–7] и исследован их существенный спектр. В частности, в работе [5] доказано, что существенный спектр трёхчастичного оператора Шрёдингера на решётке состоит из объединения не более чем конечного числа отрезков, даже в том случае, когда соответствующий двухчастичный оператор Шрёдингера на решётке имеет бесконечное число собственных значений.

В настоящей работе рассматривается модельный оператор H , ассоциированный с системой трёх одинаковых частиц на решётке. Выделены двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра оператора H . Доказано, что существенный спектр этого оператора состоит из объединения не более чем трёх отрезков. Отметим, что появление двухчастичных ветвей по обе стороны трёхчастичной ветви существенного спектра H , играет важную роль при изучении конечности или бесконечности частей дискретного спектра, расположенных там, а также на лакунах существенного спектра.

Расулов Тулкин Хусенович (к.ф.-м.н., доц.), доцент, каф. алгебры и анализа¹; докторант, математический институт².

Следует отметить, что двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра трёхчастичного непрерывного оператора Шрёдингера [1–3] представляют собой полубесконечные прямые и пересекаются. В данном случае, в отличие от непрерывного случая, двухчастичная и трёхчастичная ветви существенного спектра модельного оператора H заполняют отрезки конечной длины и они могут не пересекаться, т. е. возникает лакуна. Поэтому в решётчатом случае необходимо изучать ветви существенного спектра по обе стороны трёхчастичной ветви, от которого зависит существование двустороннего эффекта Ефимова. В работах [4–8] доказано, что решётчатые операторы не имеют частей существенного и дискретного спектра правее трёхчастичной ветви. В этих работах изучение расположения существенного спектра основано на монотонности определителя Фредгольма модели Фридрихса. В данном случае, в отличие от предыдущих работ, определитель Фредгольма не монотонен, метод исследования основан на числе собственных значений модели Фридрихса.

1. Модельный оператор. Пусть $\mathcal{T}^3 = (-\pi; \pi]^3$ — трёхмерный куб с соответствующим отождествлением противоположных граней, $L_2(\mathcal{T}^3)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определённых на $\mathcal{T}^3$, и $L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых, симметричных (комплекснозначных) функций, определённых на $(\mathcal{T}^3)^2$.

Рассмотрим модельный оператор H , действующий в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)$ по формуле

$$H = H_0 - K_1 - K_2,$$

где операторы H_0 и K_i , $i = 1, 2$ определяются по формулам:

$$(H_0 f)(p, q) = w(p, q)f(p, q),$$

$$(K_1 f)(p, q) = \int K(q, s)f(p, s)ds, \quad (K_2 f)(p, q) = \int K(p, s)f(s, q)ds.$$

Здесь

$$K(p, q) = \varphi_1(p)\varphi_1(q) - \varphi_2(p)\varphi_2(q),$$

$\varphi_i(\cdot)$ ($i = 1, 2$) — вещественнозначная непрерывная функция на $\mathcal{T}^3$ и $w(\cdot, \cdot)$ — вещественнозначная симметричная непрерывная функция на $(\mathcal{T}^3)^2$. Здесь и в дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всей области изменения переменных интегрирования.

В этих предположениях оператор H является ограниченным и самосопряжённым в гильбертовом пространстве $L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)$.

2. Некоторые спектральные свойства модели Фридрихса. В этом пункте рассматривается модель Фридрихса $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$, действующая в $L_2(\mathcal{T}^3)$ как

$$h(p) = h_0(p) - k, \tag{1}$$

где операторы $h_0(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ и k определяются по правилам

$$(h_0(p)f)(q) = w(p, q)f(q), \quad (kf)(q) = \int K(q, s)f(s)ds$$

и изучаются два свойства этого оператора, которые понадобятся при доказательстве основного результата работы.

Обозначим через $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{\text{ess}}(\cdot)$ и $\sigma_{\text{disc}}(\cdot)$ соответственно спектр, существенный спектр и дискретный спектр ограниченного самосопряжённого оператора.

Оператор возмущения k оператора $h_0(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ является самосопряжённым двумерным оператором. Следовательно, из известной теоремы Г. Вейля [1] о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга вытекает, что существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(h(p))$ оператора $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ совпадает с существенным спектром оператора $h_0(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$. Известно, что $\sigma_{\text{ess}}(h_0(p)) = [m(p); M(p)]$, где числа $m(p)$ и $M(p)$ определяются по равенствам

$$m(p) = \min_{q \in \mathcal{T}^3} w(p, q), \quad M(p) = \max_{q \in \mathcal{T}^3} w(p, q).$$

Из последних двух фактов следует, что $\sigma_{\text{ess}}(h(p)) = [m(p); M(p)]$.

При каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^3$ определим функцию

$$\Delta(p; z) = \left(1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(p, s) - z}\right) \left(1 + \int \frac{\varphi_2^2(s) ds}{w(p, s) - z}\right) + \left(\int \frac{\varphi_1(s) \varphi_2(s) ds}{w(p, s) - z}\right)^2$$

(детерминант Фредгольма, ассоциированный с оператором $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$), регулярную в $\mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)]$.

Установим связь между собственными значениями оператора $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ и нулями функции $\Delta(p; \cdot)$. Верна следующая

ЛЕММА 2.1. *При каждом фиксированном $p \in \mathcal{T}^3$ число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ является собственным значением оператора $h(p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta(p; z) = 0$.*

Доказательство. Пусть число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ — собственное значение оператора $h(p)$, $p \in \mathcal{T}^3$ и пусть $f \in L_2(\mathcal{T}^3)$ — соответствующая собственная функция, т. е., уравнение

$$w(p, q) f(q) - \int [\varphi_1(q) \varphi_1(s) - \varphi_2(q) \varphi_2(s)] f(s) ds = z f(q) \quad (2)$$

имеет ненулевое решение $f \in L_2(\mathcal{T}^3)$.

Заметим, что для любых $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(h(p))$ и $q \in \mathcal{T}^3$ имеет место соотношение $w(p, q) - z \neq 0$, $p \in \mathcal{T}^3$. Тогда из уравнения (2) для f имеем

$$f(q) = \frac{\varphi_1(q) C_1 - \varphi_2(q) C_2}{w(p, q) - z}, \quad (3)$$

где

$$C_i = \int \varphi_i(s) f(s) ds. \quad (4)$$

Подставляя выражение (3) для f в равенство (4), получим, что уравнение (2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$\left(1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(p, s) - z}\right) C_1 + \int \frac{\varphi_1(s) \varphi_2(s) ds}{w(p, s) - z} C_2 = 0,$$

$$-\int \frac{\varphi_1(s)\varphi_2(s)ds}{w(p,s)-z} C_1 + \left(1 + \int \frac{\varphi_2^2(s)ds}{w(p,s)-z}\right) C_2 = 0$$

имеет ненулевое решение $(C_1, C_2) \in \mathbb{C}^2$, т. е. когда $\Delta(p; z) = 0$. $\square$

Из леммы 2.1 вытекает, что

$$\sigma(h(p)) = \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [m(p); M(p)], \quad (5)$$

где

$$\sigma_{\text{disc}}(h(p)) = \{z \in \mathbb{C} \setminus [m(p); M(p)] : \Delta(p; z) = 0\}, \quad p \in \mathcal{T}^3.$$

Для любого ограниченного самосопряжённого оператора A , действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, обозначим через $\mathcal{H}_A(z)$ такое подпространство, что $(Af, f) < \lambda \|f\|^2$ для любого $f \in \mathcal{H}_A(z)$, и положим

$$N(\lambda, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(z)} \dim \mathcal{H}_A(z).$$

Число $N(\lambda, A)$ равно бесконечности, если $\lambda > \min \sigma_{\text{ess}}(A)$, и если число $N(\lambda, A)$ конечно, то оно равно числу собственных значений оператора A (с учётом кратности), меньших чем λ .

ЛЕММА 2.2. *Для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более чем по одному простому собственному значению, лежащему левее $m(p)$ и правее $M(p)$.*

Доказательство. Сперва вводим оператор k_i , $i = 1, 2$, действующий в $L_2(\mathcal{T}^3)$ как

$$(k_i f)(q) = \varphi_i(q) \int \varphi_i(s) f(s) ds, \quad i = 1, 2.$$

Тогда оператор k можно записать в виде $k = k_1 - k_2$. Положим $h_1(p) = h_0(p) - k_1$. Так как оператор k_i ($i = 1, 2$) неотрицательный, легко можно показать, что $h(p) \geq h_1(p)$ и, следовательно, $\mathcal{H}_{h(p)}(z) \subset \mathcal{H}_{h_1(p)}(z)$, $z \leq m(p)$. Это означает, что

$$N(z, h(p)) \leq N(z, h_1(p)), \quad z \leq m(p). \quad (6)$$

Так как определитель Фредгольма

$$\Delta_1(p; z) = 1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(p, s) - z}$$

оператора $h_1(p)$ монотонно убывает на полуоси $(-\infty, m(p))$, имеем, что

$$N(m(p), h_1(p)) \leq 1,$$

следовательно, в силу неравенства (6) верно $N(m(p), h(p)) \leq 1$. По обозначению это означает, что для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более чем одно простое собственное значение, лежащее левее $m(p)$.

Аналогично можно показать, что $n(-M(p), -h(p)) \leq 1$. $\square$

3. Аналог уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H .

В этом пункте получен аналог уравнения Фаддеева для собственных функций

оператора H , который играет важную роль при исследовании спектра этого оператора. Часть построений и рассуждений в п. 3 и 4 аналогичны тем, что содержатся в работе [9], и в этом случае мы ограничились соответствующей ссылкой.

Положим

$$m = \min_{p,q \in \mathcal{T}^3} w(p,q), \quad M = \max_{p,q \in \mathcal{T}^3} w(p,q),$$

$$\sigma_{\text{two}}(H) = \bigcup_{p \in \mathcal{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)), \quad \sigma_{\text{three}}(H) = [m; M].$$

Пусть $L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)$ — гильбертово пространство двухкомпонентных вектор-функций $f = (f_1, f_2)$, $f_\alpha \in L_2(\mathcal{T}^3)$, $\alpha = 1, 2$. При каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ операторные матрицы $A(z)$ и $K(z)$ действуют в пространстве $L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)$ по формуле

$$A(z) = \begin{pmatrix} A_{11}(z) & A_{12}(z) \\ A_{21}(z) & A_{22}(z) \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad K(z) = \begin{pmatrix} K_{11}(z) & K_{12}(z) \\ K_{21}(z) & K_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}(z) : L_2(\mathcal{T}^3) \rightarrow L_2(\mathcal{T}^3)$, $i, j = 1, 2$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ — оператор умножения на функцию $a_{ij}(p; z)$:

$$a_{11}(p; z) = 1 - \int \frac{\varphi_1^2(s) ds}{w(p, s) - z}, \quad a_{22}(p; z) = 1 + \int \frac{\varphi_2^2(s) ds}{w(p, s) - z},$$

$$a_{12}(p; z) = -a_{21}(p; z) = \int \frac{\varphi_1(s) \varphi_2(s) ds}{w(p, s) - z},$$

а операторы $K_{ij}(z) : L_2(\mathcal{T}^3) \rightarrow L_2(\mathcal{T}^3)$, $i, j = 1, 2$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ — интегральные операторы с ядрами $K_{ij}(p, s; z)$:

$$K_{11}(p, s; z) = \frac{\varphi_1(p) \varphi_1(s)}{w(p, s) - z}, \quad K_{12}(p, s; z) = -\frac{\varphi_1(s) \varphi_2(p)}{w(p, s) - z},$$

$$K_{21}(p, s; z) \equiv -K_{12}(s, p; z) \quad K_{22}(p, s; z) = -\frac{\varphi_2(p) \varphi_2(s)}{w(p, s) - z}.$$

Заметим, что при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ операторы $K_{ij}(z)$ ($i, j = 1, 2$) принадлежат классу Гильберта—Шмидта, следовательно, $K(z)$ является компактным оператором.

ЛЕММА 3.1. *При каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ является ограниченным, обратимым; обратный оператор $A^{-1}(z)$ определён по формуле*

$$A^{-1}(z) = \begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{pmatrix},$$

где $B_{ij}(z) : L_2(\mathcal{T}^3) \rightarrow L_2(\mathcal{T}^3)$, $i, j = 1, 2$, $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ — оператор умножения на функцию $b_{ij}(p; z)$:

$$b_{11}(p; z) = \frac{a_{22}(p; z)}{\Delta(p; z)}, \quad b_{12}(p; z) = -\frac{a_{12}(p; z)}{\Delta(p; z)},$$

$$b_{21}(p; z) = -\frac{a_{21}(p; z)}{\Delta(p; z)}, \quad b_{22}(p; z) = \frac{a_{11}(p; z)}{\Delta(p; z)}.$$

Лемма 3.1 доказывается аналогично соответствующей лемме из работы [9].

Так как при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ обратим, то для таких z мы определим оператор вида $T(z) = A^{-1}(z)K(z)$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $T(z)$.

ЛЕММА 3.2. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $T(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.*

Доказательство. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ — собственное значение оператора H и $f \in L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)$ — соответствующая собственная функция, т. е. уравнение $Hf = zf$ или уравнение

$$(w(p, q) - z)f(p, q) - \int [\varphi_1(q)\varphi_1(s) - \varphi_2(q)\varphi_2(s)]f(p, s)ds - \\ - \int [\varphi_1(p)\varphi_1(s) - \varphi_2(p)\varphi_2(s)]f(s, q)ds = 0 \quad (7)$$

имеет нетривиальное решение $f \in L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)$.

Так как $z \notin \sigma_{\text{three}}(H)$, из уравнения (7) для f имеем:

$$f(p, q) = \frac{\varphi_1(q)g_1(p) - \varphi_2(q)g_2(p) + \varphi_1(p)g_1(q) - \varphi_2(p)g_2(q)}{w(p, q) - z}, \quad (8)$$

где

$$g_i(p) = \int \varphi_i(s)f(p, s)ds, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Подставляя выражение (8) для f в равенство (9), получим, что система уравнений

$$a_{11}(p; z)g_1(p) + a_{12}(p; z)g_2(p) = \varphi_1(p) \int \frac{\varphi_1(s)g_1(s)}{w(p, s) - z}ds - \varphi_2(p) \int \frac{\varphi_1(s)g_2(s)}{w(p, s) - z}ds;$$

$$a_{21}(p; z)g_1(p) + a_{22}(p; z)g_2(p) = \varphi_1(p) \int \frac{\varphi_2(s)g_1(s)}{w(p, s) - z}ds - \varphi_2(p) \int \frac{\varphi_2(s)g_2(s)}{w(p, s) - z}ds$$

или уравнение

$$A(z)g = K(z)g, \quad g = (g_1, g_2) \in L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3) \quad (10)$$

имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (10) имеет нетривиальное решение и линейные подпространства, порождённые решениями уравнений (7) и (10), имеют одинаковые размерности.

По лемме 3.1 при каждом $z \in \mathbb{C} \setminus (\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ обратим и, следовательно, уравнение $g = A^{-1}(z)K(z)g$, т. е. уравнение $g = T(z)g$, имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда уравнение (10) имеет нетривиальное решение. Здесь также линейные подпространства,

порождённые решениями уравнений (10) и $g = T(z)g$, имеют одинаковые размерности. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Заметим, что уравнение $T(z)g = g$ обычно называется аналогом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H .

Видно, что при каждом $z < \min(\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ оператор $A(z)$ является положительным и, следовательно, существует его положительный квадратный корень $A^{-\frac{1}{2}}(z)$. Для таких z определим оператор $\hat{T}(z) = A^{-\frac{1}{2}}(z)K(z) \times \times A^{-\frac{1}{2}}(z)$, являющийся симметризованным вариантом уравнения Фаддеева для собственных функций оператора H .

Следующая лемма доказывается аналогично лемме 3.2 и устанавливает связь между собственными значениями операторов H и $\hat{T}(z)$.

ЛЕММА 3.3. Число $z < \min(\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H))$ является собственным значением оператора H тогда и только тогда, когда оператор $\hat{T}(z)$ имеет собственное значение, равное единице, и их кратности совпадают.

4. Существенный спектр оператора H . В этом пункте, пользуясь утверждениями п. 2 и 3, а также критерием Вейля и теоремой о спектре разложимых операторов, докажем теорему, которая описывает местоположение существенного спектра оператора H .

ТЕОРЕМА 4.1. Для существенного спектра $\sigma_{\text{ess}}(H)$ оператора H имеет место равенство

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = \bigcup_{p \in \mathcal{T}^3} \sigma_{\text{disc}}(h(p)) \cup [m; M]. \quad (11)$$

Более того, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем трёх отрезков.

Доказательство. Сначала докажем равенство (11). Включение $\sigma_{\text{three}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$ доказывается аналогично доказанному в работе [10].

Докажем, что $\sigma_{\text{two}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H)$ — произвольная точка. Возможны два случая: 1) $z_0 \in \sigma_{\text{three}}(H)$, 2) $z_0 \notin \sigma_{\text{three}}(H)$. Если $z_0 \in \sigma_{\text{three}}(H)$, то, как отмечено выше, $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Пусть $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H) \setminus \sigma_{\text{three}}(H)$ — произвольная точка. Тогда существует точка $p_0 \in \mathcal{T}^3$ такая, что $\Delta(p_0; z_0) = 0$. Отсюда следует, что система однородных линейных уравнений

$$a_{11}(p; z)l_1 + a_{12}(p; z)l_2 = 0, \quad a_{21}(p; z)l_1 + a_{22}(p; z)l_2 = 0 \quad (12)$$

имеет бесконечное число решений в $\mathbb{C}^2$. Легко можно проверить, что существует ненулевое решение $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{C}^2$ системы (12), удовлетворяющее следующему условию: $\Delta(p_0; z_0) = 0$ и функция $l_1\varphi_1(\cdot) - l_2\varphi_2(\cdot)$ отлична от нуля.

Систему уравнений (12) можно записать в виде

$$A(p_0; z_0)l = 0, \quad l = (l_1, l_2) \in \mathbb{C}^2. \quad (13)$$

Пусть

$$V_n(p_0) = \left\{ p \in \mathcal{T}^3 : \frac{1}{n+1} < \|p - p_0\| < \frac{1}{n} \right\}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

$\chi_{V_n(p_0)}(\cdot)$ — характеристическая функция множества $V_n(p_0)$ и $\mu(V_n(p_0))$ — Лебегова мера множества $V_n(p_0)$.

Выбираем ортогональную систему $\{\tilde{f}_n\}$ следующим образом:

$$\tilde{f}_n(p, q) = \frac{\varphi_1(p)\psi_1^{(n)}(q) + \varphi_1(q)\psi_1^{(n)}(p) - \varphi_2(p)\psi_2^{(n)}(q) - \varphi_2(q)\psi_2^{(n)}(p)}{w(p, q) - z_0},$$

где

$$\psi_i^{(n)}(p) = l_i c_n(p) \chi_{V_n(p_0)}(\mu(V_n(p_0)))^{-1/2}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $\{c_n\} \subset L_2(\mathcal{T}^3)$ — ортонормальная система, которая находится из условия ортогональности $\{\tilde{f}_n\}$, т. е.

$$(\tilde{f}_n, \tilde{f}_m) = \frac{2}{\sqrt{\mu(V_n(p_0))}\sqrt{\mu(V_m(p_0))}} \int_{V_n(p_0)} \int_{V_m(p_0)} c_n(p)c_m(q) \times \\ \times \frac{l_1^2 \varphi_1(p)\varphi_1(q) - 2l_1 l_2 \varphi_1(p)\varphi_2(q) + l_2^2 \varphi_2(p)\varphi_2(q)}{(w(p, q) - z_0)^2} dp dq = 0, \quad n \neq m. \quad (14)$$

Существование $c_n(p)$ вытекает из следующего предложения.

ЛЕММА 4.1. *Существует ортонормальная система $\{c_n\} \subset L_2(\mathcal{T}^3)$, удовлетворяющая условиям $\text{supp } c_n \subset V_n(p_0)$ и (14).*

Лемма 4.1 доказывается аналогично соответствующему предложению из работы [9].

Легко можно проверить, что

$$\|\tilde{f}_n\|^2 \geq \frac{M}{\mu(V_n(p_0))}, \quad M = \frac{4\|l_1 \varphi_1 - l_2 \varphi_2\|^2}{\max_{p, q \in \mathcal{T}^3} |w(p, q) - z_0|^2}, \quad (15)$$

при всех $n \in \mathbb{N}$.

Положим $f_n = \tilde{f}_n / \|\tilde{f}_n\|_{L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)}$. Очевидно, что $\{f_n\}$ — ортонормальная система.

Рассмотрим $(H - z_0)f_n$ и оценим его норму:

$$\|(H - z_0)f_n\|_{L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)} \leq \|A(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)} + \|K(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)},$$

где

$$\psi^{(n)} = \left(\frac{\psi_1^{(n)}}{\|f_n\|_{L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)}}, \frac{\psi_2^{(n)}}{\|f_n\|_{L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)}} \right).$$

Из определения $\psi^{(n)}$ и неравенства (15) вытекает, что

$$\|\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)} \leq \frac{1}{\sqrt{M}} \|l\|_{\mathbb{C}^2}^2. \quad (16)$$

Так как для любых $n \neq m$ носители функции $\psi^{(n)}$ не пересекаются, из неравенства (16) следует, что $\{\psi^{(n)}\} \subset L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)$ — ограниченная ортогональная система.

Из компактности оператора $K(z_0)$ вытекает, что

$$\|K(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Далее оценим $\|A(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)}$. Используя неравенство Шварца, получим

$$\|A(z_0)\psi^{(n)}\|_{L_2^{(2)}(\mathcal{T}^3)}^2 \leq C \sup_{p \in V_n(p_0)} \|A(p; z_0)l\|_{\mathbb{C}^2}^2.$$

Из непрерывности функции $A(\cdot; z_0)$ на $\mathcal{T}^3$ и из равенства (13) следует, что

$$\sup_{p \in V_n(p_0)} \|A(p; z_0)l\|_{\mathbb{C}^2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, для ортонормальной последовательности $\{f_n\}$ верно

$$\|(H - z_0)f_n\|_{L_2^s((\mathcal{T}^3)^2)} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty$$

и, следовательно, в силу критерия Вейля справедливо $z_0 \in \sigma_{\text{ess}}(H)$. Из произвольности точки $z_0 \in \sigma_{\text{two}}(H)$ следует, что $\sigma_{\text{two}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$. Итак, мы доказали включение $\sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H) \subset \sigma_{\text{ess}}(H)$.

После того как мы получили компактное уравнение Фаддеева для собственной функции (см. п. 3), обратное включение $\sigma_{\text{ess}}(H) \subset \sigma_{\text{two}}(H) \cup \sigma_{\text{three}}(H)$ следует из общей теории Фредгольма [1] (см. также [6, 7, 9]).

В силу леммы 2.2 для любого $p \in \mathcal{T}^3$ оператор $h(p)$ имеет не более чем одно простое собственное значение, лежащее левее t и правее M . Тогда в силу теоремы о спектре разложимых операторов из равенства (1) вытекает, что множество $\sigma_{\text{two}}(H)$ состоит из объединения не более чем двух отрезков, следовательно, множество $\sigma_{\text{ess}}(H)$ состоит из объединения не более чем трёх отрезков. $\square$

Введём новые подмножества существенного спектра оператора H .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Множества $\sigma_{\text{two}}(H)$ и $\sigma_{\text{three}}(H)$ называются соответственно двухчастичной и трёхчастичной ветвями существенного спектра оператора H .

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Отметим, что множество $\sigma_{\text{two}}(H)$ состоит из объединения не более чем двух отрезков, которые расположены в обеих частях множества $\sigma_{\text{three}}(H)$ (см. доказательство теоремы 4.1).

Работа поддержана Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG), грант № TR368/6-1.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4: Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 430 с. [Reed M., Simon B. Methods of modern mathematical physics. Vol. IV: Analysis of operators. Moscow: Mir, 1982. 430 pp.]
2. Жислин Г. М. Исследование спектра оператора Шрёдингера для системы многих частиц // Труды Моск. матем. об-ва, 1960. Т. 9. С. 81–120. [Zhislin G. M. Discussion of the spectrum of the Schrödinger operator for systems of many particles // Trudy Moskov. Mat. Obshch., 1960. Vol. 9. Pp. 81–120].
3. Hunziker W. On the spectra of Schrödinger multi-particle Hamiltonians // Helv. Phys. Acta, 1966. Vol. 39. Pp. 451–462.

4. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. Schrödinger operators on lattices. The Efimov effect and discrete spectrum asymptotics // *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 2004. Vol. 5, no. 4. Pp. 743–772.
5. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. On the structure of the essential spectrum for the three-particle Schrödinger operators on lattices // *Math. Nachr.*, 2007. Vol. 280, no. 7. Pp. 699–716.
6. Albeverio S., Lakaev S. N., Muminov Z. I. On the number of eigenvalues of a model operator associated to a system of three-particles on lattices // *Russ. J. Math. Phys.*, 2007. Vol. 1, no. 4. Pp. 377–387.
7. Albeverio S., Lakaev S. N., Djumanova R. Kh. The essential and discrete spectrum of a model operator associated to a system of three identical quantum particles // *Rep. Math. Phys.*, 2009. Vol. 63, no. 3. Pp. 359–380.
8. Расулов Т. Х. Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трёх частиц на решётке // *ТМФ*, 2010. Т. 163, № 1. С. 34–44; англ. пер.: *Rasulov T. Kh.* Asymptotics of the discrete spectrum of a model operator associated with a system of three particles on a lattice // *Theoret. and Math. Phys.*, 2010. Vol. 163, no. 1. Pp. 429–437.
9. Расулов Т. Х. Уравнение Фаддеева и местоположение существенного спектра модельного оператора нескольких частиц // *Изв. вузов. Матем.*, 2008. № 12. С. 59–69; англ. пер.: *Rasulov T. Kh.* The Faddeev equation and the location of the essential spectrum of a model multi-particle operator // *Russian Math. (Iz. VUZ)*, 2008. Vol. 52, no. 12. Pp. 50–59.
10. Эшкабилов Ю. Х. Об одном дискретном “трёхчастичном” операторе Шрёдингера в модели Хаббарда // *ТМФ*, 2006. Т. 149, № 2. С. 228–243; англ. пер.: *Eshkabilov Yu. Kh.* A discrete “three-particle” Schrödinger operator in the Hubbard model // *Theoret. and Math. Phys.*, 2006. Vol. 149, no. 2. Pp. 1497–1511.

Поступила в редакцию 03/V/2010;
в окончательном варианте — 07/VII/2011.

MSC: 81Q10; 35P20, 47N50

ON THE ESSENTIAL SPECTRUM OF A MODEL OPERATOR ASSOCIATED WITH THE SYSTEM OF THREE PARTICLES ON A LATTICE

T. Kh. Rasulov^{1,2}

¹ Bukhara State University, Physics and Mathematics Faculty,
11, Muhammad Ikbol, Bukhara, 200100, Uzbekistan.

² University of Bern, Faculty of Sciences,
5, Sidlerstrasse, Bern, CH-3012, Switzerland.

E-mail: rth@mail.ru

A model operator H associated with the system of three-identical particles on a lattice $\mathbb{Z}^3$ is considered. The location of the essential spectrum of H is described by the spectrum of the corresponding Friedrichs model, that is, the two-particle and three-particle branches of the essential spectrum of H are singled out. It is proved that the essential spectrum of H consists of no more than three bounded closed intervals. An appearance of two-particle branches on the both sides of the three-particle branch is shown. Moreover, we obtain an analogue of the Faddeev equation and its symmetric version, for the eigenfunctions of H .

Key words: model operator, Friedrichs model, Hilbert–Schmidt class, Faddeev equation, essential spectrum.

Original article submitted 03/V/2010;
revision submitted 07/VII/2011.

Tulkin Kh. Rasulov (Ph.D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Algebra and Analysis¹; Doctoral Candidate, Mathematical Institute².