Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Я. А. Шахов, Идентификаторы в квазилинейных системах, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 5(), 258–262

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 10:13:24

УДК 517.977.1, 519.71

ИДЕНТИФИКАТОРЫ В КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ

Я. А. Шахов

Санкт-Петербургский государственный университет,
факультет прикладной математики — процессов управления,
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, 35.
E-mail: yakov.shakhov@gmail.com

Рассматривается задача стабилизации квазилинейных нестационарных систем в случае неполной обратной связи. При синтезе стабилизирующего управления ввиду нехватки информации о текущем векторе состояния системы используется его оценка. Для построения данных оценок строятся идентификаторы различного типа: полного порядка n и идентификаторы Люенбергера меньшей размерности. Получены достаточные условия существования указанных идентификаторов.

Ключевые слова: квазилинейные системы, стабилизация, программное управление, неполная обратная связь, идентификатор полного порядка, идентификатор Люенбергера.

Введение. Одной из основных задач математической теории управления является задача стабилизации объекта на заданном программном движении [1]. В практической реализации стабилизирующего управления часто вектор состояния объекта недоступен полностью для измерений [2]. В этом случае строят идентификаторы состояний различного типа — как полного порядка n , так и специфические идентификаторы Люенбергера [3] меньшей размерности. Оценки состояния системы, полученные с помощью указанных идентификаторов, используются в блоке стабилизации программного движения. В [2] построены идентификаторы для линейных, в [4] — для билинейных систем. В настоящей работе исследуется вопрос синтеза идентификаторов полного порядка и идентификаторов Люенбергера для квазилинейных систем [1].

1. Постановка задачи. Рассмотрим квазилинейную управляемую систему

$$\dot{\xi} = A(t)\xi + B(t)v + f(t) + \mu Q(t, \xi, v, \mu),$$

где ξ — n -мерный вектор фазового состояния, v — r -мерный вектор управлений; элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и компоненты вектора $f(t)$ заданы при $t \geq 0$, вещественны, непрерывны и ограничены; $Q(t, \xi, v, \mu)$ — вещественная непрерывно дифференцируемая по компонентам x, u вектор-функция; $\mu \geq 0$ — малый параметр.

Для некоторого программного движения $\xi_p(t)$ и соответствующего ему управления $v_p(t)$ построим систему в отклонениях

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + \mu G(t, x, u, \mu), \quad (1)$$

где

$$x = \xi - \xi_p(t), \quad u = v - v_p(t),$$

$$G(t, x, u, \mu) = Q(t, x + \xi_p(t), u + v_p(t), \mu) - Q(t, \xi_p(t), v_p(t), \mu).$$

В стандартной задаче построения непрерывного стабилизирующего управления [1, 4] допустимым считается управление вида линейной обратной связи

$$u = C(t)x, \quad (2)$$

Яков Александрович Шахов, аспирант, каф. моделирования экономических систем.

где $(r \times n)$ -матрица $\mathbf{C}(t)$ подлежит определению. Конечной целью при этом является экспоненциальная устойчивость нулевого решения замкнутой системы (1), (2). Однако для формирования управления (2) необходима полная информация о векторе отклонений $\mathbf{x}(t)$. Далеко не в каждой прикладной задаче она является доступной, поэтому возникает следующая

ЗАДАЧА 1. Будем считать, что доступны для измерения только отдельные компоненты вектора $\mathbf{x}(t)$ или их линейные комбинации, т.е. вместе с системой (1) задано уравнение измерителя (или наблюдателя)

$$\mathbf{y} = \mathbf{R}(t)\mathbf{x}, \quad (3)$$

где $\mathbf{y}$ — m -мерный вектор измерений; $\mathbf{R}(t)$ — заданная, вещественная, непрерывная при $t \geq 0$, ограниченная $(m \times n)$ -матрица. Иногда в литературе уравнение (3) называют уравнением выхода, а вектор $\mathbf{y}$ — выходом системы (см. [2]).

Требуется построить такую оценку $\hat{\mathbf{x}}(t)$ вектора состояния $\mathbf{x}(t)$, чтобы она обладала свойством

$$\hat{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0} \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (4)$$

Если это удастся, то стабилизирующее управление для системы (1) можно искать в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{x}}. \quad (5)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 [2]. Динамическую систему, которая формирует на выходе вектор $\hat{\mathbf{x}}(t)$ по данным о выходах и входах системы, будем называть *идентификатором состояния*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Квазилинейную динамическую систему, выходом которой является вектор $\hat{\mathbf{x}}(t)$, будем называть *квазилинейным асимптотическим идентификатором состояния* системы (1), (3), если вектор оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ удовлетворяет свойству (4).

2. Синтез идентификатора полного порядка. Перейдём к решению поставленной задачи. Будем искать идентификатор в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{L}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{R}(t)\hat{\mathbf{x}}) + \mu \mathbf{G}(t, \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mu). \quad (6)$$

В (6) матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ и функция $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ те же, что и в системе (1), (3), а неизвестная $(n \times m)$ -матрица $\mathbf{L}(t)$ подлежит определению. Слагаемое $\mathbf{L}(t)(\mathbf{y} - \mathbf{R}(t)\hat{\mathbf{x}})$ учитывает качество оценки состояния. Ввиду (3) получаем $\mathbf{y} - \mathbf{R}(t)\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{R}(t)(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})$. Поэтому в идеальной ситуации при $\mathbf{x}(t) \equiv \hat{\mathbf{x}}$ система (6) с точностью до обозначений совпадает с исходной системой (1).

Таким образом, задача 1 сводится к выбору матрицы $\mathbf{L}(t)$ так, чтобы имело место свойство оценки (4) и существовало стабилизирующее управление (5) для системы (1).

Рассмотрим далее две вспомогательные системы

$$\dot{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}_1, \quad (7)$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2 = -\mathbf{A}^\top(t)\mathbf{x}_2 + \mathbf{R}^\top(t)\mathbf{u}_2, \quad (8)$$

где матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$, $\mathbf{R}(t)$ те же, что и в (1), (3), а векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ соответствующих размерностей имеют характер формальных обозначений.

Следующее утверждение решает задачу 1.

ТЕОРЕМА 1. Если системы (7), (8) стабилизируемы и для функции $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ из (1) при допустимых значениях величин $\mathbf{u}$, μ справедлива оценка

$$\|\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)\| \leq \psi(t)\|\mathbf{x}\|^m,$$

где $m > 1$, $\psi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t \geq 0$, характеристический показатель Ляпунова которой равен нулю, то для системы (1) существует нестационарный асимптотический квазилинейный идентификатор (6) и стабилизирующее управление (5).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Стабилизируемость систем (7), (8) понимается в смысле возможности обеспечить соответствующим замкнутым системам наперед заданные спектры характеристических показателей [5].

Доказательство. Введём в рассмотрение новую переменную $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)$, которая описывает качество оценки вектора $\mathbf{x}(t)$. Её динамика с учётом управления (5) описывается системой

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}} = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{L}(t)\mathbf{R}(t))\bar{\mathbf{x}}(t) + \mu \bar{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \mu), \quad (9)$$

где $\bar{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}, \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \mu) = \bar{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \mu) - \bar{\mathbf{G}}(t, \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \mu)$. При этом замкнута система (1), (5) в новых переменных примет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{C}(t))\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)\mathbf{C}(t)\bar{\mathbf{x}} + \mu \mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{C}(t)(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}), \mu). \quad (10)$$

Если рассматривать системы (10), (9) как единое целое, то остаётся показать, что за счёт выбора матриц $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{L}(t)$ можно обеспечить экспоненциальную устойчивость её нулевого решения. Поскольку стабилизируемость вспомогательных систем (7), (8) и соответствующая оценка нелинейности гарантируются условиями теоремы, матрицы $\mathbf{C}(t)$, $\mathbf{L}(t)$ можно построить по алгоритмам, описанным в [5], а затем воспользоваться теоремой Перрона и теоремой об устойчивости по линейному приближению (см. [6], с. 170 и с. 267 соответственно). Таким образом, возможность построения идентификатора (6) и стабилизирующего управления (5) подтверждена конструктивно. $\square$

3. Идентификаторы Люенбергера. Для построения оценки состояния системы при решении задачи 1 данные измерителя (3) использовались лишь косвенно (при синтезе идентификатора), а сама оценка $\hat{\mathbf{x}}(t)$ является n -мерным вектором, соответствующим вектору $\mathbf{x}(t)$.

Изменим постановку задачи 1 следующим образом.

ЗАДАЧА 2. Для системы (1) требуется выбрать $n - m$ линейных комбинаций компонент вектора $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t), \quad (11)$$

где $\mathbf{z}(t)$ — $(n - m)$ -мерный вектор, чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) матрица $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$ была неособой;
- 2) для вектора $\mathbf{z}(t)$ должен существовать идентификатор, позволяющий находить оценку $\hat{\mathbf{z}}(t)$, обладающую асимптотикой

$$\mathbf{z}(t) - \hat{\mathbf{z}}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow +\infty.$$

Если задача будет решена, то алгоритм для построения вектора $\hat{\mathbf{x}}(t)$ можно модифицировать следующим образом. С учётом (3) и (11) имеем

$$\begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix} \mathbf{x}(t). \quad (12)$$

Из (12) получим

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix}.$$

Это возможно, так как матрица $\mathbf{M}$ считается неособой по построению. Если предположить, что найден вектор $\hat{\mathbf{z}}(t)$, то для вектора оценки состояния всей исходной системы получим выражение

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{z}}(t) \\ \mathbf{y}(t) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Стабилизирующее управление для системы (1) будем искать в виде (5), (13), что и является конечной целью.

С алгебраической точки зрения задача сводится к разработке алгоритма построения матрицы $\mathbf{T}$, удовлетворяющей условиям 1), 2) в постановке **задачи 2**.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Принципиальное отличие данной задачи от предыдущей состоит в том, что информация (3) о векторе $\mathbf{x}(t)$ используется непосредственно в (13) для формирования его оценки.

4. Синтез идентификаторов Люенбергера. Перейдём к решению поставленной задачи. Прежде всего сделаем в системе (1) замену переменных (12), чтобы получить уравнение, описывающее изменение вектора $\mathbf{z}(t)$. Введём обозначения для блоков следующих матриц:

$$\mathbf{MA}(t)\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{zz}(t) & \mathbf{A}_{zy}(t) \\ \mathbf{A}_{yz}(t) & \mathbf{A}_{yy}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{MB}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_z(t) \\ \mathbf{B}_y(t) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{MG} \left(t, \mathbf{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{pmatrix}, \mathbf{u}, \mu \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_z(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu) \\ \mathbf{G}_y(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) в новых переменных примет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}_{zz}(t)\mathbf{z} + \mathbf{A}_{zy}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}_z(t)\mathbf{u} + \mu\mathbf{G}_z(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu); \\ \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{A}_{yz}(t)\mathbf{z} + \mathbf{A}_{yy}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}_y(t)\mathbf{u} + \mu\mathbf{G}_y(t, \mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu). \end{cases}$$

Здесь первое уравнение описывает изменение вектора $\mathbf{z}(t)$, поэтому идентификатор Люенбергера для построения оценки $\hat{\mathbf{x}}(t)$ будем искать в виде

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}} = \mathbf{A}_{zz}(t)\hat{\mathbf{z}} + \mathbf{A}_{zy}(t)\mathbf{y} + \mathbf{B}_z(t)\mathbf{u} + \mu\mathbf{G}_z(t, \hat{\mathbf{z}}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mu). \quad (14)$$

Проблема выбора матрицы $\mathbf{T}$ с учётом введенных обозначений трансформируется в проблему выбора матриц $\mathbf{A}_{zz}(t)$, $\mathbf{A}_{zy}(t)$, $\mathbf{B}_z(t)$.

Следующее утверждение решает **задачу 2**.

Рассмотрим матричное уравнение

$$\mathbf{TA}(t) = \mathbf{A}_{zz}(t)\mathbf{T} + \mathbf{A}_{zy}(t)\mathbf{R}(t). \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены следующие условия:

- 1) вспомогательная линейная система (7) стабилизируема;
- 2) матричное уравнение (15) имеет такое решение относительно матрицы $\mathbf{T}$, что $\text{rang } \mathbf{M} = n$, а характеристические показатели Ляпунова линейной системы с матрицей $\mathbf{A}_{zz}(t)$ отрицательны;
- 3) для функции $\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)$ из (1) при допустимых значениях величин $\mathbf{u}$, μ справедлива оценка $\|\mathbf{G}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mu)\| \leq \psi(t)\|\mathbf{x}\|^m$, где $m > 1$, $\psi(t)$ — непрерывная положительная функция при $t \geq 0$, характеристический показатель Ляпунова которой равен нулю.

Тогда для системы (1) существует квазилинейный асимптотический идентификатор Луюнбергера (14) и стабилизирующее управление (5), (13).

Доказательство. Отметим основные моменты доказательства, поскольку основная идея остается той же, что и при доказательстве **теоремы 1**. Для построения стабилизирующего управления (5), (13) и неизвестных коэффициентов идентификатора (14) рассматривается объединенная система уравнений, первая подсистема которой есть (1), а вторая описывает динамику качества оценки вектора z . Выполнение первого и второго условий теоремы обеспечивает экспоненциальную устойчивость линейного приближения этой системы. Используя третье условие теоремы, можно применить теорему о стабилизации по линейному приближению [6], тем самым установив, что нулевое решение данной системы экспоненциально устойчиво. В результате получаем конструктивный подход к построению асимптотического идентификатора Луюнбергера (14) и стабилизирующего управления (5), (13). $\square$

Заключение. В настоящей работе исследован вопрос стабилизации программного движения квазилинейной системы в случае неполной обратной связи. Получены достаточные условия существования идентификаторов полного порядка и идентификаторов Луюнбергера для данного класса систем.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Зубов В. И.* Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 496 с.
2. *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
3. *Luenberger D. C.* Observers for multivariable systems // *IEEE Trans. on Automatic Control*, 1966. — Vol. 11, No. 2. — P. 190–197.
4. *Смирнов Н. В.* Стабилизация билинейной нестационарной системы в случае неполной обратной связи // *Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 1*, 2000. — Т. 4, № 25. — С. 28–34.
5. *Смирнов Е. Я.* Стабилизация программных движений. — СПб.: С.-Петербург. ун-т, 1997. — 307 с.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

Поступила в редакцию 26/VI/2010;
в окончательном варианте — 12/X/2010.

MSC: 34H15, 49N30, 93B07

OBSERVERS FOR THE QUASI-LINEAR SYSTEMS

Y. A. Shakhov

St. Petersburg State University,
Faculty of Applied Mathematics and Control Processes,
35, Universitetsky prosp., St. Petersburg, 198504.
E-mail: yakov.shakhov@gmail.com

The problem of quasi-linear systems stabilization in the case of incomplete feedback is considered. While synthesizing a stabilizing control, estimation of a current state vector is applied. To design this estimation, observers are constructed. The full-dimensions observer and the Luenberger's observer are studied and sufficient conditions of its existence are obtained.

Key words: quasi-linear system, stabilization, program control, incomplete feedback, full-dimensions observer, Luenberger's observer.

Original article submitted 26/VI/2010;
revision submitted 12/X/2010.

Yakov A. Shakhov, Postgraduate Student, Dept. of Economics Systems Modeling.