Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. С. Яшагин, Интегральные представления и асимптотические формулы для обобщения функции типа Миттаг-Леффлера на случай двух переменных, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 5(), 229–236

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 08:36:45

Математический анализ

УДК 517.581

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБОБЩЕНИЯ ФУНКЦИИ ТИПА МИТТАГ—ЛЕФФЛЕРА НА СЛУЧАЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Н. С. Яшагин

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: nik-yashagin@yandex.ru

Рассмотрена специальная функция, обобщающая функцию типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных. Получены интегральные представления для этой функции в различных областях изменения её аргументов при некоторых ограничениях на параметры. Установлены асимптотические формулы и асимптотические свойства этой функции при устремлении аргументов к бесконечности. Доказаны соответствующие теоремы.

Ключевые слова: специальные функции, обобщения функции типа Миттаг—Леффлера, интегральные представления, асимптотические формулы.

1. Определения и обозначения. Обобщением функции типа Миттаг—Леффлера на случай двух переменных мы называем [1] целую функцию, определяемую степенным рядом

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \sum_{k,l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{\Gamma(k\alpha + l\beta + \mu)}, \quad (1)$$

где μ — произвольный, вообще говоря, комплексный параметр.

Обозначим через $\gamma(\varepsilon; \theta)$ ($\varepsilon > 0$, $0 < \theta \leq \pi$) контур, пробегаемый в направлении неубывания $\arg \zeta$ и состоящий из следующих частей:

- 1) луч $\arg \zeta = -\theta$, $|\zeta| \geq \varepsilon$;
- 2) дуга $-\theta \leq \arg \zeta \leq \theta$ окружности $|\zeta| = \varepsilon$;
- 3) луч $\arg \zeta = \theta$, $|\zeta| \geq \varepsilon$.

2. Интегральные представления. Докажем несколько лемм об интегральных представлениях обобщения функции типа Миттаг—Леффлера (1) в различных областях изменения её аргументов.

Лемма 1. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число, а θ удовлетворяет условию

$$\frac{\pi\alpha\beta}{2} < \theta \leq \min\{\pi, \pi\alpha\beta\}. \quad (2)$$

Николай Сергеевич Яшагин, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

Если $x \in G^{(-)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$, $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$, где $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta}$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon^{1/\alpha}$ и $\theta_\alpha = \theta/\beta$, $\theta_\beta = \theta/\alpha$, то имеет место следующее интегральное представление:

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(\varepsilon; \theta)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{(\zeta^{1/\alpha} - y)(\zeta^{1/\beta} - x)} d\zeta. \quad (3)$$

Доказательство. Положим сначала $|x| < \varepsilon_\alpha$. С учётом того, что $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta} = (\varepsilon_\beta^\alpha)^{1/\beta} = \varepsilon_\beta^{\alpha/\beta}$, очевидно, что

$$\sup_{\zeta \in \gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)} |x \zeta^{-\alpha/\beta}| < 1.$$

Запишем функцию $E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu)$ в соответствии с определением (1) и преобразуем, сворачивая один из рядов по определению функции типа Миттаг—Леффлера одного аргумента [2]:

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^k y^l}{\Gamma(\alpha k + \beta l + \mu)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{y^l}{\Gamma[\beta l + (\alpha k + \mu)]} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k E_\beta(y; \alpha k + l). \end{aligned}$$

В силу условий леммы можно воспользоваться известным интегральным представлением для $E_\beta(y; \alpha k + l)$ (см. [2, формула (2.2)]), причём в качестве параметров, определяющих контур γ , возьмём введённые выше ε_β и θ_β , что допустимо в соответствии с (2) и с учётом равенства $\theta_\beta = \theta/\alpha$. Тогда, если $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$, то

$$\begin{aligned} E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) &= \sum_{k=0}^{\infty} x^k E_\beta(y; \alpha k + l) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\beta} \int_{\gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)} \frac{e^{\zeta^{1/\beta}} \zeta^{\frac{1-\alpha k-\mu}{\beta}}}{\zeta - y} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\beta} \int_{\gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)} \frac{e^{\zeta^{1/\beta}} \zeta^{\frac{1-\mu}{\beta}}}{\zeta - y} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (x \zeta^{-\alpha/\beta})^k \right\} d\zeta = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\beta} \int_{\gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)} \frac{e^{\zeta^{1/\beta}} \zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta - y)(\zeta^{\alpha/\beta} - x)} d\zeta. \quad (4) \end{aligned}$$

Преобразуем интегральное представление (4), приведя его к интегралу по контуру $\gamma(\varepsilon; \theta)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\beta} \int_{\gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)} \frac{e^{\zeta^{1/\beta}} \zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta - y)(\zeta^{\alpha/\beta} - x)} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\beta} \int_{\gamma(\varepsilon; \theta)} \frac{e^{(\xi^{1/\alpha})^{1/\beta}} (\xi^{1/\alpha})^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\xi^{1/\alpha} - y)(\xi^{1/\beta} - x)} \frac{1}{\alpha} \xi^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(\varepsilon; \theta)} \frac{e^{\xi^{1/(\alpha\beta)}} \xi^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{(\xi^{1/\alpha} - y)(\xi^{1/\beta} - x)} d\xi.$$

Полученный интеграл абсолютно сходится и является аналитической функцией от x и y при $x \in G^{(-)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$, $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$.

Очевидно, что круг $|x| < \varepsilon_\alpha$ содержится в области $G^{(-)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$ для всех значений θ_α из промежутка $(\pi\alpha/2, \min\{\pi, \pi\alpha\})$. Следовательно, по принципу аналитического продолжения представление (3) имеет место всюду в области $G^{(-)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$. $\square$

ЛЕММА 2. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число, а θ удовлетворяет условию (2). Если $x \in G^{(-)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$, $y \in G^{(+)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$, где $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta}$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon^{1/\alpha}$ и $\theta_\alpha = \theta/\beta$, $\theta_\beta = \theta/\alpha$, то имеет место следующее интегральное представление:

$$E_{\alpha, \beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(\varepsilon; \theta)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{(\zeta^{1/\alpha} - y)(\zeta^{1/\beta} - x)} d\zeta. \quad (5)$$

Доказательство. По условию леммы точка y лежит справа от контура $\gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$, т.е. $y \in G^{(+)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$. Тогда для любого $\varepsilon_{\beta 1} > |y|$ очевидно $y \in G^{(-)}(\varepsilon_{\beta 1}; \theta_\beta)$, а $x \in G^{(-)}(\varepsilon_{\alpha 1}; \theta_\alpha)$, потому по формуле (4) имеем представление

$$E_{\alpha, \beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\beta} \int_{\gamma(\varepsilon_{\beta 1}; \theta_\beta)} \frac{e^{\zeta^{1/\beta}} \zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta - y)(\zeta^{\alpha/\beta} - x)} d\zeta. \quad (6)$$

С другой стороны, если $\varepsilon_\beta < |y| < \varepsilon_{\beta 1}$, $|\arg y| < \theta_\beta$, то по теореме Коши справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\beta} \int_{\gamma(\varepsilon_{\beta 1}; \theta_\beta) - \gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)} \frac{e^{\zeta^{1/\beta}} \zeta^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{(\zeta - y)(\zeta^{\alpha/\beta} - x)} d\zeta = \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) немедленно получается представление (5). $\square$

Аналогично доказывается интегральное представление для $x \in G^{(+)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$, $y \in G^{(-)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$:

$$E_{\alpha, \beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(\varepsilon; \theta)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{(\zeta^{1/\alpha} - y)(\zeta^{1/\beta} - x)} d\zeta. \quad (8)$$

ЛЕММА 3. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число, а θ удовлетворяет условию (2). Если $x \in G^{(+)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$, $y \in G^{(+)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$, где $\varepsilon_\alpha = \varepsilon^{1/\beta}$, $\varepsilon_\beta = \varepsilon^{1/\alpha}$ и $\theta_\alpha = \theta/\beta$, $\theta_\beta = \theta/\alpha$, то имеет место следующее интегральное представление:

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(\varepsilon; \theta)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{(\zeta^{1/\alpha} - y)(\zeta^{1/\beta} - x)} d\zeta. \quad (9)$$

Доказательство. По условию леммы точки x и y лежат по правую сторону от контуров $\gamma(\varepsilon_\alpha; \theta_\beta)$ и $\gamma(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$ соответственно, т. е. $x \in G^{(+)}(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)$, $y \in G^{(+)}(\varepsilon_\beta; \theta_\beta)$. Параметрам ε_α и ε_β соответствует ε . Выберем такое ε_1 ($\varepsilon_1 > \varepsilon$), чтобы одна из координат оказалась справа от контура, а другая слева (такое всегда возможно, если $x^\beta \neq y^\alpha$). Для определённости пусть $x \in G^{(-)}(\varepsilon_{\alpha 1}; \theta_\alpha)$, $y \in G^{(+)}(\varepsilon_{\beta 1}; \theta_\beta)$ (т. е. $x < y$). Тогда по формуле (5) из леммы 2 имеет место интегральное представление

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(\varepsilon_1; \theta)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1}}{(\zeta^{1/\alpha} - y)(\zeta^{1/\beta} - x)} d\zeta. \quad (10)$$

Запишем интеграл в (10) в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_{\gamma(\varepsilon_{\alpha 1}; \theta_\alpha)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{(\zeta^{\beta/\alpha} - y)(\zeta - x)} d\zeta.$$

Если $\varepsilon_\alpha < |x| < \varepsilon_{\alpha 1}$, $|\arg x| < \theta_\alpha$, то по теореме Коши справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha} \int_{\gamma(\varepsilon_{\alpha 1}; \theta_\alpha) - \gamma(\varepsilon_\alpha; \theta_\alpha)} \frac{e^{\zeta^{1/\alpha}} \zeta^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{(\zeta^{\beta/\alpha} - y)(\zeta - x)} d\zeta = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y}. \quad (11)$$

Из (10) и (11) получается представление (9). $\square$

ЛЕММА 4. Если $\operatorname{Re} \mu > 0$, то интегральные представления (3), (5), (8) и (9) остаются в силе для $\alpha = 2$ или $\beta = 2$ при их предельном переходе по соответствующим параметрам.

Доказательство леммы очевидно.

3. Асимптотические свойства. Особый интерес представляют асимптотические свойства функции $E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu)$ при больших по модулю значениях аргументов $|x|$ и $|y|$.

ТЕОРЕМА. Пусть $\alpha, \beta \in (0, 2)$, $\alpha\beta < 2$, μ — любое комплексное число, a — любое вещественное число, удовлетворяющих условию

$$\frac{\pi\alpha\beta}{2} < a \leq \min \{ \pi, \pi\alpha\beta \}.$$

Тогда для любого целого $p \geq 1$ при $|x| \rightarrow \infty$ и $|y| \rightarrow \infty$ справедливы следующие асимптотические формулы:

1) $npu \mid \arg x \mid \leq a/\beta$ и $\mid \arg y \mid \leq a/\alpha$:

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} + \\ + \sum_{k=1}^{p_\beta} \sum_{l=1}^{p_\alpha} \frac{x^{-k} y^{-l}}{\Gamma(\mu - k\alpha - l\beta)} + o(|xy|^{-1} |y|^{-p_\alpha}) + o(|xy|^{-1} |x|^{-p_\beta}); \quad (12)$$

2) $npu \mid \arg x \mid \leq a/\beta$ и $a/\alpha < \mid \arg y \mid \leq \pi$:

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{\alpha} \frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \\ + \sum_{k=1}^{p_\beta} \sum_{l=1}^{p_\alpha} \frac{x^{-k} y^{-l}}{\Gamma(\mu - k\alpha - l\beta)} + o(|xy|^{-1} |y|^{-p_\alpha}) + o(|xy|^{-1} |x|^{-p_\beta}); \quad (13)$$

3) $npu a/\beta < \mid \arg x \mid \leq \pi$ и $\mid \arg y \mid \leq a/\alpha$:

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} + \\ + \sum_{k=1}^{p_\beta} \sum_{l=1}^{p_\alpha} \frac{x^{-k} y^{-l}}{\Gamma(\mu - k\alpha - l\beta)} + o(|xy|^{-1} |y|^{-p_\alpha}) + o(|xy|^{-1} |x|^{-p_\beta}); \quad (14)$$

4) $npu a/\beta < \mid \arg x \mid \leq \pi$ и $a/\alpha < \mid \arg y \mid \leq \pi$:

$$E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) = \sum_{k=1}^{p_\beta} \sum_{l=1}^{p_\alpha} \frac{x^{-k} y^{-l}}{\Gamma(\mu - k\alpha - l\beta)} + \\ + o(|xy|^{-1} |y|^{-p_\alpha}) + o(|xy|^{-1} |x|^{-p_\beta}). \quad (15)$$

Доказательство. При ограничениях $\mid \arg x \mid \leq a/\beta$ и $\mid \arg y \mid \leq a/\alpha$ число b выбираем так, чтобы

$$\frac{\pi\alpha\beta}{2} < a < b \leq \min \{ \pi, \pi\alpha\beta \}. \quad (16)$$

Нетрудно показать, что имеет место разложение

$$\frac{1}{(\zeta^{1/\beta} - x)(\zeta^{1/\alpha} - y)} = \sum_{k=1}^{p_\beta} \sum_{l=1}^{p_\alpha} \frac{\zeta^{\frac{l-1}{\alpha} + \frac{k-1}{\beta}}}{y^l x^k} + \frac{x^{p_\beta} \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}} + y^{p_\alpha} \zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}} - \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha} + \frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta} y^{p_\alpha} (\zeta^{1/\beta} - x)(\zeta^{1/\alpha} - y)}. \quad (17)$$

Воспользуемся формулой (9) из леммы 3. В (17) положим $\varepsilon = 1$, тогда справа от контура $\gamma(1; b)$ (т.е. в области $G^{(+)}(1; b)$) для функции $E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu)$ с учётом (17) получаем представление

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) &= \frac{1}{\alpha} \frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} + \\
 &+ \sum_{k=1}^{p_\beta} \sum_{l=1}^{p_\alpha} \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \left(\int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{l-1}{\alpha}+\frac{k-1}{\beta}} d\zeta \right) x^{-k} y^{-l} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1} \frac{x^{p_\beta} \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}} + y^{p_\alpha} \zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}} - \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha} + \frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta} y^{p_\alpha} (\zeta^{1/\beta} - x) (\zeta^{1/\alpha} - y)} d\zeta. \quad (18)
 \end{aligned}$$

Согласно формуле Ханкеля для гамма-функции [3]

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(\varepsilon; \tau)} e^u u^{-s} du,$$

имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{l-1}{\alpha}+\frac{k-1}{\beta}} d\zeta &= \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{l}{\alpha}+\frac{k}{\beta}} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{-\frac{1}{\alpha\beta}(\mu-l\beta-\alpha k)+\frac{1}{\alpha\beta}-1} d\zeta = \frac{1}{\Gamma(\mu - k\alpha - l\beta)}.
 \end{aligned}$$

Отсюда (18) в силу (16) переписываем в виде

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha,\beta}(x, y; \mu) &= \frac{1}{\alpha} \frac{e^{x^{1/\alpha}} x^{\frac{1+\beta-\mu}{\alpha}}}{x^{\beta/\alpha} - y} + \frac{1}{\beta} \frac{e^{y^{1/\beta}} y^{\frac{1+\alpha-\mu}{\beta}}}{y^{\alpha/\beta} - x} + \sum_{k=1}^{p_\beta} \sum_{l=1}^{p_\alpha} \frac{x^{-k} y^{-l}}{\Gamma(\mu - k\alpha - l\beta)} + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1} \frac{x^{p_\beta} \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}} + y^{p_\alpha} \zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}} - \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha} + \frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta} y^{p_\alpha} (\zeta^{1/\beta} - x) (\zeta^{1/\alpha} - y)} d\zeta. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим последнее слагаемое в формуле (19):

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1} \frac{x^{p_\beta} \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha}} + y^{p_\alpha} \zeta^{\frac{p_\beta}{\beta}} - \zeta^{\frac{p_\alpha}{\alpha} + \frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta} y^{p_\alpha} (\zeta^{1/\beta} - x) (\zeta^{1/\alpha} - y)} d\zeta &= \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p_\alpha}{\alpha}}}{y^{p_\alpha} (\zeta^{1/\beta} - x) (\zeta^{1/\alpha} - y)} d\zeta + \\
 &+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p_\beta}{\beta}}}{x^{p_\beta} (\zeta^{1/\beta} - x) (\zeta^{1/\alpha} - y)} d\zeta -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\alpha\beta} \int_{\gamma(1;b)} \frac{e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p\alpha}{\alpha}+\frac{p\beta}{\beta}}}{x^{p\beta} y^{p\alpha} (\zeta^{1/\beta} - x) (\zeta^{1/\alpha} - y)} d\zeta = I_1 + I_2 + I_3. \quad (20)$$

Оценим каждый интеграл из (20) при больших $|x|$ и $|y|$, предполагая, что $|\arg x| \leq a/\beta$ и $|\arg y| \leq a/\alpha$.

Заметим, что когда $|\arg x| \leq a/\beta$ и $|x|$ достаточно велико, то

$$\min_{\zeta \in \gamma(1;b)} |\zeta^{1/\beta} - x| = |x| \sin(b/\beta - a/\beta) = |x| \sin\left(\frac{b-a}{\beta}\right).$$

Аналогично для $|\arg y| \leq a/\alpha$ и достаточно большого $|y|$ имеем

$$\min_{\zeta \in \gamma(1;b)} |\zeta^{1/\alpha} - y| = |y| \sin(b/\alpha - a/\alpha) = |y| \sin\left(\frac{b-a}{\alpha}\right).$$

Поэтому для больших $|x|$ и $|y|$ при $|\arg x| \leq a/\beta$ и $|\arg y| \leq a/\alpha$ получаем оценку

$$|I_1| \leq \frac{|x|^{-1} |y|^{-p\alpha-1}}{2\pi\alpha\beta \sin\left(\frac{b-a}{\beta}\right) \sin\left(\frac{b-a}{\alpha}\right)} \int_{\gamma(1;b)} \left| e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \right| \left| \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p\alpha}{\alpha}} \right| |d\zeta|,$$

причём интеграл справа сходится, так как на лучах $\arg \zeta = \pm b$ ($|\zeta| \geq 1$), входящих в состав контура $\gamma(1;b)$, выполняется равенство

$$\left| e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \right| = \exp \left\{ \left| \zeta \right|^{\frac{1}{\alpha\beta}} \cos \frac{b}{\alpha\beta} \right\},$$

а согласно условию (16), $\cos \frac{b}{\alpha\beta} < 0$. Итак, $I_1 = o(|xy|^{-1} |y|^{-p\alpha})$. Аналогично $I_2 = o(|xy|^{-1} |x|^{-p\beta})$.

Обратимся к третьему слагаемому из (20):

$$|I_3| \leq \frac{|x|^{-p\beta-1} |y|^{-p\alpha-1}}{2\pi\alpha\beta \sin\left(\frac{b-a}{\beta}\right) \sin\left(\frac{b-a}{\alpha}\right)} \int_{\gamma(1;b)} \left| e^{\zeta^{1/(\alpha\beta)}} \right| \left| \zeta^{\frac{1+\alpha+\beta-\mu}{\alpha\beta}-1+\frac{p\alpha}{\alpha}+\frac{p\beta}{\beta}} \right| |d\zeta|.$$

Очевидно, что $I_3 = o(|xy|^{-1} |y|^{-p\alpha} |x|^{-p\beta})$.

Итак, $I = o(|xy|^{-1} |y|^{-p\alpha}) + o(|xy|^{-1} |x|^{-p\beta})$.

Доказательства пунктов 2), 3) и 4) проводятся по той же схеме, что приведена выше. $\square$

Работа выполнена в рамках Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № РНП.2.1.1/745).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Огородников Е. Н., Яшагин Н. С. Постановка и решение задач типа Коши для дифференциальных уравнений второго порядка с дробными производными Римана–Лиувилля // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2010. — № 1(20). — С. 24–36.
2. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 672 с.
3. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Т. 2: Дальнейшее построение теории. — М.: Наука, 1968. — 624 с.

Поступила в редакцию 05/VII/2010;
в окончательном варианте — 13/IX/2010.

MSC: 33E12

INTEGRAL REPRESENTATIONS AND ASYMPTOTIC EXPANSION FORMULAS OF MITTAG–LEFFLER–TYPE FUNCTION OF TWO VARIABLES

N. S. Yashagin

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mails: nik-yashagin@yandex.ru

Special function generalizing Mittag–Leffler–type function for two variables is considered. Integral representations for this function in different variation range of arguments for a certain value of parameters is obtained. Asymptotic formulas and asymptotic properties of this function for large arguments is established. Theorems for these formulas and these properties are provided.

Key words: *special functions, generalizations Mittag–Leffler–type function for two variables, integral representations, asymptotic expansion formulas.*

Original article submitted 05/VII/2010;
revision submitted 13/IX/2010.

Nikolay S. Yashagin, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.