Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Реш, Использование функций Уолша в исследовании систем автоматического управления тепловыми процессами, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu82>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 12:31:17

Математическое моделирование и информатика

УДК 681.3.06.

Е.А. Рев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИЙ УОЛША В ИССЛЕДОВАНИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Рассмотрен метод анализа обращения преобразования Лапласа, основанный на применении функций Уолша. Показано, что предложенный метод, по существу, является численным методом обращения интеграла Лапласа по системе функций Уолша

В общем случае исследование переходных процессов систем автоматического управления тепловыми процессами сводится к нахождению оригинала интегрального преобразования Лапласа.

Предположим, что функция $f(t)$ принадлежит классу

$$f(t) \in L_2(\delta(t); 0, \infty) \quad (1)$$

и нам известно преобразование Лапласа функции $j(t)$:

$$\Phi(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \phi(t) dt, \quad (2)$$

где $j(t) = f(t) d(t)$; $d(t)$ - весовая неотрицательная функция на $[0; \infty)$, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\infty} d(t) dt < \infty. \quad (3)$$

Требуется восстановить функцию $f(t)$ по известному её изображению

$$F(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Решение поставленной задачи будем искать в виде разложения искомой функции в ряд по системе функций Уолша, которые хорошо приспособлены для реализации на современных средствах вычислительной техники.

Ортонормированная система функций Уолша [4,5] определена на интервале $[0;1]$ следующим образом:

$$W_0(x) \equiv 1, \\ W_n(x) = R_{n_1+1}(x) \cdot R_{n_2+1}(x) \dots R_{n_r+1}(x),$$

где $n = 2^{n_r} + 2^{n_{r-1}} + \dots + 2^{n_1}$, $n_r > n_{r-1} > \dots > n_1 \geq 0$ - показатели степеней в двоичном разложении номера функции системы Уолша, $R(x)$ - ортонормированная система функций Радемахера [3], которая на интервале $[0;1]$ может быть определена через функции Хаара в виде

$$R_1(x) = c_0^{(1)}(x), \\ R_{m+1}(x) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{k=1}^{2^m} c_m^{(k)}(x), \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Производя замену переменной по формуле $x = e^{-t}$ в интегральном преобразовании Лапласа (2), получим

$$\Phi(p) = \int_0^1 x^p \Delta(x) \psi(x) dx, \quad (4)$$

где

$$\psi(x) = f(-\ln x), \quad \Delta(x) = \frac{d(-\ln x)}{x}. \quad (5)$$

В силу условий (1), (3) соотношение (4) справедливо в полуплоскости

$$\operatorname{Re} p \geq 0. \quad (6)$$

В полученном интегральном уравнении (4) искомая функция $y(x)$ задана на интервале $[0;1]$ и может быть представлена в виде разложения по функциям Уолша

$$y(x) = \sum_{i=1}^1 C_i W_i(x). \quad (7)$$

На функцию веса (5) в области переменной x наложим ограничение

$$\Delta x = 1. \quad (8)$$

Практически это означает, что функция веса в области переменной t имеет экспоненциальный характер вида

$$d(t) = e^{-t}. \quad (9)$$

Теперь, учитывая условие (6), введенное ограничение (8), подставляя разложение функции (7) в интегральное уравнение (4) и меняя знаки $\sum$ и $\int$, получим

$$m_e = f(e) = \sum_{i=0}^1 C_i \int_0^1 x^e W_i(x) dx, \quad e = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Для вычисления интеграла в уравнении (10) удобно функции Уолша представить через функции Хаара [2]:

$$W_i(x) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \sum_{k=1}^{2^m} a_{SK}^{(m)} c_m^{(k)}(x), \quad (11)$$

где $i = 2^m + S - 1$, $1 \leq S \leq 2^m$, $\|a_{SK}^{(m)}\|$ - некоторая ортогональная матрица с элементами ± 1 .

Подставляя равенство (11) в выражение (10), с учетом зависимостей, полученных в [1], будем иметь

$$e m_e = C_1 + \sum_{i=2}^1 C_i \sum_{k=1}^{2^m} a_{SK}^{(m)} \left[2 \left(\frac{k - \frac{1}{2}}{2^m} \right)^e - \left(\frac{k-1}{2^m} \right)^e - \left(\frac{k}{2^m} \right)^e \right]. \quad (12)$$

Решая систему алгебраических уравнений (12) относительно ортогональных спектральных характеристик по системе функций Уолша $\{C_i\}$, получим решение поставленной задачи в виде разложения (7). При практических расчетах известно преобразование Лапласа $F(p)$, а не $f(p)$. Экспоненциальный характер веса (9) в области переменной t позволяет легко получить $f(p)$ и $F(p)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Реш Е.А. Применение функции Хаара для исследования динамических систем // Сборник научных трудов научно-исследовательского института приборостроения. Самара: СГАУ. Вып/ 5. 1999. С. 13-15.
2. Соболев И.М. Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара. М.: Наука, 1969. 312 с.
3. Redemacher H. Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen // Math. Ann, 1922. № 87. P.112-138.
4. Walsh J.L. A closed set of normal orthogonal functions // Amer. J. Math., 1923. № 45. P. 5-24.
5. Paley R. A remarkable system of orthogonal functions // Proc. London Math. Soc., 1932. № 34. P. 241-279.