Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Боган, Задача Дирихле в двумерной стационарной анизотропной термоупругости, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010, выпуск 5(), 64–71

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu820>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 02:35:50

УДК 539.3

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ В ДВУМЕРНОЙ СТАЦИОНАРНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ

Ю. А. Боган

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
630090, Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, 15

E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

Изучается задача Дирихле для анизотропной термоупругой среды. Здесь, по определению, на границе заданы вектор перемещений и температура. Краевая задача приведена к системе интегральных уравнений. Эта система имеет слаборегулярные ядра в ограниченной области с ляпуновской границей и гельдеровыми граничными данными. Если граница области и граничные данные имеют худшие свойства гладкости, краевая задача сохраняет свойство разрешимости по Фредгольму.

Ключевые слова: интегральные уравнения, анизотропия, упругость.

Введение. Интегральные уравнения редко применяются для решения стационарных задач термоупругости. Так, в статье [1] используется метод сингулярных уравнений. Не так давно автор [2] обнаружил, что при условии однозначной разрешимости краевую задачу для анизотропного материала можно легко привести к системе интегральных уравнений, если использовать простоту корней характеристического уравнения для анизотропного материала. Аналогичный подход применялся автором ранее при решении задач теории упругости. В этой работе этот подход применяется ко второй краевой задаче анизотропной термоупругости, т. е. когда на границе заданы температура и перемещения. Построена система интегральных уравнений. Если граница односвязной области достаточно гладкая, например, принадлежит классу Ляпунова, то это — система уравнений Фредгольма второго рода. Рассмотрен вопрос о гладкости напряжений.

1. Постановка задачи. Напомним необходимые сведения из термоупругости. Для определенности будем считать, что рассматривается обобщённое плоское состояние. В дальнейшем в основном используются обозначения [3]. Примем обобщённый закон Дюамеля—Неймана в следующем виде:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{11} &= c_{11}\sigma_{11} + c_{12}\sigma_{22} + c_{16}\sigma_{12} + \beta_{11}u_3, \\ \varepsilon_{22} &= c_{12}\sigma_{11} + c_{22}\sigma_{22} + c_{26}\sigma_{12} + \beta_{22}u_3, \\ \varepsilon_{12} &= c_{16}\sigma_{11} + c_{26}\sigma_{22} + c_{66}\sigma_{12} - 2\beta_{66}u_3.\end{aligned}\tag{1}$$

Здесь ε_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$ — деформации; u_1 , u_2 — перемещения; u_3 — температура; σ_{ij} , $i, j \in \{1, 2\}$ — напряжения; c_{ij} , $i, j \in \{1, 2, 6\}$ — податливости; β_{ii} , $i \in \{1, 2, 6\}$ — коэффициенты, определяющие компоненты тензора деформации свободного от внешних сил тела при изменении температуры. Напомним, что

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Юрий Александрович Боган (д.ф.-м.н), ведущий научный сотрудник, отдел механики деформируемого твердого тела.

Определим из (1) напряжения и подставим их в уравнения равновесия. Получающаяся при этом система для произвольной анизотропии материала выглядит довольно громоздко, поэтому выпишем её для случая ортотропного материала:

$$\begin{aligned} d_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + d_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + (d_{12} + d_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \gamma_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0, \\ (d_{12} + d_{66}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + d_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + d_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} - \gamma_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Функция $u_3(x_1, x_2)$ — решение однородного уравнения

$$b_{11} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2b_{12} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + b_{22} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3)$$

в предположении, что (3) является эллиптическим: $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$. Ясно, что простой заменой независимых переменных его можно привести к уравнению Лапласа. Однако это упрощение не всегда допустимо.

Уравнения (2), (3) можно рассматривать как систему уравнений анизотропной теории упругости, куда в качестве правых частей входят производные от температуры. Её общее решение состоит из общего решения однородной системы (температура отсутствует) и частного решения, соответствующего присутствию температурного слагаемого.

Решение будем искать в следующем виде:

$$u_1 = \operatorname{Re} n_1 \varphi_3(x_1 + \mu_3 x_2), \quad u_2 = \operatorname{Re} n_2 \varphi_3(x_1 + \mu_3 x_2). \quad (4)$$

Здесь $\operatorname{Re} \varphi_3(x_1 + \mu_3 x_2)$ — решение уравнения теплопроводности, где Re — действительная часть комплексного выражения. При подстановке (4) в (2) получим для n_1, n_2 алгебраическую систему

$$\begin{aligned} n_1(d_{11} + d_{66}\mu_3^2) + n_2\mu_3(d_{12} + d_{66}) &= \gamma_1, \\ n_1\mu_3(d_{12} + d_{66}) + n_2(d_{66} + d_{22}\mu_3^2) &= \gamma_2\mu_3 \end{aligned}$$

с определителем

$$\delta(\mu_3) = (d_{11} + d_{66}\mu_3^2)(d_{66} + d_{22}\mu_3^2) - (d_{12} + d_{66})^2\mu_3^2.$$

Если μ_3 таково, что $\delta(\mu_3) \neq 0$, то постоянные n_1, n_2 однозначно определяются из (4) и тем самым находится требуемое частное решение. Но уравнение $\delta(\mu) = 0$ имеет четыре комплексно сопряжённых корня $\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2$, и при совпадении μ_3 с одним из них $\delta(\mu_3)$ равно нулю. Следовательно, в данном случае этот подход непригоден. Тем не менее именно такой способ определения частного решения применяется в [2] без всяких оговорок.

Как представляется автору, в этом случае для определения частного решения необходимо построить фундаментальное решение системы уравнений теории упругости и свернуть его с правой частью. Так, для ортотропного материала матрица (v_{ij}) ($i, j \in \{1, 2\}$, $v_{12} = v_{21}$) фундаментального решения с особенностью в точке $(0, 0)$ имеет следующий вид:

$$v_{11}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{a_{22}\mu_k^2 + a_{66}}{N(\mu_k)} \ln(x_1 + \mu_k x_2),$$

$$v_{12}(x_1, x_2) = -\frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{(a_{12} + a_{66})\mu_k}{N(\mu_k)} \ln(x_1 + \mu_k x_2),$$

$$v_{22}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^2 \frac{a_{66}\mu_k^2 + a_{11}}{N(\mu_k)} \ln(x_1 + \mu_k x_2).$$

Здесь $N(\mu) = \Lambda(\mu)'$, где $\Lambda(\mu) = d_{22}d_{66}\mu^4 + (d_{11}d_{22} - d_{12}^2 - 2d_{12}d_{66})\mu^2 + d_{11}d_{66}$. При этом μ_1, μ_2 — корни уравнения $\Lambda(\mu) = 0$ с положительной мнимой частью. Нетрудно видеть, что

$$N(\mu_1) = d_{22}d_{66}(\mu_1 - \mu_2)(\mu_1 - \bar{\mu}_1)(\mu_1 - \bar{\mu}_2),$$

$$N(\mu_2) = d_{22}d_{66}(\mu_2 - \mu_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_1)(\mu_2 - \bar{\mu}_2).$$

Положим

$$v_k(x_1, x_2) = \int_Q \sum_{s=1}^2 v_{ks}(x_1 - t_1, x_2 - t_2) f_s(t_1, t_2) dt_1 dt_2, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Если при этом

$$f_1 = \gamma_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad f_2 = \gamma_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_2},$$

то функции $v_k(x_1, x_2)$ ($k \in \{1, 2\}$) дают требуемое частное решение системы уравнений.

В реальной физической ситуации упругие постоянные и температурные параметры известны только с некоторой погрешностью, и поэтому при малом изменении параметров можно прийти к неравенству $\delta(\mu_3) \neq 0$, справедливость которого будет предполагаться в дальнейшем. Отсюда для перемещений и температуры получим представление через аналитические функции (с точностью до жёсткого перемещения):

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} \{b_{11}\varphi_1(z_1) + b_{12}\varphi_2(z_2) + n_1\varphi_3'(z_3)\}, \\ u_2(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} \{b_{21}\varphi_1(z_1) + b_{22}\varphi_2(z_2) + n_2\varphi_3'(z_3)\}, \\ u_3(x_1, x_2) &= \operatorname{Re} \varphi_3(z_3). \end{aligned}$$

где $b_{1k} = c_{11}\mu_k^2 + c_{12} - c_{16}\mu_k$, $b_{2k} = c_{12}\mu_k + c_{22}\mu_k^{-1} - c_{26}$, $k \in \{1, 2\}$.

2. Задача Дирихле. Количество постановок краевых задач термоупругости, допускающих приведение к регулярным интегральным уравнениям, довольно велико. Рассмотрим одну из них, которую будем называть задачей Дирихле: будем предполагать, что на границе заданы вектор перемещений и температура. Пусть Q_i — односвязная ограниченная область на плоскости со спрямляемой жордановой границей ∂Q длины M класса $C^{1,\alpha}(0, M)$; s — длина дуги, отсчитываемая от фиксированной точки границы. В дальнейшем утверждение $\partial Q \in C^{l,\alpha}(\partial Q)$ означает, что функции $x_1(s), x_2(s) \in C^{l,\alpha}(0, M)$. Под $C^{l,\alpha}(\Omega)$ в области или на отрезке Ω понимается, как обычно, банахово пространство функций, имеющих l непрерывных производных в области Ω ,

причём производная порядка l удовлетворяет условию Гельдера с показателем α , $0 < \alpha < 1$. Через Q_e обозначим область, внешнюю по отношению к Q_i .

Для определения перемещений необходимо сначала решить задачу Дирихле для уравнения теплопроводности. Положим $t_k(s) = x_1(s) + \mu_k(s)$, $t_{k0} = x_1(s_0) + \mu_k(s_0)$, $k \in \{1, 2, 3\}$. Будем искать решение уравнения (3) в таком виде: $u(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \varphi_3(x_1 + \mu_3 x_2)$. Здесь $\mu_3 = \gamma + i\beta$ ($\beta > 0$) определяется из уравнения $b_{11} + 2b_{12}\mu + b_{22}\mu^2 = 0$ и отлично от нуля, так как $b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0$ ввиду эллиптичности уравнения (3).

Рассмотрим задачу Дирихле D_i :

$$u_3(x_1, x_2)|_{\partial Q} = g_3(s_0), \quad g_3(s_0) \in C^{0,\alpha}(\partial Q). \quad (5)$$

Представим $u_3(x_1, x_2)$ в виде действительной части интеграла типа Коши с вещественной плотностью $f_3(s)$:

$$u_3(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f(s) dt_3}{t_3 - z_3}.$$

Здесь и в дальнейшем $dt_j = (x'_1(s) + \mu_j x'_2(s)) ds$, $j \in \{1, 2, 3\}$. В силу формулы Сохоцкого, когда точка $z \in Q$ стремится к точке $t_0 = x_1(s_0) + ix_2(s_0) \in \partial Q$ ($s_0 \in (\partial Q)$) изнутри области, имеем

$$\lim_{z \rightarrow t_0} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{g_j dt_j}{t_j - z_j} = g_j(s_0) + \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{g_j dt_j}{t_j - t_{j0}}.$$

Напомним, что формула Сохоцкого применима, если $g_j(s) \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$. Тогда получим на границе интегральное уравнение для определения неизвестной плотности $f_3(s)$:

$$f_3(s_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f_3(s) dt_3}{t_3 - t_{30}} = g_3(s_0), \quad g_3(s_0) \in C^{0,\alpha}(\partial Q). \quad (6)$$

То, что (7) является уравнением Фредгольма второго рода, следует из следующего рассуждения. Достаточно доказать, что ядро интегрального оператора в (7) имеет слабую особенность. Действительно, при помощи замены независимой переменной $x = x_1 + \gamma x_2$, $y = \beta x_2$, $\mu = \gamma + i\beta$ ($\beta > 0$) получим, что

$$\operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f(s) dt_3}{t_3 - z_3} = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f_3(s) dt}{t - z},$$

где $t = x(s) + iy(s)$, $z = x + iy$. Правая часть в этом соотношении, очевидно, совпадает с потенциалом двойного слоя для уравнения Лапласа. Действительно, при замене $\xi_1 = x_1 + \gamma x_2$, $\xi_2 = \beta x_2$ уравнение (3) обращается в уравнение Лапласа. Как показано в [1], его ядро имеет слабую особенность, если граница имеет нормальный вектор, удовлетворяющий условию Гельдера, т. е. если функции $x(s)$, $y(s)$, задающие форму границы, подчинены условию

$$|x'_k(s) - x'_k(s_0)| \leq c|s - s_0|^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad k \in \{1, 2\}.$$

Напомним, что, как хорошо известно [1], конечным числом итераций ядро со слабой особенностью можно превратить в непрерывное, и поэтому к уравнению (7) можно применить теорию Фредгольма.

3. Интегральные уравнения. Рассмотрим следующую краевую задачу: определить поле перемещений и температуру по их значениям на границе:

$$\begin{aligned} u_k(x_1, x_2)|_{\partial Q} &= g_k(s), \quad g_k(s) \in C^{0,\alpha}(\partial Q), \quad k \in \{1, 2\}, \\ u_3(x_1, x_2)|_{\partial Q} &= g_3(s), \quad g_3(s) \in C^{1,\alpha}(\partial Q). \end{aligned}$$

Назовём её для краткости задачей Дирихле для системы уравнений термоупругости. Тогда функции $\varphi_1(z_1)$, $\varphi_2(z_2)$ определяются из граничных условий

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{b_{11}\varphi_1(z_1) + b_{12}\varphi_2(z_2)\} &= g_1(s_0) - n_1\varphi'_3(t_3(s_0)), \\ \operatorname{Re} \{b_{21}\varphi_1(z_1) + b_{22}\varphi_2(z_2)\} &= g_2(s_0) - n_2\varphi'_3(t_3(s_0)), \\ \operatorname{Re} \varphi_3(z_3) &= g_3(s_0), \quad g_3(s) \in C^{1,\alpha}(\partial Q). \end{aligned}$$

Положим $\chi_k(s) = g_k(s) - n_k\varphi'_3(t_3(s))$, $k \in \{1, 2\}$. Тогда функции $\chi_k(s) \in C^{0,\alpha}(\partial Q)$. Функция $f_3(s)$ — плотность интеграла типа Коши для определения температуры — определяется из уравнения (7). При этом поле перемещений должно иметь первые производные всюду в области Q , интегрируемые с квадратом в замкнутой области $\bar{Q}$, так как иначе краевая задача не будет иметь единственного решения. Будем искать аналитические функции $\varphi_k(z_k)$ в виде интегралов типа Коши:

$$\varphi_k(z_k) = \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{\omega_k(s) dt_k}{t_k - z_k}, \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

Здесь $t_k = x_1(s) + \mu_k x_2(s)$, $k \in \{1, 2\}$. Пусть $f_1(s)$, $f_2(s)$ — некоторые вещественные функции. Решим систему уравнений

$$b_{11}\omega_1 + b_{12}\omega_2 = f_1(s), \quad b_{21}\omega_1 + b_{22}\omega_2 = f_2(s) \quad (7)$$

методом Крамера и подставим её решение в (6). Тогда перемещения будут записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{b_{11}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} \frac{(b_{22}f_1(s) - b_{12}f_2(s)) dt_1}{t_1 - z_1} + \right. \\ \left. + \frac{b_{12}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} \frac{(-b_{21}f_1(s) + b_{11}f_2(s)) dt_2}{t_2 - z_2} \right\}, \end{aligned}$$

$$u_2(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \left\{ \frac{b_{21}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} \frac{(b_{22}f_1(s) - b_{12}f_2(s)) dt_1}{t_1 - z_1} + \right.$$

$$+ \frac{b_{22}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} \frac{(-b_{21}f_1(s) + b_{11}f_2(s)) dt_2}{t_2 - z_2} \Big\}.$$

Здесь $\delta = b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21}$ — определитель системы (8). Нетрудно видеть, что он пропорционален разности $\mu_1 - \mu_2$ и поэтому можно записать, что $\delta = \xi \cdot (\mu_1 - \mu_2)$. При этом ξ зависит от симметрических функций, от корней характеристического уравнения, и, как следствие, от коэффициентов обобщённого закона Гука. В дальнейшем предполагается, что $\xi \neq 0$. В краевых задачах теории упругости он всегда отличен от нуля ввиду положительной определённости удельной потенциальной энергии деформации. Например, для ортотропного материала ($c_{16} = 0, c_{26} = 0$) составляет величину

$$\xi = (\gamma_1 \gamma_2)^{-1} \left\{ (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) \sqrt{\frac{c_{22}}{c_{11}}} + c_{22}c_{66} \right\}$$

и положителен, так как $c_{11}c_{22} - c_{12}^2 > 0, c_{11} > 0, c_{22} > 0, c_{66} > 0$. При этом для изотропного материала $\xi = (1 + \nu)(3 - \nu)E^{-2}$, где ν — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Нетрудно видеть, что перемещения можно представить и так:

$$u_1(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f_1(s) dt_1}{t_1 - z_1} + \\ + \operatorname{Re} \frac{b_{12}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} (-b_{21}f_1(s) + b_{11}f_2(s)) \left(\frac{dt_2}{t_2 - z_2} - \frac{dt_1}{t_1 - z_1} \right),$$

$$u_2(x_1, x_2) = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f_2(s) dt_2}{t_2 - z_2} + \\ + \operatorname{Re} \frac{b_{21}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} (b_{22}f_1(s) - b_{12}f_2(s)) \left(\frac{dt_1}{t_1 - z_1} - \frac{dt_2}{t_2 - z_2} \right).$$

Применяя формулу Сохоцкого, получим систему интегральных уравнений на границе

$$f_1(s_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f_1(s) dt_1}{t_1 - t_{10}} + \\ + \operatorname{Re} \frac{b_{12}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} (-b_{21}f_1(s) + b_{11}f_2(s)) \left(\frac{dt_2}{t_2 - t_{20}} - \frac{dt_1}{t_1 - t_{10}} \right) = \chi_1(s_0),$$

$$f_2(s_0) + \operatorname{Re} \frac{1}{\pi i} \int_{\partial Q} \frac{f_2(s) dt_2}{t_2 - t_{20}} +$$

$$+ \operatorname{Re} \frac{b_{21}}{\pi i \delta} \int_{\partial Q} (b_{22} f_1(s) - b_{12} f_2(s)) \left(\frac{dt_1}{t_1 - t_{10}} - \frac{dt_2}{t_2 - t_{20}} \right) = \chi_2(s_0).$$

Доказательство регулярности этой системы уравнений аналогично данному в работе [2] и потому здесь не приводится.

4. Гладкость решения. Решение задачи Дирихле имеет весьма ограниченную гладкость. Действительно, если граничные данные принадлежат только классу $C^{0,\alpha}(\partial Q)$, то функции

$$|\varphi'_k(z_k)| \leq C |\delta(\partial Q)|^{\alpha-1}, \quad k \in \{1, 2, 3\}, \quad (8)$$

где $\delta(\partial Q)$ — расстояние до границы области [4, стр. 69]. Эта оценка, в частности, показывает, что производные от перемещений интегрируемы с квадратом, только если $\alpha > 1/2$. Поэтому решение задачи Дирихле будет единственным, только если $\alpha > 1/2$. Справедливость предыдущей оценки легко проверить для решения краевой задачи в полуплоскости. Пусть $\varphi(z_3)$, например, — решение задачи теплопроводности в полуплоскости $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2); x_2 > 0\}$. Тогда $\varphi_3(z_3)$ представима интегралом типа Коши:

$$\varphi_3(z_3) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(t) dt}{t - z_3},$$

где $\mu(t) \in C^{0,\alpha}$ на любом подынтервале вещественной оси. Положим для сокращения записи $z = z_3$, $z = x + iy$, т. е. $\mu = i$ (это не влияет на существование оценки). Тогда

$$y\varphi'(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y\mu(t)}{(t - z)^2} dt.$$

При учёте неравенств $|z - x| = y \leq |t - z|$, $|t - x| \leq |t - z|$, справедливых при любом вещественном t , получим следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} |y\varphi'(z)| &\leq A \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y dt}{|t - z|^{2-\alpha}} \leq Ay^{1+\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{y}{t - z} \right|^{-1-\alpha} \frac{dt}{|t - z|^2} \leq \\ &\leq Ay^{1+\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{|t - z|^2} = \pi Ay^\alpha, \quad A > 0. \end{aligned}$$

Аналогичное рассуждение применялось в статье [5]. При этом, как отмечалось в [2], для интегрируемости напряжений с квадратом необходимо предполагать, что показатель Гельдера $\alpha > 1/2$. Для непрерывности напряжений на границе следует предполагать принадлежность граничных данных классам $g_k(s) \in C^{1,\alpha}(\partial Q)$, $k \in \{1, 2\}$, $g_3(s) \in C^{2,\alpha}(\partial Q)$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Zhao Yu-Qui On the Plane Orthotropic Stress Problem of Quasi-Static Thermoelasticity // *J. Elasticity*, 1997. — Vol. 46, No. 3. — P. 199–216.
2. Боган Ю. А. Регулярные интегральные уравнения для второй краевой задачи в анизотропной теории упругости // *Изв. РАН. МТТ*, 2005. — № 4. — С. 17–26.
3. Прусов И. А. Термоупругие анизотропные пластинки. — Минск: БГУ, 1978. — 200 с.

4. Мухомелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. — М.: Наука, 1968. — 511 с.
5. Бикчантаев И. А. Краевая задача для однородного эллиптического уравнения с постоянными коэффициентами // *Изв. вузов. Матем.*, 1975. — № 6. — С. 3–13.

Поступила в редакцию 18/VIII/2010;
в окончательном варианте — 22/IX/2010.

MSC: 74B05, 74E10

THE DIRICHLET PROBLEM IN THE 2D STATIONARY ANISOTROPIC THERMOELASTICITY

Yu. A. Bogan

M. A. Lavrentyev Institute of Hydrodynamics, Siberian Branch of RAS,
15, Lavrentyeva pr., Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: bogan@hydro.nsc.ru

In this article the Dirichlet problem for an anisotropic thermoelastic media is studied. It means, by definition, that a displacement vector and a stationary temperature are assigned at a boundary. This boundary value problem is reduced to a system of integral equations. Kernels of integral operators, entering into this system, are weakly regular in a bounded region with a Lyapunov boundary and Hölder continuous boundary data. This boundary value problem keeps up the property of Fredholm solvability if a region and boundary data have weaker properties of smoothness.

Key words: *integral equations, anisotropy, elasticity.*

Original article submitted 18/VIII/2010;
revision submitted 22/IX/2010.

Yurii A. Bogan, Dr. Sci. (Phys. & Math.), Leading Research Scientist, Dept. of Deformable Solid Body.