Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Н. Хрисанов, Интегральный метод аппроксимации экспериментальных данных экспоненциальными функциями, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2001, выпуск 12, 195–199

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu84>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 13:33:13

ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД АППРОКСИМАЦИИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Описывается метод аппроксимации экспериментальных данных в виде линейной комбинации экспоненциальных функций по интегральным характеристикам от исследуемого процесса, позволяющий повысить точность определения параметров экспоненциальной модели в условиях помех.

Для аппроксимации выборочных данных, полученных, например, при исследовании переходных процессов, часто используют линейную комбинацию экспоненциальных функций (экспонент):

$$h(t) \approx \sum_{i=1}^n A_i \exp(-I_i t), \quad (1)$$

где A_i - вещественные числа; I_i - могут быть как вещественными (апериодический процесс), так и комплексными (колебательный процесс).

Применение метода наименьших квадратов определения параметров экспоненциальной модели (A_i и I_i) в данном случае приводит к очень сложной нелинейной задаче оптимизации. Свести задачу к решению линейных уравнений позволяет метод Прони [1]. Однако исходный метод Прони очень чувствителен к ошибкам в экспериментальных данных и не позволяет использовать избыточные экспериментальные данные для повышения точности. Использовать избыточные данные позволяет так называемый *обобщенный метод Прони*, в котором на первом и третьем этапах применяется метод наименьших квадратов. Однако эксперименты показали, что зависимость от погрешностей в экспериментальных данных остается высокой. В данной работе предлагается определять параметры экспоненциальной модели по интегральным характеристикам переходных процессов.

Как известно [2], функция (1) обладает тем свойством, что существует линейная зависимость между ее $(n+1)$ равноотстоящими ординатами

$$\sum_{i=0}^n c_i h(t + iT) = 0, \quad (2)$$

где c_i - постоянные числа; T - интервал между отсчетами.

Показатели I_i могут быть получены подстановкой (1) в (2) и решением алгебраического уравнения

$$c_0 + \sum_{i=1}^n c_i x^i = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) имеет n корней x_i , $i = \overline{1, n}$. Показатели I_i определяются по формуле

$$I_i = -\frac{\ln x_i}{T}. \quad (4)$$

Найдем определенные интегралы от (1) на следующих участках: $[t_0, \infty]$, $[t_0 + T, \infty]$, $[t_0 + 2T, \infty]$, ..., $[t_0 + nT, \infty]$, где t_0 - момент времени, соответствующий первому отсчету; T - фиксированный интервал времени. Отметим, что $\exp(-It) = 0$ при $t = \infty$. Для i -того участка интеграл H_i будет равен

$$H_i = -\sum_{i=1}^{n+1} \frac{A_i}{I_i} \exp\{-I_i[t_0 + (i-1)T]\}. \quad (5)$$

Составим уравнение, связывающее линейной зависимостью H_i :

$$\sum_{i=0}^n c_i H_{i+1} = 0. \quad (6)$$

Подставив (5) в (6), получим:

$$\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{I_i} \exp(-I_i t_0) [c_0 + \sum_{k=1}^n c_k \exp(-I_i kT)] = 0.$$

После подстановки $x_i = \exp(-I_i T)$, получим :

$$\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{I_i} \exp(-I_i t_0) [c_0 + \sum_{k=1}^n c_j x_i^k] = 0. \quad (7)$$

Выражение в левой части (7) равно нулю при выполнении $c_0 + \sum_{k=1}^n c_j x_i^k$, что аналогично уравнению (3). Таким образом, показатели могут быть определены по значениям интегралов (5) от экспериментальной зависимости, путем решения алгебраического уравнения (3) и подстановкой его корней в (4). Заметим, что значение t_0 не входит в формулы для определения показателей, Это важно в случае, когда трудно определить момент времени, соответствующий первому отсчету.

Поскольку число неизвестных в (1) равно $2n$, то, для определения коэффициентов c_i необходимо решить следующую систему линейных уравнений (коэффициент c_n нормируется к единице):

$$\begin{cases} c_0 H_1 + c_1 H_2 & \dots + c_{n-1} H_n & + H_{n+1} = 0, \\ c_0 H_2 + c_1 H_3 & \dots + c_{n-1} H_{n+1} & + H_{n+2} = 0, \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_0 H_n + c_1 H_{n+1} & \dots + c_{n-1} H_{2n-1} & + H_{2n} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Амплитуды A_i могут быть определены из n значений $H_1, H_2, \dots, H_n$ определенных интегралов от $h(t)$, полученных интегрированием экспериментальной зависимости, например, на интервалах $[t_0, \infty]$, $[t_0 + 2T, \infty]$, $[t_0 + 4T, \infty]$, $\dots$, $[t_0 + (n-1)T, \infty]$ и решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} A'_1 & + A'_2 & \dots + A'_n & = H_1, \\ A'_1 p_1 & + A'_2 p_2 & \dots + A'_n p_n & = H_2, \\ & \cdot & \cdot & \cdot \\ A'_1 p_1^{n-1} & + A'_2 p_2^{n-1} & \dots + A'_n p_n^{n-1} & = H_n, \end{cases} \quad (9)$$

где $A'_i = A_i \exp(-I_i t_0) / I_i$, $p_i = \exp(-I_i T)$, $i = \overline{1, n}$. Определив из (9) n значений A'_i , получаем окончательно

$$A_i = A'_i I_i.$$

Как было указано выше, определение вещественных показателей экспонент производится в соответствии с (4). В том случае, когда уравнение (3) имеет комплексно-сопряженные корни $x_{k,k+1} = x \pm jy$, показатели экспонент (которые в этом случае также будут комплексно-сопряженными) определяются следующим образом:

$$I_{k,k+1} = -\frac{1}{T} [\ln z \pm j(q + 2pv)], \quad (10)$$

где $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $q = \arctg(y/x)$, v - целое число и нуль.

При подстановке в аппроксимирующую функцию (1) пары сопряженных показателей, соответствующие им слагаемые можно заменить выражениями:

$$A_k \exp(ct) \cos(dt) \text{ и } A_{k+1} \exp(ct) \sin(dt),$$

где $c = \ln z / T$, $d = q / T$.

Взяв определенные интегралы от этих выражений в соответствующих пределах, получим формулы для соответствующих коэффициентов системы линейных уравнений (9):

$$\begin{aligned} a_{k,i} &= p_{k0} p_k^{i-1} [-c \cos(t^*) + d \sin(t^*)], \\ a_{k+1,i} &= p_{k0} p_k^{i-1} [d \cos(t^*) - c \sin(t^*)], \end{aligned} \quad (11)$$

где $p_{k0} = \frac{\exp(ct_0)}{c^2 + d^2}$, $p_k = \exp(2cT)$, $t^* = d[t_0 + 2T(i-1)]$.

Произведем оценку погрешности определения A_i и I_i с помощью описанного выше метода. Пусть дан набор экспериментальных данных, измеренных в моменты времени $t_i = t_0 + i\Delta t$,

$i = 0, 1, \dots$ с систематической погрешностью Δ , а средне-квадратичное отклонение (с.к.о.) случайной погрешности равно S .

Предельные погрешности g_{I_i} и g_{A_i} определения I_i и A_i могут быть вычислены по формуле:

$$g_{A_i} = \bar{\Delta}_{A_i} + t_d \bar{S}_{A_i}, \quad g_{I_i} = \bar{\Delta}_{I_i} + t_d \bar{S}_{I_i}, \quad (12)$$

где $\bar{\Delta}_{A_i}$, $\bar{\Delta}_{I_i}$ - систематическая погрешность определения A_i и I_i ; $\bar{S}_{A_i}$, $\bar{S}_{I_i}$ - с.к.о. случайной погрешности определения A_i и I_i ; t_d - доверительный коэффициент [3].

Поскольку искомые параметры являются функциями от H_j , $j = \overline{1, 2n}$, воспользуемся формулами для погрешности косвенных измерений [3]:

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}_{A_i} &= \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial A_i}{\partial H_j} \Delta_j, \quad \bar{S}_{A_i}^2 = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial A_i}{\partial H_j} \right)^2 S_j^2 + 2 \sum_{k < j} \frac{\partial A_i}{\partial H_k} \frac{\partial A_i}{\partial H_j} K_{kj}, \\ \bar{\Delta}_{I_i} &= \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial I_i}{\partial H_j} \Delta_j, \quad \bar{S}_{I_i}^2 = \sum_{j=1}^{2n} \left(\frac{\partial I_i}{\partial H_j} \right)^2 S_j^2 + 2 \sum_{k < j} \frac{\partial I_i}{\partial H_k} \frac{\partial I_i}{\partial H_j} K_{kj}, \end{aligned} \quad (13)$$

где Δ_j - систематическая погрешность определения интеграла H_j ; S_j - с.к.о. случайной погрешности определения интеграла H_j ; K_{kj} - корреляционный момент величин H_k и H_j .

Систематическая погрешность Δ_j может быть вычислена по формуле:

$$\Delta_j = \Delta [T_{\text{пр}} - (j-1)T],$$

где $T_{\text{пр}}$ - длительность исследуемого процесса.

С.к.о. S_j случайной погрешности определения H_j при использовании методов дискретного интегрирования (например, метода трапеций) и при условии, что корреляционная функция погрешности спадает до нуля за время интервала дискретизации, равно [4]:

$$S_j = \sqrt{n_j \Delta t} S,$$

где n_j - количество отсчетов, взятых при вычислении H_j ; Δt - интервал дискретизации.

В качестве примера, оценим погрешность вычисления параметров аппроксимирующей функции, состоящей из двух экспонент:

$$h(t) \approx A_1 \exp(-I_1 t) + A_2 \exp(-I_2 t).$$

Поскольку число неизвестных равно четырем, необходимо произвести интегрирование на четырех участках:

$$H_1 = \int_0^\infty h(t) dt, \quad H_2 = \int_T^\infty h(t) dt, \quad H_3 = \int_{2T}^\infty h(t) dt, \quad H_4 = \int_{3T}^\infty h(t) dt.$$

Система уравнений (8) примет вид:

$$\begin{cases} c_0 H_1 + c_1 H_2 + H_3 = 0, \\ c_0 H_2 + c_1 H_3 + H_4 = 0. \end{cases}$$

Откуда имеем

$$c_0 = \frac{H_2 H_4 - H_3^2}{H_1 H_3 - H_2^2}, \quad c_1 = \frac{H_2 H_3 - H_1 H_4}{H_1 H_3 - H_2^2}.$$

Алгебраическое уравнение (3) примет вид:

$$c_0 + c_1 X + c_1 X^2 = 0,$$

корни которого равны:

$$x_{1,2} = -\frac{c_1}{2} \pm \sqrt{\frac{c_1^2}{4} - c_0},$$

откуда для действительных $x_{1,2}$ получаем:

$$I_{1,2} = -\frac{\ln x_{1,2}}{T}.$$

Система уравнений (9) в данном случае будет иметь вид:

$$\begin{cases} A'_1 + A'_2 = H_1, \\ A'_1 p_1 + A'_2 p_2 = H_3, \end{cases}$$

где $p_1 = \exp(-2I_1 T)$, $p_2 = \exp(-2I_2 T)$, $A'_1 = A_1/I_1$, $A'_2 = A_2/I_1$.

Решив эту систему уравнений относительно A'_1 и A'_2 , определим A_1 и A_2 :

$$A_1 = \frac{H_1 p_2 - H_3}{p_2 - p_1} I_1, \quad A_2 = \frac{H_3 - H_1 p_1}{p_2 - p_1} I_2.$$

Если $h(0) = 0$, то предыдущие выражения упрощаются и принимают вид

$$A_1 = -A_2 = A = \frac{H_1 I_1 I_2}{I_2 - I_1}.$$

Для вычисления погрешности определения I_1 , I_2 частные производные, входящие в (13), будут равны (для случая действительных корней):

$$\frac{\partial I_i}{\partial H_j} = \frac{\frac{\partial c_1}{2\partial H_j} - \frac{1}{2\sqrt{c_1^2/4 - c_0}} \left(\frac{\partial c_1}{2\partial H_j} - \frac{\partial c_0}{2\partial H_j} \right)}{x_i T},$$

$$\text{где } i=1,2, \quad j=\overline{1,4}, \quad \frac{\partial c_0}{\partial H_1} = -\frac{c_0 H_3}{H_1 H_3 - H_2^2}, \quad \frac{\partial c_0}{\partial H_2} = \frac{H_1 H_3 H_4 + H_2^2 H_4 - 2H_2 H_3^2}{(H_1 H_3 - H_2^2)^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_0}{\partial H_3} &= \frac{2H_2^2 H_3 - H_1 H_3^2 - H_1 H_2 H_4}{(H_1 H_3 - H_2^2)^2}, \quad \frac{\partial c_0}{\partial H_4} = \frac{H_2}{H_1 H_3 - H_2^2}, \quad \frac{\partial c_1}{\partial H_1} = \frac{c_0 H_2}{H_1 H_3 - H_2^2}, \\ \frac{\partial c_1}{\partial H_2} &= \frac{H_1 H_3^2 + H_2^2 H_3 - 2H_1 H_2 H_4}{(H_1 H_3 - H_2^2)^2}, \quad \frac{\partial c_1}{\partial H_3} = \frac{H_1^2 H_4 - H_2^3}{(H_1 H_3 - H_2^2)^2}, \quad \frac{\partial c_1}{\partial H_4} = -\frac{H_1}{H_1 H_3 - H_2^2}. \end{aligned}$$

Аналогично вычислим производные для A_1 и A_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_1}{\partial H_i} &= \frac{\left(x_2 - H_1 \frac{\partial x_2}{\partial H_i} \right) (x_2 - x_1) - (H_1 x_2 - H_3) \left(\frac{\partial x_2}{\partial H_i} - \frac{\partial x_1}{\partial H_i} \right)}{(x_2 - x_1)^2} I_2 - \frac{(H_1 x_2 - H_3)}{x_2 - x_1} \frac{\partial I_1}{\partial H_i}, \\ \frac{\partial A_2}{\partial H_i} &= \frac{\left(x_2 - H_1 \frac{\partial x_1}{\partial H_i} \right) (x_2 - x_1) - (H_3 - H_1 x_1) \left(\frac{\partial x_2}{\partial H_i} - \frac{\partial x_1}{\partial H_i} \right)}{(x_2 - x_1)^2} I_2 - \frac{(H_3 - H_1 x_2)}{x_2 - x_1} \frac{\partial I_2}{\partial H_i}, \end{aligned}$$

$$\text{где } i=1,3, \quad \frac{\partial x_{1,2}}{\partial H_i} = -\frac{1}{2} \frac{\partial c_1}{\partial H_i} \pm \frac{1}{2\sqrt{c_1^2/4 - c_0}} \left(\frac{c_1}{2} \frac{\partial c_1}{\partial H_i} - \frac{\partial c_0}{\partial H_i} \right).$$

Для случая $A_1 = -A_2 = A$, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial H_1} &= \frac{\left[I_1 I_2 + H_1 \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial H_1} + I_2 \frac{\partial I_1}{\partial H_1} \right) \right] (I_2 - I_1) - H_1 I_1 I_2 \left(\frac{\partial I_2}{\partial H_1} - \frac{\partial I_1}{\partial H_1} \right)}{(I_2 - I_1)^2}, \\ \frac{\partial A}{\partial H_i} &= \frac{H_1 \left[(I_2 - I_1) \left(I_1 \frac{\partial I_2}{\partial H_i} + I_1 \frac{\partial I_1}{\partial H_i} \right) - I_1 I_2 \left(\frac{\partial I_2}{\partial H_i} - \frac{\partial I_1}{\partial H_i} \right) \right]}{(I_2 - I_1)^2}, \quad i=2,4. \end{aligned}$$

Для случая, когда A_1 и A_2 имеют разные знаки (переходной процесс имеет ярко выраженный максимум в некоторый момент времени t_m), на рис.1 приведена зависимость погрешности определения показателей и амплитуды экспоненциальной модели в зависимости от интервала интегрирования, значения которого берутся относительно значения t_m при $\Delta = 0$, $S = 0,3\%$. Как следует из графика, в качестве интервала интегрирования T целесообразно выбирать значения, близкие к t_m .

Р и с. 1. Зависимость погрешности определения параметров в зависимости от выбранного интервала интегрирования:
1–погрешность определения амплитуды;
2–погрешность определения показателей

Р и с. 2. Зависимость погрешности определения параметров экспоненциальной модели в зависимости от с.к.о. случайной погрешности измерений:
сплошная линия – интегральный метод; пунктирная – метод Прони; 1 – погрешность определения амплитуды; 2– погрешность определения показателей

На рис.2 приведены зависимости предельной погрешности определения параметров экспоненциальной модели от с.к.о. случайной погрешности измерения, при использовании интегрального метода и модифицированного метода Прони, полученные на основе статистического моделирования для модели с двумя экспонентами. Из графиков следует, что в данном случае, интегральный метод позволяет повысить точность аппроксимации экспериментальных данных экспоненциальными функциями.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Марпл.-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.
2. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М.: ГИФМЛ, 1961. 524 с.
3. Новицкий П.В., Зograф И.А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л.: Энергоатомиздат, 1985. 248 с.
4. Ицкович Э.Л. Контроль производства с помощью вычислительных машин. М.: Энергия, 1975. 416 с.