Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Сайганова, Решение в явном виде нелокальной задачи для дифференциального уравнения с частной дробной производной Римана–Лиувилля, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 1(), 151–157

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu863>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:45:25

УДК 517.956.6

РЕШЕНИЕ В ЯВНОМ ВИДЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНОЙ
ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА—ЛИУВИЛЛЯ

С. А. Сайганова

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: syomina_sa@mail.ru

Для уравнения смешанного типа с частной дробной производной Римана—Лиувилля исследована нелокальная задача, краевое условие которой содержит обобщённый оператор дробного интегро-дифференцирования. Доказана однозначная разрешимость задачи.

Ключевые слова: краевая задача, дробные производные и интегралы, дифференциальное уравнение дробного порядка, функция Миттаг—Леффлера.

1. Постановка задачи. Рассматривается уравнение

$$\begin{cases} u_{xx} - D_{0+,y}^\alpha u = 0 & (y > 0, 0 < \alpha < 1), \\ xu_{xx} + yu_{yy} + pu_x + qu_y = 0 & (y < 0, \frac{1}{2} < p, q < 1, q \geq p), \end{cases} \quad (1)$$

где $D_{0+,y}^\alpha$ — частная дробная производная Римана—Лиувилля порядка α ($0 < \alpha < 1$) от функции $u(x, y)$ по второй переменной [1, с. 341]:

$$(D_{0+,y}^\alpha u)(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^y \frac{u(x, t)}{(y-t)^\alpha} dt \quad (0 < \alpha < 1, y > 0).$$

Результаты настоящей работы являются продолжением исследований, проведённых для уравнения (1) в [2]. Уравнение (1) рассматривается в области D , которая представляет собой объединение квадрата $D^+ = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$, единичного интервала $I = (0, 1)$ прямой $y = 0$ и области D^- , лежащей в нижней полуплоскости ($y < 0$) и ограниченной характеристиками $AC: x + y = 0$, $BC: \sqrt{x} + \sqrt{-y} = 1$ уравнения (1), отрезком $[0, 1]$ прямой $y = 0$, $A(0, 0)$, $B(1, 0)$.

В настоящей работе используется $(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x)$ — оператор обобщённого дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$, введённый в [3] (см. также [1, с. 326–327]) и имеющий при действительных α, β, η и $x > 0$ вид

$$(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} f)(x) = \begin{cases} \frac{x^{-\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-1} F\left(\alpha + \beta, -\eta; \alpha; 1 - \frac{t}{x}\right) f(t) dt & (\alpha > 0), \\ \left(\frac{d}{dx}\right)^n (I_{0+}^{\alpha+n, \beta-n, \eta-n} f)(x) & (\alpha \leq 0, n = [-\alpha] + 1), \end{cases}$$

Светлана Александровна Сайганова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

в частности $(I_{0+}^{0,0,\eta} f)(x) = f(x)$. Отметим, что если $\alpha > 0$, то справедливы следующие формулы:

$$(I_{0+}^{\alpha,-\alpha,\eta} f)(x) = (I_{0+}^{\alpha} f)(x), \quad (I_{0+}^{-\alpha,\alpha,\eta} f)(x) = (D_{0+}^{\alpha} f)(x), \quad (2)$$

где $(I_{0+}^{\alpha} f)(x)$ и $(D_{0+}^{\alpha} f)(x)$ — операторы дробного соответственно интегрирования и дифференцирования Римана—Лиувилля порядка $\alpha > 0$ [1, с. 42, 44]:

$$(I_{0+}^{\alpha} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \quad (\alpha > 0, x > 0), \quad (3)$$

$$(D_{0+}^{\alpha} f)(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1-n+\alpha}} dt \quad (\alpha > 0, n = [\alpha] + 1), \quad (4)$$

где $[\alpha]$ — целая часть α .

Для уравнения (1) ищется решение в области D , удовлетворяющее крайевым условиям

$$u(0, y) = \varphi_0(y), \quad u(1, y) = \varphi_1(y), \quad 0 < y < 1, \quad (5)$$

$$\left(I_{0+}^{\frac{1}{2}-q, \frac{1+q-p}{2}, \frac{p+q-1}{2}} t^{q-1} u[\theta_0(t)] \right)(x) = Ax^{\frac{p+q-3}{2}} u(x, 0) + Bx^{\frac{p+q-1}{2}+\varepsilon} \quad (6)$$

$$(0 < x < 1, \frac{1}{2} < p, q < 1, q \geq p, \varepsilon > 0),$$

а также условиям сопряжения

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} u(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y) \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (7)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u(x, y))_y = \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^q u_y(x, y) \quad (0 < x < 1). \quad (8)$$

Здесь $\theta_0(x) = x/4 - ix/4$ — точка пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точек $(x, 0)$ с характеристикой AC ; $\varphi_0(y)$, $\varphi_1(y)$ — заданные функции, такие, что $y^{1-\alpha}\varphi_0(y)$, $y^{1-\alpha}\varphi_1(y) \in C(0, 1)$; A и B — действительные константы, на которые ниже накладываются дополнительные условия.

Решение $u(x, y)$ поставленной задачи ищется в классе дважды дифференцируемых в области D функций таких, что

$$y^{1-\alpha} u(x, y) \in C(\overline{D}^+), \quad u(x, y) \in C(\overline{D}^-), \quad u_{xx} \in C(D^+ \cup D^-), \quad (9)$$

$$u_{yy} \in C(\overline{D}^-), \quad y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u)_y \in C(D^+ \cup \{(x, y): 0 < x < 1, y = 0\}).$$

2. Единственность решения задачи. Пусть решение исследуемой задачи существует. Введём обозначения:

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} u(x, y) = \tau_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0-} u(x, y) = \tau_2(x),$$

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} (y^{1-\alpha} u)_y = \nu_1(x), \quad \lim_{y \rightarrow 0-} (-y)^q u_y(x, y) = \nu_2(x).$$

Известно [4, с. 108], что решение уравнения (1) в области D^+ , удовлетворяющее условиям (5) и

$$\lim_{y \rightarrow 0+} y^{1-\alpha} u(x, y) = \tau_1(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

записывается в виде

$$u(x, y) = \int_0^y \varphi_0(\eta) G_\xi(x, y; 0, \eta) d\eta - \int_0^y \varphi_1(\eta) G_\xi(x, y; 1, \eta) d\eta + \Gamma(\alpha) \int_0^1 \tau_1(\xi) G(x, y, \xi, 0) d\xi; \quad (10)$$

где

$$G(x, y, \xi, \eta) = \frac{(y - \eta)^{\beta-1}}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x - \xi + 2n|}{(y - \eta)^\beta} \right) - e_{1,\beta}^{1,\beta} \left(-\frac{|x + \xi + 2n|}{(y - \eta)^\beta} \right) \right], \quad \beta = \frac{\alpha}{2},$$

$$e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + \alpha n) \Gamma(\delta - \beta n)}, \quad \alpha > \beta, \alpha > 0, z \in \mathbb{C};$$

$$e_{1,\delta}^{1,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma\left(\frac{(1-k)\alpha}{2}\right)}.$$

Также известно (см., например, [5, 6]), что функциональное соотношение между $\tau_1(x)$ и $\nu_1(x)$, принесённое из параболической области D^+ на линию $y = 0$, имеет вид

$$\nu_1(x) = \frac{1}{\Gamma(1 + \alpha)} \tau_1''(x). \quad (11)$$

Используя результаты работы [7], нетрудно найти функциональное соотношение между $\tau_2(x)$ и $\nu_2(x)$, принесённое из гиперболической области D^- на линию $y = 0$. Оно имеет вид

$$k_2 \left(I_{0+}^{2-2q, q-p, q-1} \nu_2(t) \right) (x) = x^{p-1} (A - k_1) \tau_2(x) + B x^{p+\varepsilon}, \quad (12)$$

где

$$k_1 = \frac{2^{p-q} \Gamma(2q - 1)}{\Gamma(q - \frac{1}{2})}, \quad k_2 = -\frac{2^{p+3q-1} \Gamma(2 - 2q)}{\Gamma(\frac{3}{2} - q)}.$$

Применив к обеим частям (12) оператор $\left(I_{0+}^{2-2q, q-p, q-1} \right)^{-1} = I_{0+}^{2q-2, p-q, 1-q}$, получим

$$k_2 \nu_2(x) = (A - k_1) \left(I_{0+}^{2q-2, p-q, 1-q} t^{p-1} \tau_2(t) \right) (x) + B \left(I_{0+}^{2q-2, p-q, 1-q} t^{p+\varepsilon} \right) (x).$$

Справедливы следующие утверждения.

ЛЕММА 1. Если функция $\tau_1(x)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на отрезке $[0, 1]$ в точке $x = x_0$ ($0 < x_0 < 1$), то $\nu_1(x_0) \leq 0$ ($\nu_1(x_0) \geq 0$).

Доказательство леммы 1 непосредственно следует из соотношения (11).

ЛЕММА 2. Если функция $\tau_2(x)$ достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на отрезке $[0, 1]$ в точке $x = x_0$ ($0 < x_0 < 1$), $B = 0$, $A - k_1 < 0$, то $\nu_2(x_0) > 0$ ($\nu_2(x_0) < 0$).

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 из [2].

ТЕОРЕМА 1. Пусть $A - k_1 < 0$ и $B = 0$. Если существует решение исследуемой задачи для уравнения (1), то оно единственно.

Доказательство. Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи, но $u(x, y) \not\equiv 0$ в области $\tilde{D} = D^+ \cup \overline{AB} \cup \overline{AA_1} \cup \overline{A_2B}$, где $A_1(0, 1)$, $A_2(1, 1)$. Пусть $Q \in \tilde{D}$ — точка положительного максимума. В силу однородных условий Q не может принадлежать $\overline{AA_1} \cup \overline{A_2B}$. На основании принципа экстремума для нелокального параболического уравнения [8, с. 47] Q не может принадлежать $D^+ \cup \overline{A_1A_2}$ и поэтому $Q \in I = AB$, т. е. $Q(x_0, 0)$. По лемме 1 $\nu_1(x_0) \leq 0$, $x_0 \in I$. Так как $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$, то $\max_I \tau(x) = \tau(x_0)$. По лемме 2 $\nu_2(x_0) > 0$, что противоречит условию (8). Следовательно, $u(x, y) \equiv 0$ и, в частности, $\tau_1(x_0) = 0$ на I . Но тогда на основании равенства $\tau_1(x) = \tau_2(x)$ из (12) следует, что $\nu_2(x) = 0$. Откуда получаем, что $u(x, y) \equiv 0$ и в области $\overline{D^-}$. Теорема 1 доказана. $\square$

3. Существование решения задачи. Существование решения исходной задачи приведём для случая $p = q$ и сведём её к дифференциальному уравнению дробного порядка. Из равенства (12) имеем

$$\tau_2(x) = m_1 x^{1-p} \left(I_{0+}^{2-2q, q-p, q-1} \nu_2(t) \right) (x) + m_2 x^{1+\varepsilon}, \quad (13)$$

где $m_1 = k_2/(A - k_1)$, $m_2 = B/(k_1 - A)$, $A < k_1$. Последовательно применяя формулы [3]

$$\begin{aligned} x^{\alpha+\beta+\eta} \left(I_{0+}^{\alpha, \beta, \eta} \varphi(t) \right) (x) &= \left(I_{0+}^{\alpha, -\alpha-\eta, -\alpha-\beta} \varphi(t) \right) (x), \quad \alpha > 0, \quad \beta, \eta \in \mathbb{R}, \\ \left(I_{0+}^{\alpha, \delta, \gamma} \varphi(t) \right) (x) &= \left(I_{0+}^{\alpha, \gamma, \delta} t^{\gamma-\delta} \varphi(t) \right) (x), \quad \alpha > 0, \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

приведём равенство (13) к виду

$$\tau_2(x) = m_1 \left(I_{0+}^{2-2q, p+q-2, q-1} t^{p-1} \nu_2(t) \right) (x) + m_2 x^{1+\varepsilon}. \quad (14)$$

Полагая в соотношении (14) $p = q$, дважды дифференцируя обе части этого равенства по переменной x и учитывая (2) и (4), имеем

$$\tau_2''(x) = m_1 \left(D_{0+}^{2q} t^{q-1} \nu_2(t) \right) (x) + m_2 (1 + \varepsilon) \varepsilon x^{\varepsilon-1}.$$

Согласно условиям сопряжения (7) и (8) $\tau_1(x) = \tau_2(x)$ при $0 \leq x \leq 1$, а $\nu_1(x) = \nu_2(x)$ при $0 < x < 1$. Обозначив $\tau_1(x) = \tau_2(x) = \tau(x)$, $\nu_1(x) = \nu_2(x) = \nu(x)$ и учитывая соотношение (11), приходим к дифференциальному уравнению дробного порядка $2q$ ($1 < 2q < 2$) вида

$$\left(D_{0+}^{2q} t^{q-1} \nu(t)\right)(x) = \lambda_1 \nu(x) + \lambda_2 x^{\varepsilon-1}, \quad (15)$$

где $\lambda_1 = \Gamma(1 + \alpha)/m_1$, $\lambda_2 = -m_2(1 + \varepsilon)\varepsilon/m_1$.

Известно (см., например, [9, с. 102]), что решение дифференциального уравнения дробного порядка $\alpha > 0$

$$\left(D_{0+}^{\alpha} [t^{\alpha(1-m)} \varphi(t)]\right)(x) = a\varphi(x) + bx^{\mu}, \quad (16)$$

где $\alpha > 0$, $m > 0$, $\mu > -1$, $0 < x < d < \infty$, даётся формулой

$$\varphi(x) = \frac{b\Gamma(1 + \mu)}{\Gamma(1 + \mu + \alpha)} x^{\alpha m + \mu} E_{\alpha, m, \frac{m+\mu}{\alpha}}(ax^{\alpha}). \quad (17)$$

Здесь $E_{\alpha, m, l}(z)$ — специальная функция типа Миттаг—Леффлера:

$$E_{\alpha, m, l}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n, \quad c_0 = 1, \quad c_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\Gamma[\alpha(im + l) + 1]}{\Gamma[\alpha(im + l + 1) + 1]},$$

$$(n = 1, 2, \dots) \text{ с } \alpha > 0, \quad m > 0, \quad l \in \mathbb{R},$$

$$\alpha(jm + l) \neq 0, -1, -2, \dots \quad (j = 0, 1, 2, \dots),$$

введённая в работе [10], при $m = 1$ с точностью до множителя совпадает с функцией Миттаг—Леффлера (см. [1, с. 33], [11, с. 17]):

$$E_{\alpha, 1, l}(z) = \Gamma(\alpha l + 1) E_{\alpha, \alpha l + 1}(z), \quad E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)} \quad (\alpha > 0, \beta > 0).$$

Уравнение (15) суть не что иное, как уравнение вида (16) с $\varphi(x) = \nu(x)$, $\alpha = 2q$, $m = 1/2 + 1/(2q)$, $a = \lambda_1$, $b = \lambda_2$, $\mu = \varepsilon - 1$, и поэтому решение вида (17) для уравнения (15) даётся формулой

$$\nu(x) = \frac{\lambda_2 \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon + 2q)} x^{\varepsilon+q} E_{2q, \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2} + \varepsilon\right)}(\lambda_1 x^{1+q}). \quad (18)$$

Подставляя (18) в (14) (с $\tau_2(x) = \tau(x)$, $\nu_2(x) = \nu(x)$, $p = q$), получаем выражение для $\tau(x)$:

$$\tau(x) = \frac{m_1 \lambda_2 \Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\varepsilon + 2q)} \left(I_{0+}^{2-2q} t^{2q+\varepsilon-1} E_{2q, \frac{1}{2} + \frac{1}{2q}, \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{2q} - \frac{1}{2} + \varepsilon\right)}(\lambda_1 t^{1+q}) \right)(x). \quad (19)$$

Подставляя (19) в формулу (10) (с $\tau_1(x) = \tau(x)$), получаем в явном виде решение $u(x, y)$ исследуемой задачи для уравнения (1).

Используя полученное решение, непосредственно проверяем выполнение краевых условий (5), (6) и условий сопряжения (7), (8), а также принадлежность полученного решения $u(x, y)$ поставленной задачи классу функций (9).

Таким образом доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Если $q = p$, $1/2 < q < 1$, $A < k_1$, то решение задачи (5), (8) для уравнения (1) существует и определяется формулой (10), где $\tau_1(x) = \tau(x)$ и задаётся соотношением (19).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integrals and derivatives of fractional order and some of their applications. Minsk: Nauka i Tekhnika. 688 pp.]
2. Kilbas A. A., Repin O. A. An analog of the Tricomi problem for a mixed type equation with a partional fractional derivative // *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2010. Vol. 13, no. 2. Pp. 69–84.
3. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric function // *Math. Rep. Kyushu Univ.*, 1978. Vol. 11, no. 2. Pp. 135–143.
4. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с. [Pskhu A. V. Partial differential equations of fractional order. Moskva: Nauka, 2005. 199 pp.]
5. Геккиева С. Х. Краевая задача для обобщенного уравнения переноса с дробной производной в полубесконечной области // *Изв. Кабар.-Балкар. научн. центра РАН*, 2002. № 1(8). С. 6–8. [Gekkieva S. Kh. A boundary value problem for the generalized transport equation with fractional derivative in the semi-infinite domains // *Izv. Kabar.-Balkar. nauchn. tsentra RAN*, 2002. no. 1(8). Pp. 6–8].
6. Килбас А. А., Репин О. А. Аналог задачи Бицадзе—Самарского для уравнения смешанного типа с дробной производной // *Дифференц. уравнения*, 2003. Т. 39, № 5. С. 638–644; англ. пер.: Kilbas A. A., Repin O. A. An Analog of the Bitsadze–Samarskii Problem for a Mixed Type Equation with a Fractional Derivative // *Differ. Equ.*, 2003. Vol. 39, no. 5. Pp. 674–680.
7. Репин О. А., Шувалова Т. В. Нелокальная краевая задача для уравнения смешанного типа с двумя линиями вырождения // *Дифференц. уравнения*, 2008. Т. 44, № 6. С. 848–851; англ. пер.: Repin O. A., Shuvalova T. V. Nonlocal boundary value problem for an equation of the mixed type with two degeneration lines // *Differ. Equ.*, 2008. Vol. 44, no. 6. Pp. 876–880.
8. Нахушева В. А. Дифференциальные уравнения математических моделей нелокальных процессов. М.: Наука, 2006. 173 с. [Nakhusheva V. A. Differential equations of mathematical models of nonlocal processes. Moskva: Nauka, 2006. 173 pp.]
9. Kilbas A. A., Saigo M. On Mittag–Leffler type function and applications // *Integral Transform. Spec. Funct.*, 1998. Vol. 7, no. 1–2. Pp. 97–112.
10. Kilbas A. A., Saigo M. On solution of integral equation of Abel–Volterra type // *Differ. Integral Equ.*, 1995. Vol. 8, no. 5. Pp. 993–1011.
11. Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с. [Djrbashian M. M. Integral transforms and representations of functions in the complex domain. Moskva: Nauka, 1966. 672 pp.]

Поступила в редакцию 20/XII/2010;
в окончательном варианте — 14/II/2011.

MSC: 35M10; 26A33, 33C05, 33E12

**SOLUTION IN EXPLICIT FORM OF NON-LOCAL PROBLEM FOR
DIFFERENTIAL EQUATION WITH PARTIAL FRACTIONAL
DERIVATIVE OF RIEMANN–LIOUVILLE**

S. A. Sayganova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.

E-mail: syomina_sa@mail.ru

A non-local problem for a mixed type equation with partial fractional derivative of Riemann–Liouville is studied, boundary condition of which contains generalized operator of fractional integro-differentiation. Unique solution of the problem is then proved.

Key words: *boundary value problem, fractional derivatives and integrals, fractional differential equation, Mittag–Leffler function.*

Original article submitted 20/XII/2010;
revision submitted 14/II/2011.

Svetlana A. Sayganova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.