Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Малышев, Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами и сложными функциями, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 5–9

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu88>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 15:41:12

Дифференциальные уравнения

УДК 517.925

Ю.В. Малышев

РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СЛОЖНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

В данной работе символический метод распространяется на уравнения с переменными коэффициентами и сложными функциями в правых частях. Полученные формулы позволяют расширить классы уравнений, интегрируемых в квадратурах, и упростить отыскание частных интегралов.

Решение линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами
Рассмотрим уравнение

$$L(D)y = f(u(t)), \quad (1)$$

где $L(D) \equiv \sum_{k=0}^n a_k(t) D^{n-k}$ – линейный оператор; $D^k = \frac{d^k}{(dt)^k}$ – оператор k – кратного дифференцирования. Все рассматриваемые функции предполагаются непрерывными или дифференцируемыми в некоторой области изменения независимой переменной t .

Имеют место формулы

$$D^k(e^u v) = e^u (D + \mathbf{i})^k v, \quad D^k(e^{-u} v) = e^{-u} (D - \mathbf{i})^k v \quad \left(\mathbf{i} = \frac{du}{dt} \right) \quad (2)$$

обобщающие при $u = at$, $a = \text{const}$ известные формулы [1–3]:

$$D^k(e^{at} v) = e^{at} (D + a)^k v, \quad D^k(e^{-at} v) = (D - a)^k v.$$

Предположим, что оператор $L(D)$ допускает факторизацию: $L(D) = \prod_{k=1}^n (D + \mathbf{i}_k)$. Применим формулы (2) к уравнению $L(D)y = f$: $e^{-u_1} D e^{u_1 - u_2} \mathbf{L} D e^{u_2} y = f$, откуда делением на e^{u_1} с последующим интегрированием получим общее решение уравнения (1) [4]:

$$y = e^{-u_n} \left\{ \int e^{u_n - u_{n-1}} \left[\int e^{u_{n-1} - u_{n-2}} \mathbf{L} \left(\int e^{u_1} f dt + C_1 \right) dt + C_2 \mathbf{L} \right] dt + C_n \right\}. \quad (3)$$

Если же решается нулевая задача Коши

$$\prod_{k=1}^n (D + \mathbf{i}_k) y = f; \quad D^k y|_{t=s} = 0, k = \overline{0, n-1},$$

то решение получается в виде [4]

$$\overline{y} = \int_0^t F(t-t) f(u(t)) dt, \quad (4)$$

где

$$F(t-t) = \int_t^t dt_{n-1} \int_{t_{n-1}}^t \mathbf{L} dt_2 \int_{t_2}^t e^{u_n(t) - u_n(t_{n-1})} e^{u_{n-1}(t_{n-1}) - u_{n-1}(t_{n-2})} \mathbf{L} e^{u_1(t_1) - u_1(t)} dt_1; \quad (5)$$

$F(t)$ – функция Коши [5].

Оператор $L(D) = D^2 + a_1 D + a_2$.

Рассмотрим уравнение второго порядка $(D^2 + a_1 D + a_2)y = f$. Интерес представляют следующие случаи факторизации оператора $L(D)$:

$$\begin{aligned}
1) \quad D(D - i) &\equiv D^2 - iD - \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right); \\
2) \quad (D - i)D &\equiv D^2 - iD; \\
3) \quad (D - i)^2 &\equiv D^2 - 2iD - i^2; \\
4) \quad (D - i)(D + i) &\equiv D^2 - (i + i)D - i^2; \\
5) \quad (D - i)(D + i) &\equiv D^2 + i^2; \\
6) \quad (D + i)(D - i) &\equiv D^2 - i^2; \\
7) \quad (D + i)(D - i) &\equiv D^2 + i^2 - i^2; \\
8) \quad \left(D - i - \frac{i}{t} \right) (D - i) &\equiv D^2 - \frac{i}{t} D + i^2,
\end{aligned} \tag{6}$$

где i – мнимая единица. В частности,

$$\begin{aligned}
9) \quad \left(D + \frac{1}{t+a} \right) \left(D - \frac{1}{t+a} \right) &\equiv D^2; \\
10) \quad \left(D - \frac{1}{t+a} \right) \left(D + \frac{1}{t+a} \right) &\equiv D^2 - \frac{2}{(t+a)^2}; \\
11) \quad (D - atgat)(D + atgat) &\equiv (D + actgat)(D - actgat) \equiv D^2 + a^2, a = \text{const}.
\end{aligned}$$

Для каждого из этих случаев соответствующие дифференциальные уравнения интегрируются в квадратурах.

Пример 1. $\left(D^2 - tgdD - \frac{1}{\cos^2 t} \right) y = 0$ или $D(D - tgd)y = 0$.

Положим $u = tgd, u = -\ln \cos t, e^u = \frac{1}{\cos t}$, $e^{-u} = \cos t$. По формуле (3) получим общее решение: $y = \frac{C_2 - C_1 \sin t}{\cos t}$.

Пример 2. $(t^2 D^2 - tD + 1)y = 0$ или $D\left(D - \frac{1}{t}\right)y = 0$.

Отсюда $e^u D e^{-u} y = C_1, e^{-u} y = C_1 \int e^{-u} dt + C_2, y = C_1 e^u \int e^{-u} dt + C_2 e^u$, $y = t(C_1 \ln t + C_2)$ – общее решение $\left(u = \frac{1}{t}, u = \ln t, e^u = t, e^{-u} = \frac{1}{t} \right)$

Частные решения линейных неоднородных уравнений

В символическом (и операционном) исчислении частное решение уравнения $L(D)y = f$ ищется в виде

$$\bar{y} = \frac{1}{L(D)} f. \tag{7}$$

Рассмотрим некоторые случаи задания функции $f(e^u, \sin u, \cos u, u = u(t))$ – произвольная функция).

а) Решим уравнение $(D - i)^2 y = e^u$. По формулам (2) с последующим интегрированием имеем: $e^u D^2 e^{-u} y = e^u$; $D^2 e^{-u} y = 1$; $e^{-u} y = \frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2$; $y = \left(\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2 \right) e^u$ – общее решение; $\bar{y} = \frac{t^2}{2} e^u$ – частное решение. Отсюда для нахождения частного решения получаем формулу

$$\frac{1}{(D - i)^2} = e^u \frac{1}{D^2} 1 = e^u \frac{t^2}{2}. \tag{8}$$

Частным случаем формулы (8) при $u = at$ ($a = \text{const}$) является известная формула (3):

$$\frac{1}{(D-a)^2} e^{at} = \frac{t^2}{2} e^{at}. \quad (8')$$

б) $(D - \mathfrak{A})y = e^u (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$ ($u(t); v(t)$ – произвольные функции). Тогда $e^v De^{-v} y = e^u (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$; $De^{-v} y = e^{u-v} (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$; $e^{-v} y = e^{u-v} + C$; $y = e^u + C_1 e^v$ – общее решение; $\bar{y} = e^u$ – частное решение. Отсюда

$$\frac{1}{D - \mathfrak{A}} e^u (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = e^u. \quad (9)$$

При $u = bt, v = at$ получаем известную формулу [3]:

$$\frac{1}{D - a} e^{bt} = \frac{e^{bt}}{b - a}. \quad (9')$$

в) $(D - \mathfrak{A})(D - \mathfrak{A})y = e^u (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}), e^u De^{v-u} De^{-v} y = e^u (\mathfrak{B} - \mathfrak{A})$; $De^{v-u} De^{-v} y = \mathfrak{B} - \mathfrak{A}, e^{v-u} De^{-v} y = \mathfrak{B} - \mathfrak{A} + C_1, De^{-v} y = e^{u-v} (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) + C_1 e^{u-v}$; $e^{-v} y = e^{u-v} + C_1 \int e^{u-v} dt + C_2, y = e^u + C_1 e^v \int e^{u-v} dt + C_2 e^v$ – общее решение; $\bar{y} = e^u$ – частное решение. Отсюда

$$\frac{1}{(D - \mathfrak{A})(D - \mathfrak{A})} e^u (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = e^u. \quad (10)$$

г) $(D - \mathfrak{A})(D - \mathfrak{A})y = e^v (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}), e^u De^{v-u} De^{-v} y = e^v (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}), De^{v-u} De^{-v} y = e^{v-u} (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}), e^{v-u} De^{-v} y = e^{v-u} + C_1, De^{-v} y = 1 + C_1 e^{u-v}$; $e^{-v} y = t + C_1 \int e^{u-v} dt + C_2$; $y = te^v + C_1 e^v \int e^{u-v} dt + C_2 e^v$ – общее решение; $\bar{y} = te^v$ – частное решение. Отсюда

$$\frac{1}{(D - \mathfrak{A})(D - \mathfrak{A})} e^v (\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = te^v. \quad (11)$$

Естественные обобщения:

$$\frac{1}{(D - \mathfrak{A})^m (D - \mathfrak{A})} e^u (e^{v-u})^{(p)} = \frac{t^m}{m!} e^v,$$

$$\frac{1}{(D - \mathfrak{A}_r) \mathbf{L} (D - \mathfrak{A}_r) (D - \mathfrak{A})} e^u \left(e^{v_1-u} \left(\mathbf{L} (e^{v_r-v_{r-1}}) \right)' \right)' = te^{v_r};$$

$$\frac{1}{(D - \mathfrak{A}_2) (D - \mathfrak{A}_1)} e^u [\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{A}_1^2 - (\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2) \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}_2] = e^u.$$

При $v_1 = a_1 t, v_2 = a_2 t, u = bt$ имеем

$$\frac{1}{(D - a_2) (D - a_1)} e^{bt} = \frac{e^{bt}}{(b - a_2) (b - a_1)},$$

что совпадает с известной формулой [3].

д) $(D^2 + \mathfrak{A}^2 - i\mathfrak{A})y = e^{iu} (i\mathfrak{A}).$

Ищем решение в виде $y = e^{iu} v$:

$$e^{iu} [(D + i\mathfrak{A})^2 + \mathfrak{A}^2 - i\mathfrak{A}] e^{-iu} y = e^{iu} (i\mathfrak{A}), (D + 2i\mathfrak{A}) De^{-iu} y = i\mathfrak{A}, e^{-2iu} De^{2iu} De^{-iu} y = i\mathfrak{A};$$

$$De^{2iu} De^{-iu} y = i\mathfrak{A} e^{2iu}, e^{2iu} De^{-iu} y = \frac{1}{2} e^{2iu} + C_1, De^{-iu} y = \frac{1}{2} + C_1 e^{-2iu},$$

$$e^{-iu} y = \frac{1}{2} t + C_1 \int e^{-2iu} dt + C_2,$$

$$y = \frac{1}{2} te^{iu} + C_1 e^{iu} \int e^{-2iu} dt + C_2 e^{iu} - \text{общее решение. Отсюда}$$

$$\frac{1}{(D - i\alpha)(D + i\alpha)} e^{iu} (i\alpha) = \frac{t}{2} e^{iu}. \quad (12)$$

Здесь использована факторизация 6) из формулы (6). Вещественная и мнимая части соответственно дадут при $u=at$:

$$\frac{1}{D^2 + a^2} \sin at = -\frac{t}{2} \cos at, \quad \frac{1}{D^2 + a^2} \cos at = \frac{t}{2} \sin at, \quad (12')$$

что совпадает с известными формулами [1–3].

е) Найдем частное решение уравнения

$$\begin{aligned} (D^2 + \alpha^2 - i\alpha D)y &= 3e^{2iu}(-3\alpha^2 + i\alpha D)e^{iu}(D + 2i\alpha)De^{-iu}\bar{y} = e^{-iu}(e^{3iu})'', \\ e^{-2iu}De^{2iu}De^{-iu}\bar{y} &= e^{-2iu}(e^{3iu})'', De^{2iu}De^{-iu}\bar{y} = (e^{3iu})'', \\ e^{2iu}De^{-iu}\bar{y} &= (e^{3iu})', De^{-iu}\bar{y} = 3(e^{iu})', e^{-iu}\bar{y} = 3e^{iu}, \bar{y} = 3e^{2iu}. \end{aligned}$$

Отсюда $\bar{y} = \frac{1}{D^2 + \alpha^2 - i\alpha D} [3e^{2iu}(-3\alpha^2 + i\alpha D)] = 3e^{2iu}$. Здесь в операторе $\frac{1}{D^2 + \alpha^2 - i\alpha D}$ заменяется D^2 на $(-4\alpha^2 + 2i\alpha D)$, так как $D^2 e^{2iu} = e^{2iu}(-4\alpha^2 + 2i\alpha D)$, что соответствует известному правилу для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами [3].

$$\text{ж) } (\alpha D^2 - \alpha D + \alpha^3)y = 0. \quad (13)$$

Покажем, что данное уравнение имеет своими частными решениями $\sin u$ и $\cos u$. Ищем решение в виде $y = \sin u \cdot v \equiv e^U v$; $e^U = \sin u$; $U = \ln \sin u$; $U' = ctgu \cdot \alpha$; $e^{-U} = \frac{1}{\sin u}$.

$$e^U [\alpha(D + ctgu \cdot \alpha)^2 - \alpha(D + ctgu \cdot \alpha) + \alpha^3] \frac{1}{\sin u} y = 0, \quad \left(D + 2ctgu \cdot \alpha - \frac{\alpha^2}{\sin u} \right) D \frac{1}{\sin u} y = 0.$$

$$\text{Обозначим } U_1' = 2ctgu \cdot \alpha - \frac{\alpha^2}{\sin u}; U_1 = 2 \ln \sin u - \ln \alpha = \ln \frac{\sin^2 u}{\alpha}; e^{U_1} = \frac{\sin^2 u}{\alpha}; e^{-U_1} = \frac{\alpha}{\sin u};$$

$$e^{-U_1} De^{U_1} D \frac{1}{\sin u} y = 0; e^{U_1} D \frac{1}{\sin u} y = C_1; D \frac{1}{\sin u} y = C_1 \frac{\alpha}{\sin^2 u}; \frac{1}{\sin u} y = -C_1 ctgu + C_2;$$

$y = -C_1 \cos u + C_2 \sin u$ – общее решение уравнения (13), а $\sin u$ и $\cos u$ – частные решения.

з) Найдем частное решение уравнения

$$(\alpha D^2 - \alpha D + \alpha^3)y = -3 \sin 2u \cdot \alpha^3.$$

Делая замены, как в случае ж), получим

$$\sin u e^{-U_1} De^{U_1} D \frac{1}{\sin u} y = -3 \sin 2u \cdot \alpha^3; \frac{\alpha}{\sin^2 u} D \frac{\sin^2 u}{\alpha} D \frac{1}{\sin u} y = -3 \cdot 2 \cos u \cdot \alpha^2;$$

$$D \frac{\sin^2 u}{\alpha} D \frac{1}{\sin u} y = -2(\sin^3 u)'; \frac{\sin^2 u}{\alpha} D \frac{1}{\sin u} \bar{y} = -2 \sin^3 u; D \frac{1}{\sin u} \bar{y} = 2 \cos u; \bar{y} = \sin 2u -$$

частное решение. Отсюда

$$\frac{1}{iD^2 - \alpha D + \alpha^3} (-3 \sin 2u \cdot \alpha^3) = \sin 2u. \quad (14)$$

В последней формуле D^2 заменяется на $(-4\alpha^2 + \alpha D)$, так как $(\sin 2u)'' = (-4\alpha^2 + \alpha D) \sin 2u$.

$$\text{и) } \left(D^2 - \frac{\alpha}{\sin u} D + \alpha^2 \right) y = e^{iu} \cdot \alpha^2. \quad (15)$$

Воспользуемся факторизацией 7) формулы (6).

$$D^2 - \frac{\alpha}{\sin u} D + \alpha^2 = \left(D + i\alpha - \frac{\alpha}{\sin u} \right) (D - i\alpha).$$

$$\text{Обозначим } U_2' = i\alpha - \frac{\alpha}{\sin u}; U_2 = iu - \ln \alpha; e^{U_2} = \frac{e^{iu}}{\alpha}; e^{-U_2} = \alpha e^{-iu}. \text{ Тогда}$$

$$e^{-U_2} De^{U_2} e^{iu} De^{-iu} y = e^{iu} \alpha^2; \alpha e^{-iu} D \frac{e^{2iu}}{\alpha} De^{-iu} y = e^{iu} \alpha^2; D \frac{e^{2iu}}{\alpha} De^{-iu} y = e^{2iu} \alpha^2;$$

$$\frac{e^{2iu}}{i} D e^{-iu} y = \frac{e^{2iu}}{2i} + C_1; \quad D e^{-iu} y = \frac{1}{2i} + C_1 e^{-2iu}; \quad e^{-iu} y = \frac{u}{2i} - \frac{C_1}{2i} e^{-2iu} + C_2;$$

$$y = \frac{u}{2i} e^{iu} - \frac{C_1}{2i} e^{-iu} + C_2 e^{iu} - \text{общее решение}; \quad \bar{y} = \frac{u}{2i} e^{iu} - \text{частное решение уравнения (15)}.$$

Отсюда следует формула

$$\frac{1}{D^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} e^{iu} = \frac{u}{2i} e^{iu}. \quad (16)$$

В частности, если $u = at$, то

$$\frac{1}{D^2 + a^2} e^{iat} = \frac{t}{2ia} e^{iat}. \quad (17)$$

Вещественные и мнимые части снова дают формулы (12').

Пример 3 (см [5]). $(D^2 + 1)y = \frac{1}{\sin t}$.

По формуле (10) из (6) данное уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{\sin t} D \sin^2 t D \frac{1}{\sin t} y = \frac{1}{\sin t},$$

откуда $\sin^2 t D \frac{1}{\sin t} y = t + C_1; \quad D \frac{1}{\sin t} y = \frac{t}{\sin^2 t} + \frac{C_1}{\sin^2 t}; \quad \frac{1}{\sin t} y = \int \frac{tdt}{\sin^2 t} - C_1 \operatorname{ctgt} + C_2;$

$$\frac{1}{\sin t} y = -t \operatorname{ctgt} + \ln \sin t - C_1 \operatorname{ctgt} + C_2; \quad y = -t \cos t + \sin t \cdot \ln \sin t - C_1 \cos t + C_2 \sin t - \text{общее решение};$$

$\bar{y} = -t \cos t + \sin t \cdot \ln \sin t - \text{частное решение}.$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Айнс Е.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Науч. техн. изд-во Украины, 1939. 719с.
2. Сансоне Д.Ж. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1. Т. 2. М.: ИЛ, 1953. 222 с.
3. Пиаджо Г. Интегрирование дифференциальных уравнений. М.-Л.: ГТТИ, 1993. 347 с.
4. Малышев Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения // Изв. РАЕН: Вып. 2. 1999. С. 59-66.
5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1961. 100с.