Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Репин, С. В. Ефимова, Нелокальная краевая задача для парабологиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 10–14

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu89>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 09:49:35

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ЛИНИЕЙ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

Поставлена и исследована новая нелокальная краевая задача для модельного парабологиперболического уравнения. Её новизна состоит в том, что в области гиперболичности уравнения задаётся условие, которое с помощью обобщенных операторов дробного интегродифференцирования связывает след нормальной производной искомой функции на линии перехода и её же след на характеристике уравнения.

Постановка задачи I

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0; \\ y^2 u_{xx} - u_{yy} + \alpha u_x, & y < 0, \end{cases} \quad (1)$$

где α ($|\alpha| < 1$) – действительная постоянная.

Как отмечалось в [1], уравнение (1) представляет собой простейшую модель уравнения смешанного парабологиперболического типа. Линия изменения типа $y=0$ не является характеристикой уравнения теплопроводности $u_x - u_{yy} = 0$, а характеристики

$$AC = \left\{ (x, y): x - \frac{y^2}{2} = 0, y \leq 0 \right\}, BC = \left\{ (x, y): x + \frac{y^2}{2} = 1, y \leq 0 \right\} \quad (2)$$

в качестве носителей задачи Дарбу, вообще говоря, неравноправны.

Пусть область D – объединение квадрата $ABMN$ с вершинами $A(0,0)$, $B(1,0)$, $M(1,1)$, $N(0,1)$, интервала $AB = (0,1)$ и характеристического треугольника ABC уравнения (1) с вершинами A , B и $C(\frac{1}{2}, -1)$. Обозначим квадрат $ABMN$ через D^+ , а треугольник ACB – через D^- .

Пусть $\theta_0(x)$ будет координатой точки пересечения характеристик уравнения (1), выходящих из точки $x\hat{I}(0,1)$, с характеристикой AC , заданной формулой (2), так что $\theta_0(x) = (\frac{x}{2}, -\sqrt{x})$. Интервал $(0,1)$ обозначим через I , а отрезок $[0,1]$ – через $\bar{I}$.

$$(I_{0+}^{a,b,h}j)(x) = \frac{x^{-a-b}}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} F(a+b, -h; a; 1 - \frac{t}{x}) j(t) dt, \quad (0 < x < 1, a > 0, \beta, \eta \hat{I} C); \quad (3)$$

$$(I_{0+}^{a,b,h}j)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{0+}^{a+n,b-n,h-n}j)(x), \quad (0 < x < 1, a < 0, \beta, \eta \hat{I} C, n = [-a] + 1) - \quad (4)$$

обобщенные операторы дробного интегродифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса $F(a, b; c; z)$ [2,3].

Если $b = -a$, то операторы (3) - (4) сводятся к дробным интегралам и производным Римана – Лиувилля [4,5]:

$$(I_{0+}^{a,-a,h}j)(x) = (I_{0+}^a j)(x) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^x (x-t)^{a-1} j(t) dt, \quad (0 < x < 1, a > 0), \quad (5)$$

$$(I_{0+}^{-a,a,h}j)(x) = (D_{0+}^a j)(x) = \left(\frac{d}{dx} \right)^n (I_{0+}^{n-a} j)(x) \quad (0 < x < 1, a > 0, \beta, \eta \hat{I} C, n = [a] + 1). \quad (6)$$

Исследуем следующую краевую задачу I для уравнения (1).

Задача I. Найти функцию $u(x,y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$, которая удовлетворяет уравнению (1) в области D и краевым условиям

$$u(0,y) = j_1(y), (y \in \bar{I}); \quad u(x,1) = j_2(x), (x \in \bar{I}); \quad (7)$$

$$A_1 \left(I_{0+}^{a,b,\frac{a-3}{4}-a} u[q_0(t)] \right)(x) + A_2 \left(I_{0+}^{\frac{a+3-a}{4}, b-\frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}-a} u_y(t,0) \right)(x) = g(x), \quad (8)$$

а также условиям сопряжения

$$u(x, +0) = u(x, -0), (x \in \bar{I}); \quad (9)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y) = \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y), \quad (x \in I). \quad (10)$$

Здесь $(I_{0+}^{a,b,g} j)(x)$ - обобщенный оператор дробного интегриродифференцирования (3)-(4); $j_1(x), j_2(x)$ и $g(x)$ - заданные функции, такие, что

$$j_1(x), j_2(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I), g(x) \in H^1(\bar{I}) \cap C^2(I), g(0) = j_1(0) = 0, \quad j_1(1) = j_2(0); \quad (11)$$

a, b, l - действительные постоянные, такие, что

$$\frac{a-1}{4} < a < \frac{3+a}{4}, \quad b > 0, \quad a + \frac{1-a}{4} < l \leq 1; \quad (12)$$

A_1, A_2 - ненулевые действительные константы, на которые впоследствии будут наложены необходимые условия.

Отметим, что в [6] для уравнения (1) поставлена и исследована краевая задача с условием (7) и нелокальным условием вида (8).

Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении.

В дальнейшем потребуются следующие свойства операторов обобщенного дробного исчисления [2,3]:

$$(I_{0+}^{a,b,h} I_{0+}^{g,d,a+h} j)(x) = (I_{0+}^{a+g,b+d,h} j)(x), (g > 0); \quad (13)$$

$$\left((I_{0+}^{a,b,h})^{-1} j \right)(x) = (I_{0+}^{-a,-b,a+h} j)(x), \quad (14)$$

а также лемма 2.5 из работы [7]. Приведем ее формулировку.

Лемма 2.5. Пусть $0 < -a < l \leq 1$ и $b < \min[0, h+1]$. Если $j(x) \in H^1[0,1]$, то $(I_{0+}^{a,b,h} j)(x) \in H^{\min[l+a, -b]}[0,1]$.

Сведения краевой задачи I к интегральному уравнению

Рассмотрим уравнение (1) в области D^+ . В области параболичности D^+ решение задачи

$u(x, +0) = t(x) (x \in \bar{I}); \quad u(0, y) = j_1(y) (y \in \bar{I}); \quad u(x, 1) = j_2(x), (x \in \bar{I})$ для уравнения теплопроводности $u_x - u_{yy} = 0$ даётся формулой [8], [9]

$$u(x, y) = \int_0^x t(x) G_h(x, 0; x, y) dx + \int_0^1 j_1(h) G(0, h; x, y) dh - \int_0^x G_h(x, h; x, y) j_2(x) dx,$$

$$\text{где } G(x, h; x, y) = \frac{1}{2\sqrt{p(x-x)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\exp\left\{-\frac{(y-h+2n)^2}{4(x-x)}\right\} - \exp\left\{-\frac{(y+h+2n)^2}{4(x-x)}\right\} \right] -$$

функция Грина первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Функция $G(x, h; x, y)$ бесконечно дифференцируема по всем аргументам при $0 \leq x \leq 1, 0 < y < 1, 0 \leq h \leq 1, y \neq h$ и обращается в нуль со всеми своими частными производными при $x=x$.

Основное функциональное соотношение между $t(x)$ и $n(x)$, принесённое из области D^+ , имеет вид [8]

$$n(x) = -\frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^x \frac{t'(x) dx}{\sqrt{x-x}} + \int_0^x K_1(x, x) t(x) dx + y(x), \quad (15)$$

где $n(x) = \lim_{y \rightarrow +0} u_y(x, y);$

$$K_1(x, x) = \frac{1}{2\sqrt{p}} \frac{1}{(x-x)^{3/2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{n^2}{x-x}\right\} - \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{(x-x)^{5/2}} \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{+\infty} n^2 \exp\left\{-\frac{n^2}{x-x}\right\}; \quad (16)$$

$$y(x) = \int_0^1 j_1(h) G_y(0, h; x, 0) dh - \int_0^x j_2(x) G_{hy}(x, 1; x, 0) dx. \quad (17)$$

Изучим теперь уравнение (1) в области D^- , где оно описывает процесс переноса потока влаги в капиллярно-пористых средах и носит название уравнения влагопереноса [10].

Хорошо известно [11], что решение задачи Коши

$$u(x, -0) = t(x) (x \in \bar{I}); \quad \lim_{y \rightarrow -0} u_y(x, y) = n(x) (x \in I)$$

для уравнения $y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_y = 0$, $|a| < 1$ имеет вид

$$u(x, y) = C_1 \int_0^1 t \left[x + \frac{y^2}{2} (1-2t) \right] (1-t)^{\frac{a-3}{4}} t^{-\frac{a+3}{4}} dt + C_2 y \int_0^1 n \left[x + \frac{y^2}{2} (1-2t) \right] (1-t)^{\frac{a-1}{4}} t^{-\frac{a+1}{4}} dt, \quad (18)$$

где

$$C_1 = \frac{\sqrt{p}}{\Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)}; \quad C_2 = \frac{\sqrt{p}}{2\Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)}. \quad (19)$$

Используя (18), найдем $u[\theta_0(x)]$ [12], [13]:

$$u[q_0(x)] = C_1 \Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) \left(I_{0+}^{\frac{1-a}{4}, 0, \frac{a-3}{4}} t \right)(x) - C_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) \left(I_{0+}^{\frac{3-a}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}} n \right)(x). \quad (20)$$

Подставляя (20) в краевое условие (8) и учитывая формулу (13), получим

$$A_1 C_1 \Gamma\left(\frac{1-a}{4}\right) \left(I_{0+}^{a+\frac{1-a}{4}, b, \frac{a-3}{4}-a} t \right)(x) + \left(A_2 - A_1 C_2 \Gamma\left(\frac{3-a}{4}\right) \right) \left(I_{0+}^{a+\frac{3-a}{4}, b-\frac{1}{2}, \frac{a-3}{4}-a} n \right)(x) = g(x). \quad (21)$$

Применив к обеим частям (21) оператор $\left(I_{0+}^{a+\frac{1-a}{4}, b, \frac{a-3}{4}-a} \right)^{-1}$, на основании (13) и (14) будем

иметь

$$\frac{A_1 \sqrt{p}}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} t(x) + \left(A_2 - \frac{A_1 \sqrt{p}}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} \right) \left(I_{0+}^{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} n \right)(x) = \left(I_{0+}^{-a-\frac{1-a}{4}, -b, -\frac{1}{2}} g \right)(x) \quad (x \in I). \quad (22)$$

В силу формулы (5) перепишем (22) в виде

$$\frac{A_1 \sqrt{p}}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} t(x) + \left(\frac{A_2}{\sqrt{p}} - \frac{A_1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} \right) \int_0^x \frac{n(t)}{\sqrt{x-t}} dt = \left(I_{0+}^{-a-\frac{1-a}{4}, -b, -\frac{1}{2}} g \right)(x) \quad (x \in I). \quad (23)$$

Подставляя $v(x)$ из (15) в (23), меняя порядки интегрирования, после несложных вычислений получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \left[\frac{A_1 \sqrt{p}}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} + \frac{A_1 \sqrt{p}}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - A_2 \right] t(x) + \left(\frac{A_2}{\sqrt{p}} - \frac{A_1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} \right) \int_0^x t(x) dx \int_x^x \frac{K_1(t, x)}{\sqrt{x-t}} dt = \\ & = \left(I_{0+}^{-a-\frac{1-a}{4}, -b, -\frac{1}{2}} g \right)(x) + \left(\frac{A_1 \sqrt{p}}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - A_2 \right) t(+0) + \left(\frac{A_1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - \frac{A_2}{\sqrt{p}} \right) \int_0^x \frac{y(t) dt}{\sqrt{x-t}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Уравнение (24) есть интегральное уравнение Вольтерра второго рода для функции $\tau(x)$:

$$t(x) + \int_0^x t(x) K(x, x) dx = f(x), \quad (25)$$

где

$$K(x, x) = \frac{1}{m} \left(\frac{A_2}{\sqrt{p}} - \frac{A_1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} \right) \int_x^x \frac{K_1(t, x)}{\sqrt{x-t}} dt; \quad (26)$$

$$f(x) = \frac{1}{m} \left[\left(I_{0+}^{-a-\frac{1-a}{4}, -b, -\frac{1}{2}} g \right)(x) + \left(\frac{A_1 \sqrt{p}}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - A_2 \right) c + \left(\frac{A_1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - \frac{A_2}{\sqrt{p}} \right) \int_0^x \frac{y(t)dt}{\sqrt{x-t}} \right]; \quad (27)$$

$$m = \frac{A_1 \sqrt{p}}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} + \frac{A_1 \sqrt{p}}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - A_2, \quad c = t(+0). \quad (28)$$

Единственность и существование решения краевой задачи I

В работе [8] установлено, что функция $\int_x^x \frac{K_1(t, x)}{\sqrt{x-t}} dt$ ($K_1(x, x)$ определено формулой (16))

бесконечно дифференцируема в замкнутом треугольнике $\{0 \leq x \leq 1\}$ и стремится к нулю вместе со всеми своими частными производными при совпадении аргументов x и ξ .

Если в формуле (28) положить $\mu \neq 0$, то

$$A_2 \neq A_1 \sqrt{p} \left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} + \frac{1}{2\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} \right), \quad (29)$$

а ядро $K(x, \xi)$ в интегральном уравнении (25) обладает следующим свойством гладкости:

$$K(x, x) \in C(\bar{I} \times \bar{I}) \cap C^2(I \times I).$$

В соответствии с леммой 2.5 и условиями (12) имеем

$$\left(I_{0+}^{-a-\frac{1-a}{4}, -b, -\frac{1}{2}} g \right)(x) \in H^{\min\left[l-a-\frac{1-a}{4}, b\right]}(\bar{I})$$

и, следовательно, $f(x) \in C(\bar{I}) \cap C^2(I)$.

Теперь найдем $c = t(+0)$ в формуле (28). Перейдя к пределу при $x \rightarrow +0$ в равенстве (24), получим

$$\begin{aligned} \frac{A_1 \sqrt{p}}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} c = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{A_1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - \frac{A_2}{\sqrt{p}} \right) \int_0^x t(x) dx \int_x^x \frac{K_1(t, x)}{\sqrt{x-t}} dt + \\ + \lim_{x \rightarrow +0} \left(I_{0+}^{-a-\frac{1-a}{4}, -b, -\frac{1}{2}} g \right)(x) + \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{A_1}{2\Gamma\left(\frac{3+a}{4}\right)} - \frac{A_2}{\sqrt{p}} \right) \int_0^x \frac{y(t)dt}{\sqrt{x-t}}, \quad (x \in I). \end{aligned} \quad (30)$$

Далее, в силу (4), (11), (12) и (16) имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +0} \left(I_{0+}^{-a-\frac{1-a}{4}, -b, -\frac{1}{2}} g \right)(x) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3+a}{4} - a\right)} \times \\ \times \lim_{x \rightarrow +0} \frac{d}{dx} \left[x^{b+1} \int_0^1 (1-z)^{\frac{a-1}{4}-a} F\left(\frac{a-1}{4} - a - b, \frac{3}{2}; \frac{3+a}{4} - a; 1-z\right) g(xz) dz \right] = \\ = \lim_{x \rightarrow +0} \int_0^x t(x) dx \int_x^x \frac{K_1(t, x)}{\sqrt{x-t}} dt = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Непосредственно проверяется, что функция $y(x)$ в (17) бесконечно дифференцируема в замкнутом треугольнике $\{0 \leq x \leq 1\}$ и $\lim_{x \rightarrow +0} y(x) = 0$.

Следовательно,

$$\int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 2 \int_0^x \sqrt{x-t} y'(t) dt; \quad \lim_{x \rightarrow +0} \int_0^x \frac{y(t)}{\sqrt{x-t}} dt = 0. \quad (32)$$

Таким образом, согласно (31) и (32) из (30) вытекает равенство $\frac{A_1 \sqrt{p}}{\Gamma\left(\frac{1+a}{4}\right)} c = 0$. Отсюда

$c=0$, так как $A_1 \neq 0$.

Из вышеприведенных свойств $K(x, x)$ и правой части $f(x)$ интегрального уравнения (25) следует, что оно разрешимо в классе $C(\bar{I}) \cap C^2(I)$ [14] и его решение имеет вид

$$t(x) = f(x) + \int_0^x R(x, x) f(x) dx, \quad (33)$$

где $R(x, x)$ - резольвента ядра $K(x, x)$, а $f(x)$ дается формулой (27).

Тогда на основании (15) и (18) получаем, что краевая задача I для уравнения (1) с условиями (7) – (8) имеет единственное решение: $u(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$.

Это приводит нас к следующему результату.

Т е о р е м а. Пусть $j_1(x), j_2(x)$ и $g(x)$ - заданные функции, удовлетворяющие условиям (11); a, b, λ – действительные числа, удовлетворяющие требованию (12); A_1 и A_2 – ненулевые вещественные константы, для которых выполняется условие (29). Тогда краевая задача (7) – (10) для уравнения (1) разрешима и его единственное решение $u(x, y)$ имеет вид (18), где $\pi(x)$ – определено соотношением (15), а $\tau(x)$ – (33).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Дифференц. уравнения. 1978. Т. 14. №1. С.66 - 73.
2. Saigo M. A remark on integral operators involving the Gauss hypergeometric functions // Math. Rep. Kyushu Univ. 1978. Vol. 11. N 2. P. 135 - 143.
3. Репин О.А. Краевые задачи со смещением для уравнений гиперболического и смешанного типов. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1992. 161 с.
4. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
5. Нахушев А.М. Элементы дробного исчисления и их применение. Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2000. 299 с.
6. Saigo M., Repin O.A., Kilbas A.A. On a non local boundary value problem for an equation of mixed parabolic type // International Journal of Mathemat. and Statistical. 1996. Vol.5. №1. P. 104 - 117.
7. Saigo M., Kilbas A.A. Generalized fractional integrals and derivatives in Holder spaces // Transform Methods and Special Functions. Sofia 94. 1995. P. 282 – 293.
8. Капустин Н.Ю. О разрешимости в классе L_2 задачи Трикоми для одного парабола-гиперболического уравнения с вырождающейся гиперболической частью // Дифференц. уравнения. 1986. Т. 22. № 1. С. 60 – 65.
9. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных. М.: Наука, 1957. 443 с.
10. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.
11. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
12. Репин О.А. Нелокальная краевая задача для парабола-гиперболического уравнения с характеристической линией изменения типа // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28. № 1. С. 173 – 176.
13. Репин О.А. О разрешимости задачи с краевым условием на характеристиках для вырождающегося гиперболического уравнения // Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34. № 1. С. 110 – 113.
14. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегродифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.