Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. И. Арончик, Метод итерационного расщепления в процедурах численного моделирования излучающих систем, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 1998, выпуск 6, 66–77

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu9>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 10:21:16

Теплофизика

УДК 519.6:536.3

Г.И. Арончик

МЕТОД ИТЕРАЦИОННОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ В ПРОЦЕДУРАХ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗЛУЧАЮЩИХ СИСТЕМ

Рассмотрены основные особенности постановки задач сложного теплообмена в излучающих системах. Описана структура метода итерационного расщепления, позволяющего снизить объем вычислительных затрат при математическом моделировании излучающих систем за счет использования эффективных специализированных методов решения частных задач теплопереноса. Приведены результаты построения достаточных условий сходимости алгоритма. Приведен пример реализации метода итерационного расщепления, иллюстрирующий эффективность предложенного подхода.

Специфика методов математического моделирования излучающих систем определяется, в основном, особенностями математических моделей и алгоритмов расчета процессов радиационного теплообмена по сравнению с иными видами теплопереноса. Различный физический характер и форма описания процессов радиационного и конвективно-кондуктивного теплопереноса являются источниками существенных трудностей при разработке алгоритмов и программных средств численного моделирования такого рода систем и, в конечном итоге, при разработке алгоритмов оптимизации и управления соответствующими процессами. Перспективным направлением развития методов математического моделирования излучающих систем? на наш взгляд, является последовательное применение идеи итерационного расщепления задач сложного энергообмена. Такие алгоритмы позволяют существенно снизить объем вычислительных затрат при одновременном повышении гибкости структуры программного обеспечения, однако требуют применения специальных средств, обеспечивающих сходимость итерационных процессов. Общая схема метода итерационного расщепления описана в ряде работ автора [1, 2]. Однако обоснование метода в ранее опубликованных работах не приведено.

Для изложения структуры метода итерационного расщепления и построения условий сходимости итераций рассмотрим постановку задачи сложного теплообмена в излучающей системе и определим структуру математической модели при наличии ряда упрощающих предположений. Если предположить, что теплофизические характеристики элементов системы не зависят от температуры, отражение и рассеяние изотропны, математическая модель сложного теплообмена в некоторой пространственной области V , ограниченной поверхностью F может быть представлена в следующей форме:

$$DT = \eta_{\text{пол}}(T) + \eta_{\text{пол}}(T_w) - \eta_c(T), \quad T|_{\tau=0} = T^0, \quad T|_F = T_w, \quad (1)$$

где D - дифференциальный оператор уравнения энергии; $\eta_{\text{пол}}(T)$, $\eta_{\text{пол}}(T_w)$ - составляющие объемной плотности потока поглощенного излучения, обусловленные собственным излучением элементов объема и поверхности соответственно; $\eta_c(T)$ - объемная плотность потока собственного излучения; T_w - температура граничных поверхностей F ; T^0 - начальное распределение температур.

При принятых допущениях оператор D имеет следующую структуру [3]:

$$D = c_p \rho \frac{\partial}{\partial \tau} + \text{div}(c_p \rho T \cdot \vec{v}) - \text{div}(\lambda \nabla), \quad (2)$$

где c_p , ρ - теплоемкость и плотность среды; λ - коэффициент теплопроводности; τ - время; $\vec{v}$ - вектор скорости; ∇ - оператор Гамильтона.

Источник в правой части соотношения (2) представляет собой объемную плотность потока результирующего излучения, которая при заданных температурных полях в объеме V и на поверхности F определяется путем решения системы интегральных уравнений радиационного теплообмена [4] и может быть записана в виде

$$\eta_{рез}(M) = \eta_{ногл}(T) + \eta_{ногл}(T_w) - \eta_c(T) =$$

$$= \int_{v=0}^{\infty} \left[\alpha'_v(M) \int_V 4\alpha'_v(M_1) E_{T,v}(T(M_1)) \Gamma_{VV,v}(M, M_1) dV_{M_1} + \right.$$

$$\left. + \alpha'_v(M) \int_F \varepsilon_v(N_1) E_{T,v}(T_w(N_1)) \Gamma_{FV,v}(M, N_1) dF_{N_1} - \right.$$

$$\left. - 4\alpha'_v(M) E_{T,v}(T(M)) \right] dv, \quad (3)$$

где M , M_1 , N_1 - точки в объеме V и на поверхности F соответственно ($M, M_1 \in V$, $N_1 \in F$); v - частота излучения; α'_v - эффективный спектральный коэффициент поглощения среды; ε_v - спектральная степень черноты поверхности F ; $\Gamma_{VV,v}(M, M_1)$, $\Gamma_{FV,v}(M, N_1)$ - резольвенты ядер интегральных уравнений радиационного теплообмена [4].

Из соотношения (3) видно, что составляющие $\eta_{ногл}(T)$, $\eta_{ногл}(T_w)$, $\eta_c(T)$ соответственно равны

$$\eta_{ногл}(T) = \int_{v=0}^{\infty} \left[\alpha'_v(M) \int_V 4\alpha'_v(M_1) E_{T,v}(T(M_1)) \Gamma_{VV,v}(M, M_1) dV_{M_1} \right] dv, \quad (4)$$

$$\eta_{ногл}(T_w) = \int_{v=0}^{\infty} \left[\alpha'_v(M) \int_F \varepsilon_v(N_1) E_{T,v}(T_w(N_1)) \Gamma_{FV,v}(M, N_1) dF_{N_1} \right] dv, \quad (5)$$

$$\eta_c(T) = \int_{v=0}^{\infty} [4\alpha'_v(M) E_{T,v}(T(M))] dv. \quad (6)$$

Доопределим задачу (1), ограничив область определения соответствующих операторов. Пусть коэффициенты в (2) достаточно гладкие. Процесс теплообмена рассматривается во временном интервале V_τ . Тогда в рамках классической постановки краевых задач естественная область определения оператора D может быть задана в виде

$$R(D) = \{T | T \in C^2(V) \times C^1(V_\tau)\}. \quad (7)$$

Интегральные уравнения радиационного теплообмена являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода и имеют единственное решение по крайней мере в пространстве функций с интегрируемым квадратом $L_2(V)$ [5]. Следовательно, естественно определить операторы $\eta_{ногл}$, η_c как операторы в

$$R(\eta_{ногл}) = \{T | T \in L_2(V) \times C^1(V_\tau)\}, \quad R(\eta_c) = \{T | T \in L_2(V) \times C^1(V_\tau)\}.$$

При этом время τ в интегральных уравнениях радиационного теплообмена играет роль параметра.

Так как очевидно, что $R(D) \subset R(\eta_{ногл}) \subset R(\eta_c)$, то в качестве области определения задачи примем пространство функций, определенное в (7).

Приведенное описание задачи сложного теплообмена не является единственно возможным как с точки зрения формулировки задачи (1), так и в плане выбора конкретных функциональных пространств. Однако оно, по крайней мере, является достаточным для построения итерационного алгоритма решения задач сложного теплообмена, изложенного ниже.

В ряде практически важных случаев необходимо учитывать взаимное влияние гидродинамических и тепловых процессов, что, в первую очередь, связано с существенной зависимостью теплофизических характеристик от температуры и давления. При этом поля скорости и темпе-

ратуры необходимо определять совместно путем решения полной системы уравнений сложного теплообмена [3]. Многие процессы в энергетических и технологических установках близки к изобарным. Поэтому наиболее существенной представляется зависимость теплофизических характеристик от температуры. Пусть, соответственно, в дифференциальном операторе D величины $c_p \rho$ и λ являются функциями температуры, т.е. $c_p \rho = c_p \rho(T)$, $\lambda = \lambda(T)$. При заданном температурном поле T поле скорости $\vec{v}$ определяется путем решения полной нелинейной системы уравнений гидродинамики. Поэтому $\vec{v}$ можно считать нелинейным оператором и записать $\vec{v} = \vec{v}(T)$. Тогда математическую модель сложного теплообмена можно представить в форме (1), где D - нелинейный оператор:

$$DT = c_p \rho(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} + \text{div}(c_p \rho(T) T \cdot \vec{v}(T)) - \text{div}(\lambda(T) \nabla T) \quad (8)$$

В некоторых случаях недопустимым является предположение об изотропности отражения и рассеяния. Тогда соотношения (4) - (6) также могут быть записаны, однако ядра интегральных уравнений, записанных в терминах объемных и поверхностей плотностей радиационных потоков, содержат функции, описывающие распределение интенсивности излучения по направлениям [2]. Поэтому резольвенты в (4) - (6) зависят от $E_{T,v}$, величина $\eta_{\text{рез}}$ становится, на первый взгляд, нелинейным оператором относительно $E_{T,v}$. Однако можно показать, что и в этом случае структура оператора $\eta_{\text{рез}}$ подобна структуре соотношения (3). В качестве исходных целесообразно использовать уравнения радиационного теплообмена в терминах спектральной интенсивности эффективного излучения [4]

$$I_{\text{э}^{\text{TM}},H}(N,S) = I_{-H}(N,S) + \int_F r_H(N, S_{N_1N}) I_{\text{э}^{\text{TM}},H}(N_1, S_{N_1N}) K'_H(N, N_1) p_H(N, S_{N_1N}, S) dF_{N_1} + \\ + \int_V r_H(N, S_{M_1N}) J'_{\text{э}^{\text{TM}},H}(M_1, S_{M_1N}) K'_H(N, M_1) p_H(N, S_{M_1N}, S) dV_{M_1}, \quad (9)$$

$$J'_{\text{э}^{\text{TM}},H}(M,S) = j_{-H}(M) + B_H(M) \int_F I_{\text{э}^{\text{TM}},H}(N_1, S_{N_1M}) K'_H(M, N_1) \Gamma_H(M, S_{N_1M}, S) dF_{N_1} + \\ + B_H(M) \int_V J'_{\text{э}^{\text{TM}},H}(M, S_{M_1M}) K'_H(M, M_1) \Gamma_H(M, S_{M_1M}, S) dV_{M_1}, \quad (10)$$

где $M, M_1 \in V$, $N, N_1 \in F$; S - направление излучения; r_v - отражательная способность; β_v - коэффициент рассеяния; p_v, γ_v - индикатрисы отражения и рассеяния; $I_{c,v}(N,S) = \varepsilon_{v,S}(N,S) I_{v,T}(T_W(N))$ - спектральная интенсивность собственного излучения граничной поверхности ($I_{v,T}$ - спектральная интенсивность равновесного излучения); $j_{c,v}(M) = \eta_{c,v}(M) / 4\pi$ - спектральный коэффициент спонтанного излучения среды, $\eta_{c,v}(M) = 4\alpha'_v(M) E_{T,v}(T(M))$; $I_{\text{э}^{\text{ф}},v}, J'_{\text{э}^{\text{ф}},v}$ - спектральная интенсивность и спектральный коэффициент эффективного излучения; ядра K'_v - неотрицательные функции координат точек в объеме и на поверхности (структура ядер K'_v приведена, например, в [4]).

Уравнения (9), (10) являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода. Их решения могут быть формально записаны в виде

$$I_{\text{э}^{\text{ф}},v}(N,S) = \int_F I_{c,v}(N_1,S) \Gamma'_{FF}(N, N_1, S_{N_1N}, S) dF_{N_1} + \int_V j_{c,v}(M) \Gamma'_{VF}(N, M_1, S_{M_1N}, S) dV_{M_1}, \quad (11)$$

$$j'_{\text{э}^{\text{ф}},v}(M,S) = \int_F I_{c,v}(N_1,S) \Gamma'_{FV}(M, N_1, S_{N_1M}, S) dF_{N_1} + \int_V j_{c,v}(M) \Gamma'_{VV}(M, M_1, S_{M_1M}, S) dV_{M_1}, \quad (12)$$

где $\Gamma'_{FF}, \Gamma'_{VF}, \Gamma'_{FV}, \Gamma'_{VV}$ - резольвенты ядер интегральных уравнений (9), (10).

Тогда слагаемые в правой части (1) можно записать в форме, аналогичной (4) - (6)

$$\eta_{\text{ноэт}}(T) = \int_{v=0}^{\infty} \left[\alpha'_v(M) \int_V 4\alpha'_v(M_1) E_{T,v}(T(M_1)) \tilde{\Gamma}'_{VV,v}(M, M_1) dV_{M_1} \right] dv, \quad (13)$$

$$\eta_{ногл}(T_w) = \int_{v=0}^{\infty} \left[\alpha'_v(M) \int_F \varepsilon_v(N_1) E_{T,v}(T_w(N_1)) \tilde{\Gamma}_{FV,v}(M, N_1) dF_{N_1} \right] dv, \quad (14)$$

$$\eta_c(T) = \int_{v=0}^{\infty} [4\alpha'_v(M) E_{T,v}(T(M_1))] dv, \quad (15)$$

где $\tilde{\Gamma}_{FV,v}, \tilde{\Gamma}_{VV,v}$ - некоторые неотрицательные функции оптико-геометрических характеристик системы.

Для построения вычислительных алгоритмов именно структура выражений (14) - (15) и знакоопределенность ядер $\tilde{\Gamma}_{FV,v}, \tilde{\Gamma}_{VV,v}$ являются наиболее существенными факторами.

Рассмотрим алгоритм метода итерационного расщепления. Решение задачи сложного теплообмена (1), в силу ее существенной нелинейности, может быть построено, как правило, лишь на основе использования итерационных методов. Достаточно общие итерационные методы вычислительной математики [6, 7] не учитывают особенностей физического содержания и математической структуры отдельных компонент операторных уравнений типа (1) и в силу этого не позволяют эффективным образом эти особенности использовать.

В данном случае необходимо отметить, что краевые задачи для дифференциальных уравнений энергии и интегральные уравнения радиационного теплообмена существенным образом отличаются как по своей структуре, так и по вычислительным алгоритмам их решения. Анализ такого рода особенностей показывает, что задачи, порожденные операторами D и $\eta_{ногл} - \eta_c$, целесообразно решать раздельно.

Кроме того необходимо отметить, что задачи радиационного теплообмена в обратной, по классификации Ю.А. Суринова, постановке не имеют единственного решения [8]. Поэтому в ходе итерационного процесса целесообразно по известному температурному полю определять радиационный тепловой поток $\eta_{ногл}(T) + \eta_{ногл}(T_w) - \eta_c(T)$, а затем решать краевую задачу для уравнения энергии с известной правой частью.

Этому требованию удовлетворяет итерационный процесс вида

$$DT_{n+1} + \omega T_{n+1} = \omega T_n + \eta_{ногл}(T_n) + \eta_{ногл}(T_w) - \eta_c(T_n), \quad (16)$$

$$T_{n+1}|_{\tau=0} = T^0, \quad T_{n+1}|_F = T_w, \quad (17)$$

где n - номер итерации; ω - итерационный параметр, наличие которого позволяет управлять сходимостью процесса. Параметр (или в общем случае, как будет показано в дальнейшем, функция) ω должен быть построен на основе априорной информации об операторах задачи.

Обычным приемом при анализе итерационных процессов является рассмотрение соответствующего итерационного процесса для задачи, линеаризованной в окрестности точного решения [9, 10]. Используем тот же прием при построении итерационного алгоритма решения задачи (1).

Пусть начальное приближение T_0 выбрано достаточно близким к некоторому точному решению T_* задачи (1). Линеаризуем (16) в окрестности T_* . Тогда вместо (16), (17) имеем

$$DT_{n+1} + \omega T_{n+1} = \omega T_n + \eta'_{ногл}(T_*)T_n - \eta'_c(T_*)T_n + \psi, \quad (18)$$

$$T_{n+1}|_{\tau=0} = T^0, \quad T_{n+1}|_F = T_w, \quad (19)$$

где $\eta'_{ногл}(T_*)$ и $\eta'_c(T_*)$ - производные Фреше операторов $\eta_{ногл}, \eta_c$ в точке T_* ; $\psi = \eta'_{ногл}(T_*)T_* - \eta'_c(T_*)T_* - \eta_{ногл}(T_*) + \eta_c(T_*) + \eta_{ногл}(T_w)$.

В данном случае, с учетом принятых допущений,

$$\eta'_{ногл}(T_*)T_n = \int_{v=0}^{\infty} \left[\alpha'_v(M) \int_V 4\alpha'_v(M_1) E'_{T,v}(T_*(M_1)) T_n(M_1) \Gamma_{FV,v}(M, M_1) dV_{M_1} \right] dv, \quad (20)$$

$$\eta'_c(T_*)T_n = T_n(M) \int_{v=0}^{\infty} [4\alpha'_v(M) E'_{T,v}(T_*(M))] dv, \quad (21)$$

где $E'_{T,v}(T_*) = \frac{\partial E_{T,v}}{\partial T} \Big|_{T=T_*} = \frac{h\nu}{kT_*^2} \frac{e^{\frac{h\nu}{kT_*}}}{e^{\frac{h\nu}{kT_*}} - 1} E_{0,v}(T_*)$ в обозначениях [4].

Введем невязку линейризованного уравнения энергии на n -ой итерации

$$Z_n = DT_n - \eta'_{нозл}(T_*)T_n + \eta'_c(T_*)T_n - \phi. \quad (22)$$

Пусть начальное приближение T_0 удовлетворяет краевым условиям (17). Тогда итерационный процесс (18), (19) может быть записан следующим образом:

$$Z_{n+1} = \omega U_{n+1} + \eta'_{нозл}(T_*)U_{n+1} - \eta'_c(T_*)U_{n+1}, \quad (23)$$

$$DU_{n+1} + \omega U_{n+1} = Z_n, \quad (24)$$

$$U_{n+1}|_{\tau=0} = 0, \quad U_{n+1}|_F = 0,$$

(25)

где $U_{n+1} = T_n - T_{n+1}$ - поправка на $(n+1)$ -ом шаге.

Из (24), (25) следует, что поправка U_{n+1} является решением краевой задачи для уравнения энергии с однородными краевыми условиями и может быть записана в виде [11]

$$U_{n+1} = GZ_n,$$

(26)

где G - нелинейный интегральный оператор, ядром которого является функция Грина для задачи (24), (25).

После формальной подстановки (26) в (23) можно записать

$$Z_{n+1} = (\omega I + \eta'_{нозл}(T_*) - \eta'_c(T_*))GZ_n, \quad (27)$$

где I - единичный оператор.

Итерационный процесс (27) сходится, если в некотором нормированном пространстве $\|Z_{n+1}\| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Условием сходимости является соотношение $\rho((\omega I + \eta'_{нозл}(T_*) - \eta'_c(T_*))G) < 1$, где $\rho(\bullet)$ - спектральный радиус оператора, или достаточное условие $\|(\omega I + \eta'_{нозл}(T_*) - \eta'_c(T_*))G\| < 1$ [10].

Следовательно, в общем случае параметр ω должен определяться условием минимума нормы или спектрального радиуса оператора шага итерационного процесса (27). Некоторые конкретные варианты построения величины ω на основе использования априорной информации об операторах задачи приведены в ряде работ автора.

Очевидно, что объем априорной информации об операторах в соотношении (27) ограничен, и построение параметра (в общем случае - функции) ω , обеспечивающего сходимость при любых значениях параметров задачи, трудно осуществимо либо невозможно. В то же время расширение диапазона сходимости при заданном ω может быть достигнуто на основе использования идей итерационных методов вариационного типа, учитывающих апостериорную информацию об итерационном процессе. Такого рода подходы описаны, например, в [7]. Реализация методов такого типа предусматривает три основных этапа:

- 1) выбор минимизируемого функционала;
- 2) параметризация функционала;
- 3) минимизация функционала по выбранной системе параметров.

Рассмотрим возможный вариант решения этих вопросов применительно к рассматриваемому классу задач.

Так как единственным признаком точного решения задачи (1) является равенство нулю невязки уравнения энергии при условии удовлетворения соответствующим краевым условиям, в качестве минимизируемого функционала, характеризующего качество приближенного решения T_n , примем величину нормы невязки $\|Z_n\|$. Учитывая (7), будем считать, что $Z_n \in C_2(V) \times C_2(V_\tau)$. Норму и скалярное произведение в $C_2(V) \times C_2(V_\tau)$ введем соотношениями

$$\|\bullet\|^2 = \int_V \int_{V_\tau} (\bullet)^2 dV d\tau, \quad (\bullet, \bullet) = \int_V \int_{V_\tau} (\bullet)(\bullet) dV d\tau. \quad (28)$$

С целью параметризации функционала $\|Z_n\|$ введем разбиение пространственно-временной области определения задачи $V \times V_\tau$ на совокупность непересекающихся подобластей Ω_i , таких, что $\bigcup_{i=1}^N \Omega_i = V \times V_\tau$, $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$, $(i \neq j; i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N)$.

Представим невязку Z_n в виде суммы финитных составляющих

$$Z_n = \sum_{i=1}^N Z_{i,n}, Z_{i,n}(M, \tau) = \begin{cases} Z_n(M, \tau), & (M, \tau) \in \Omega_i \\ 0, & (M, \tau) \notin \Omega_i \end{cases}, \quad M \in V, \tau \in V_\tau. \quad (29)$$

На основе разбиения (29) поправку U_{n+1} представим в виде линейной комбинации

$$U_{n+1} = \sum_{i=1}^N A_{i,n+1} U_{i,n+1/2}, \quad (30)$$

где функции $U_{i,n+1/2}$ определяются краевыми задачами типа (24), (25):

$$\begin{aligned} DU_{i,n+1/2} + \tilde{\omega} U_{i,n+1/2} &= Z_{i,n}; \\ U_{i,n+1/2}|_{\tau=0} &= 0, \quad U_{i,n+1/2}|_F = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Итерационный параметр $\tilde{\omega}$ представляет собой некоторое приближенное значение итерационного параметра ω .

Тогда, исключая ωU_{n+1} из (23) - (25), с учетом (30) получаем

$$Z_{n+1} = Z_n - \sum_{i=1}^N A_{i,n+1} (DU_{i,n+1/2} - \eta'_{ногл}(T_*) U_{i,n+1/2} + \eta'_c(T_*) U_{i,n+1/2})$$

или

$$Z_{n+1} = Z_n - \sum_{i=1}^N A_{i,n+1} (Z_{i,n} - Z_{i,n+1/2}), \quad (32)$$

где $Z_{i,n+1/2}$ представляет собой невязку линеаризованного уравнения энергии на функции $T_{i,n+1/2} = T_n - U_{i,n+1/2}$, т. е.

$$Z_{i,n+1/2} = DT_{i,n+1/2} - \eta'_{ногл}(T_*) T_{i,n+1/2} + \eta'^c(T_*) T_{i,n+1/2} - \psi. \quad (33)$$

Параметры $A_{i,n+1}$ в (30) определим из условия минимума нормы невязки на $(n+1)$ -й итерации

$$\|Z_{n+1}\|_{A_{i,n+1}}^2 \longrightarrow \min. \quad (34)$$

Определение параметров $A_{i,n+1}$ на основе соотношений (28), (32), (33) с использованием условия $\partial \|Z_{n+1}\|^2 / \partial A_{i,n+1} = 0$ приводит к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{W}(\mathbf{Z})\mathbf{A} = \Psi(\mathbf{Z}), \quad (35)$$

где обозначено $\mathbf{A} = [A_{1,n+1} A_{2,n+1} \dots A_{N,n+1}]^T$, $\mathbf{W}$ - квадратная матрица $N \times N$ с элементами $W(\mathbf{Z})_{i,j} = (Z_{i,n} - Z_{i,n+1/2}, Z_{j,n} - Z_{j,n+1/2})$, матрица-столбец $\Psi(\mathbf{Z})$ содержит скалярные произведения вида $\Psi(\mathbf{Z})_i = (Z_n, Z_{i,n} - Z_{i,n+1/2})$. Выбранный способ параметризации невязки с помощью разбиения (29) гарантирует линейную независимость строк матрицы $\mathbf{W}$ и, следовательно, существование единственного решения системы уравнений (35) [12].

Таким образом, предложенная схема перехода от n -ного к $(n+1)$ -му приближению при решении задачи сложного теплообмена, линеаризованной в окрестности некоторого точного решения T_* , содержит следующие последовательно реализуемые этапы:

- 1) путем решения задачи радиационного теплообмена определяется поле плотности потока результирующего излучения - величина $\eta'_{ногл}(T_*) T_n - \eta'_-(T_*) T_n + \psi$;
- 2) по соотношению (22) строится невязка Z_n ;
- 3) строится разбиение (29);

- 4) решаются краевые задачи (31) относительно $U_{i,n+1/2}$;
- 5) строятся функции $T_{i,n+1/2}$;
- 6) решается задача радиационного теплообмена для определения плотности потока результирующего излучения $\eta'_{ногл}(T_*)T_{i,n+1/2} - \eta'_c(T_*)T_{i,n+1/2} + \psi$;
- 7) по соотношению (33) строятся невязки $Z_{i,n+1/2}$;
- 8) формируются матрицы $\mathbf{W}$ и $\Psi(\mathbf{Z})$ и решается система линейных алгебраических уравнений (35) относительно $\mathbf{A}$;
- 9) строится следующее приближение по температурному полю

$$T_{n+1} = T_n - \sum_{i=1}^N A_{i,n+1} U_{i,n+1/2} \quad (36)$$

Сходимость предложенного итерационного процесса для линеаризованной задачи при достаточно точном нулевом приближении гарантирует сходимость соответствующего итерационного процесса для нелинейной задачи (1) при $T_* = T_n$ [10].

Таким образом, в структуре итерационного процесса априорная информация, выраженная в функции ϑ , учитывается при формировании поправок $U_{i,n+1/2}$, апостериорная - при вычислении параметров минимизации нормы невязки $A_{i,n+1}$.

Необходимо также отметить, что при реализации сформулированного алгоритма решение задачи сложного теплообмена распадается на следующие основные этапы:

- 1) решение задач радиационного теплообмена;
- 2) решение краевых задач для уравнений энергии;
- 3) вычисление невязок уравнений энергии;
- 4) вычисление норм и скалярных произведений;
- 5) решение системы линейных алгебраических уравнений.

Возможны следующие частные случаи сформулированного выше алгоритма 1-9:

1) если параметры $A_{i,n+1}$ не вычисляются ($A_{i,n+1}=1$), то итерационный процесс становится стационарным и его сходимость определяется параметром (функцией) ϑ ;

2) если норма невязки Z_{n+1} минимизируется по одному параметру, а $\vartheta=0$, то итерационный процесс (29) - (36) представляет собой вариант метода минимальных невязок [6, 7]; итерационный процесс в этом случае может быть записан в канонической форме двухслойной итерационной схемы (в обозначениях [7]) $B \left(\frac{T_{n+1} - T_n}{\tau_{n+1}} \right) + AT_n = \Psi$, где в данном случае $B = D$,

$$A = D - \eta'_{ногл}(T_*) + \eta'_c(T_*), \quad \tau_{n+1} = A_{n+1}.$$

В общем случае предложенный итерационный процесс не сводится к описанным в [7] итерационным схемам. Отметим, что сходимость итерационного процесса (29) - (36) зависит от выбора параметра (функции) ϑ и разбиения (29).

Определим условия сходимости описанного выше итерационного процесса. Прежде чем перейти к рассмотрению достаточно общего случая и формулировке рекомендаций по выбору ϑ и построению разбиения (29), приведем некоторые предварительные соображения.

Пусть, например, $N = 1$. Тогда вместо (32) - (35) получаем

$$\begin{aligned} Z_{n+1} &= Z_n - A_{n+1}(Z_n - Z_{n+1/2}) = Z_n - A_{n+1} W U_{n+1/2}, \\ A_{n+1} &= \frac{(Z_n, Z_n - Z_{n+1/2})}{\|Z_n - Z_{n+1/2}\|^2} = \frac{(Z_n, W U_{n+1/2})}{\|W U_{n+1/2}\|^2}, \end{aligned} \quad (37)$$

где обозначено $W U_{n+1/2} = D U_{n+1/2} - \eta'_{ногл}(T_*) U_{n+1/2} + \eta'_c(T_*) U_{n+1/2}$.

Очевидным требованием, предъявляемым к поправке $U_{n+1/2}$, является $\|W U_{n+1/2}\|^2 \neq 0$, что выполняется, если $U_{n+1/2}$ не является решением однородной линеаризованной задачи теплооб-

мена типа (18), (19). Принятый способ построения поправок путем решения краевых задач (31) обеспечивает выполнение этого условия.

Отметим, что монотонное убывание норм невязок

$$\|Z_{n+1}\| < \|Z_n\| \quad (38)$$

является достаточным условием фактор-сходимости рассматриваемого итерационного процесса [13]. Однако в данном случае, видимо, можно считать, что линеаризованная задача теплообмена типа (18), (19) имеет единственное решение. Поэтому в пространстве функций, удовлетворяющих однородным краевым условиям, ядро оператора W ($\ker W$) содержит только нулевой элемент ($\ker W = 0$), и неравенство (38) является условием сходимости итерационного процесса в обычном смысле. Для выполнения этого условия достаточно гарантировать $A_{n+1} > 0$.

Соотношение величин радиационных и конвективно-кондуктивных тепловых потоков в задачах сложного теплообмена может быть различным, и, в том числе, таким, которое приводит к малым величинам A_{n+1} или, в каких-то случаях, к $A_{n+1} = 0$, что влечет за собой соответственно медленную сходимость или "застывание" итерационного процесса. При этом достаточно высокая скорость сходимости может быть достигнута лишь при определенных значениях свободных параметров итерационного процесса.

Построим достаточные условия сходимости применительно к двум основным классам задач сложного теплообмена.

1. Пусть задача сложного теплообмена (1) является нестационарной.

В этом случае итерационный процесс (29) - (36) сходится, если рассматриваемый временной интервал V_τ достаточно мал. При этом минимизация нормы невязки может быть проведена по одному параметру.

Действительно, пусть $N=1$. Тогда, в соответствии с (37), можно записать

$$A_{n+1} = \frac{(Z_n, Z_n - Z_{n+1/2})}{\|Z_n - Z_{n+1/2}\|^2} = \frac{\|Z_n\|^2}{\|Z_n - Z_{n+1/2}\|^2} \left(1 - \frac{(Z_n, Z_{n+1/2})}{\|Z_n\|^2} \right) \quad (39)$$

Аналогично соотношениям (26), (27), исходя из (31), можно записать $U_{n+1/2} = GZ_n$, $Z_{n+1} = (\varpi I + \eta'_{ногл}(T_*) - \eta'_c(T_*))GZ_n$.

Используя неравенство Коши-Буняковского, получаем оценку

$$\frac{(Z_n, Z_{n+1/2})}{\|Z_n\|^2} \leq \|\varpi I + \eta'_{ногл}(T_*) - \eta'_c(T_*)\| \cdot \|G\|. \quad (40)$$

Учитывая, что $\eta'_c(T_*)$ является функцией вида (21), зададим параметр ϖ следующим образом:

$$\varpi = \eta'_c(T_*) = \int_{v=0}^{\infty} [4\alpha'_v(M)E'_{T,v}(T_*(M))] dv. \quad (41)$$

Тогда, используя (21) и оценку нормы интегрального оператора, приведенную в [9], запишем

$$\begin{aligned} & \|\varpi I + \eta'_{ногл}(T_*) - \eta'_c(T_*)\| = \|\eta'_{ногл}(T_*)\| \leq \\ & \leq \left[\int_V \int_{V_\tau} \int_{v=0}^{\infty} 4[\alpha'_v(M)\alpha'_v(M_1)E'_{T,v}(T_*(M_1))\Gamma_{V,v}(M, M_1)dv]^2 dV_{M_1} dV_M d\tau \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Так как, очевидно, $E'_{T,v}(T_*) < \infty$ при $T_* < \infty$, то $\|\varpi I + \eta'_{ногл}(T_*) - \eta'_c(T_*)\| \xrightarrow[\varpi = \eta'_c(T_*)V_\tau \rightarrow 0]{} 0$.

Оператор Грина G является непрерывным и ограниченным в L_2 [11], т. е. $\|G\| < \infty$. Поэтому, исходя из приведенных выше оценок, получаем $\frac{(Z_n, Z_{n+1/2})}{\|Z_n\|^2} \xrightarrow{V_\tau \rightarrow 0} 0$.

Следовательно, при достаточно малой величине временного интервала V_τ выполняется неравенство $\frac{(Z_n, Z_{n+1/2})}{\|Z_n\|^2} < 1$.

Учитывая, что множитель перед скобкой в (31) очевидно положителен, при достаточно малом V_τ , получаем $A_{n+1} > 0$, что и гарантирует убывание нормы невязки и, следовательно, сходимость итерационного процесса.

2. Пусть задача сложного теплообмена является стационарной.

В этом случае норма и скалярное произведение определяются соотношениями $\|\bullet\|^2 = \int_V (\bullet)^2 dV$, $(\bullet, \bullet) = \int_V (\bullet) \cdot (\bullet) dV$. Для выполнения условия сходимости (38) достаточно наличия хотя бы од-

ного ненулевого параметра $A_{i,n+1}$. Это означает, что система уравнений (35) должна иметь нетривиальное решение. Данное требование выполняется, если хотя бы один элемент матрицы $\Psi(Z)$ не равен нулю, что обеспечивается, по крайней мере, при специальном выборе параметра ϖ и разбиения (29).

Пусть, аналогично (41),

$$\varpi = \eta'_c(T_*) = \int_{v=0}^{\infty} 4\alpha'_v(M) E'_{T,v}(T_*(M)) dv. \quad (42)$$

Построим разбиение (29) в виде $Z_{i,n}(M) = \begin{cases} Z_n(M), & (M, \tau) \in V_i \\ 0, & (M, \tau) \notin V_i \end{cases}$, выделив достаточно малую подобласть $V_j \subset V$, в которой $|Z_n|$ достигает наибольшего значения, а сама невязка является знакопостоянной.

Пусть для определенности $Z_{j,n} > 0$. При принятом значении ϖ , как следует из (23),

$$Z_{j,n+1/2} = \eta'_{нозл}(T_*) U_{j,n+1/2}. \quad (43)$$

В краевой задаче (31) величина $Z_{i,n}$ представляет собой объемный тепловой источник. Свойства дифференциального оператора уравнения энергии, очевидно, таковы, что знак $U_{i,n+1/2}$ совпадает со знаком $Z_{i,n}$, если $Z_{i,n}$ - знакопостоянная функция. Следовательно, в данном случае $U_{i,n+1/2} \geq 0$. Тогда, так как $E'_{T,v} > 0$ и $\Gamma_{VV,v} \geq 0$, из соотношения (20) следует, что $Z_{j,n+1/2} = \eta'_{нозл}(T_*) U_{j,n+1/2} \geq 0$.

Рассмотрим j -тый элемент матрицы $\Psi(Z)$. Так как Z_n - непрерывная функция, на основании теоремы о среднем запишем

$$(Z_n, Z_{j,n} - Z_{j,n+1/2}) = Z_n^j \int_{V_j} Z_{j,n} dV - Z_n \int_V Z_{j,n+1/2} dV, \quad (44)$$

где Z_n^j и Z_n - некоторые средние значения Z_n в областях V_j и V соответственно.

Оценим интегралы в (44), используя соотношения, учитывающие особенности рассматриваемой задачи теплообмена. Из соотношения $U_{i,n+1/2} \geq 0$ с учетом однородного граничного условия в (31) ($U_{i,n+1/2}|_F = 0$) следует оценка

$$\int_V D U_{j,n+1/2} dV > 0. \quad (45)$$

Действительно, в данном случае

$$\int_V DU_{j,n+1/2} dV = \int_V \operatorname{div}(c_p \rho \vec{v} U_{j,n+1/2}) dV - \int_V \operatorname{div}(\lambda \nabla U_{j,n+1/2}) dV .$$

Используя теорему Гаусса-Остроградского, получаем

$$\int_V DU_{j,n+1/2} dV = \int_F c_p \rho v U_{j,n+1/2} \vec{v} \cdot \vec{n} dF - \int_F \lambda \nabla U_{j,n+1/2} \vec{n} dF ,$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности F . Учитывая далее приведенные выше свойства функции $U_{i,n+1/2}$, имеем

$$\int_F c_p \rho v U_{j,n+1/2} \vec{v} \cdot \vec{n} dF = 0 , \quad \int_F \lambda \nabla U_{j,n+1/2} \vec{n} dF < 0 .$$

Отсюда и следует оценка (45).

Второе соотношение связано с оценкой радиационных тепловых потоков. Тепловой поток $\eta'_{нозл}(T_*)U_{j,n+1/2}$ определяется путем решения задачи радиационного теплообмена в фундаментальной постановке при $E_{T,v}(T_w) = 0$, $E_{T,v}(T) = \eta'_c(T_*)U_{j,n+1/2}$. Так как $U_{i,n+1/2} \geq 0$ и $\eta'_c(T_*) > 0$, плотность потока равновесного излучения $E_{T,v}(T) \geq 0$ для всех точек в объеме V . Плотность потока равновесного излучения ограничивающих поверхностей $E_{T,v}(T_w) = 0$. В этих условиях, очевидно, объем V теряет теплоту излучением, т.е. $\int_V \eta_{рез} dV < 0$. Так как, по

определению [4], $\eta_{рез} = \eta_{нозл} - \eta_c$, то в рассматриваемом случае

$$\int_V \eta_{рез} dV = \int_V \eta'_{нозл}(T_*)U_{j,n+1/2} dV - \int_V \eta'_c(T_*)U_{j,n+1/2} dV < 0 .$$

Отсюда и следует искомая оценка

$$\int_V \eta'_{нозл}(T_*)U_{j,n+1/2} dV < \int_V \eta'_c(T_*)U_{j,n+1/2} dV . \quad (46)$$

Тогда из уравнения (31) с учетом соотношений (42), (43) и оценок (45), (46) последовательно получаем

$$\begin{aligned} \int_{V_j} Z_{j,n} dV &= \int_V Z_{j,n} dV = \int_V DU_{j,n+1/2} dV + \int_V \tilde{\omega} U_{j,n+1/2} dV = \int_V DU_{j,n+1/2} dV + \int_V \eta_{-}^{\odot}(T_*)U_{j,n+1/2} dV > \\ &> \int_V \eta_{-}^{\odot}(T_*)U_{j,n+1/2} dV > \int_V \eta_{\cdot, \cdot, B}^{\odot}(T_*)U_{j,n+1/2} dV = \int_V Z_{j,n+1/2} dV , \end{aligned}$$

т. е.

$$\int_V Z_{j,n} dV > \int_V Z_{j,n+1/2} dV . \quad (47)$$

Кроме того, выбранный способ выделения подобласти $V_j \subset V$ гарантирует выполнение неравенства

$$Z_n^j > Z_n \quad (48)$$

при достаточно малом объеме области V_j .

Используя неравенства (47), (48), из (44) получаем оценку

$$(Z_n, Z_{j,n} - Z_{j,n+1/2}) > 0 , \quad (49)$$

что и гарантирует существование ненулевого элемента в j -той строке матрицы $\Psi(Z)$ и выполнение условия сходимости (38).

Если $Z_{j,n} < 0$ в области V_j , то, очевидно, $U_{i,n+1/2} \leq 0$, $Z_{j,n+1/2} \leq 0$, знаки неравенств в (45), (47), (48) изменяются на противоположные. Тогда вместо (49) получаем неравенство $(Z_n, Z_{j,n} - Z_{j,n+1/2}) < 0$, что также гарантирует выполнение условия сходимости (38).

Таким образом, итерационный процесс (29), (31) - (36), основанный на процедуре минимизации нормы невязки линеаризованного уравнения энергии по системе параметров, сходится по квадратичной норме, если выполняются следующие условия.

1. Итерационный параметр ϖ выбран таким образом, что величина ϖT аппроксимирует в линеаризованной задаче величину собственного излучения элементов объема, т.е.

$$\varpi = \eta'_c(T_*) = \int_{\nu=0}^{\infty} 4\alpha'_\nu(M) E'_{T,\nu}(T_*(M)) d\nu.$$

Влияние количества зон в расчетной сетке задачи радиационного теплообмена на относительный объем вычислительных затрат

2. В нестационарных задачах расчетный интервал времени V_τ достаточно мал.
3. В стационарных задачах разбиение области V на подобласти построено таким образом, что в некоторой подобласти V_j содержится $\max_j |Z_n|$; невязка Z_n в этой подобласти является знакопостоянной величиной.

Условие 3 гарантирует сходимость итерационного процесса при наличии по крайней мере двух параметров минимизации $\|Z_{n+1}\|$.

Если начальное приближение T_0 задано достаточно близким к точному решению T_* , то сходимость итерационного процесса для линеаризованной задачи гарантирует сходимость аналогичного итерационного процесса для исходной нелинейной задачи сложного теплообмена [10].

С целью оценки эффективности метода итерационного расщепления проведено его сопоставление с известным зонально-узловым методом решения задач данного класса [14]. В качестве тестовой решалась задача сложного теплообмена при гидродинамически стабилизированном ламинарном течении в канале на основе "серой" модели излучения. При этом использовалась однопараметрическая схема минимизации нормы невязки (количество параметров минимизации $N = 1$). Алгоритмы зонально-узлового метода и метода итерационного расщепления реализовывались на основе одних и тех же базовых модулей при одинаковой конечномерной аппроксимации радиационной части задачи. Количество зон разбиения излучающего объема варьировалось. При реализации метода итерационного расщепления для решения конвективно-кондуктивной части задачи использовался алгоритм прогонки, для решения радиационной части задачи – итерационный метод Зейделя. Для сопоставления эффективности методов фиксировались затраты машинного времени. Результаты сопоставления указанных методов приведены на рисунке, где τ_1 и τ_2 – затраты машинного времени для метода итерационного расщепления и зонально-узлового метода соответственно, N – количество зон разбиения излучающего объема.

Приведенные результаты показывают, что алгоритм итерационного расщепления, благодаря оптимизации его структуры и возможности использования эффективных специализированных методов решения краевых задач для уравнений энергии и интегральных уравнений радиационного теплообмена, позволяет существенно снизить объем вычислительных затрат в том случае, когда радиационный теплоперенос играет существенную роль.

Таким образом, в данной работе рассмотрены основные особенности постановки задач сложного теплообмена, существенные для анализа вычислительных алгоритмов; изложена схема метода итерационного расщепления, позволяющая обеспечить гибкую модульную структуру вычислительного алгоритма и возможность использования эффективных специализированных методов решения частных задач радиационного и конвективно-кондуктивного теплопереноса; построены достаточные условия сходимости метода итерационного расщепления; эффективность метода проиллюстрирована путем сопоставления с зонально-узловым методом.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Арончик Г.И.* Декомпозиция в задачах сложного теплообмена // ИФЖ. 1989. № 5. С. 861-862.
2. *Арончик Г.И.* Метод итерационного расщепления в задачах сложного теплообмена. // Теплообмен-ММФ-92. Радиационный и комбинированный теплообмен. Т. 2. Минск: АНТ "ИТМО им. А.В. Лыкова", АНБ. 1992. С. 96-99.
3. *Лыков А.В.* Теплообмен: Справочник. М.: Энергия, 1978. 480 с.
4. *Адрианов В.Н.* Основы радиационного и сложного теплообмена. М.: Энергия, 1972. 464 с.
5. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Т. 4, ч. 1. М.: Наука, 1974. 336 с.
6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1980. 536 с.
7. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 590 с.
8. *Суринов Ю.А.* К теории переноса излучения и лучистого теплообмена в поглощающей и рассеивающей среде. // Изв. АН СССР. Энергетика и транспорт. 1966. N 6. С. 127-153.
9. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 741 с.
10. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М. и др.* Приближённое решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969. 456 с.
11. *Мизохата С.* Теория уравнений с частными производными. М.: Мир, 1977. 504 с.
12. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
13. *Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А.* Итерационные методы и квадратичные функционалы // Методы вычислительной математики. Новосибирск: Наука, 1975. С. 4-143
14. *Маликов Г.К., Лисиенко В.Г., Маликов Ю.К., Движанинов А.Б.* Зонально-узловой метод совместного решения уравнений гидродинамики и теплообмена излучением // ТВТ. 1985. Т. 23, N 6. С. 1103-1111.