Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. М. Хачев, Об одной задаче для уравнения смешанного типа с двумя плоскостями вырождения в бесконечной призматической области, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 15–18

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu90>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 12:32:37

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ ВЫРОЖДЕНИЯ В БЕСКОНЕЧНОЙ ПРИЗМАТИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Доказана теорема об однозначной разрешимости задачи Дирихле для уравнения смешанного типа с двумя ортогональными плоскостями параболического вырождения.

Постановка задачи и сведение ее к плоской задаче

Пусть Ω есть бесконечная призматическая область трехмерного пространства (x, y, z) , ограниченная поверхностями

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq l, y = b, -\infty < z < +\infty\}; \\ S_2 &= \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq l, y = -a, -\infty < z < +\infty\}; \\ S_3 &= \{(x, y, z) : x = 0, -a \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty\}; \\ S_4 &= \{(x, y, z) : x = l, -a \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty\}, \end{aligned}$$

где $a, b, l \equiv \text{const} > 0$.

В области Ω рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sgn} y |y|^m V_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m V_{yy} + \operatorname{sgn} xy |xy|^m V_{zz} = 0, \quad m > 0, \quad (1)$$

которое является эллиптическим при $x > 0, y > 0$ и гиперболическим - при $x > 0, y < 0$ пространства (x, y, z) , за исключением плоскостей $x = 0$ и $y = 0$, на которых оно параболически вырождается.

Обозначим через $\Omega^+ = \Omega \cap (y > 0)$, $\Omega^- = \Omega \cap (y < 0)$ эллиптическую и гиперболическую части смешанной области Ω соответственно.

Задача Дирихле. Найти решение $V \equiv V(x, y, z)$ уравнения (1) в области Ω со следующими свойствами:

- 1) $V \in C(\overline{\Omega})$;
- 2) $V \in C^1(\Omega) \cap C^2(\Omega^+ \cup \Omega^-)$ за исключением, быть может, плоскостей вырождения

$$S_0 = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq l, y = 0, -\infty < z < +\infty\},$$

$$S_3 = \{(x, y, z) : x = 0, -a \leq y \leq b, -\infty < z < +\infty\};$$
- 3) V удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} V|_{S_1} &= Y_1(x, z), \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\infty < z < +\infty; \\ V|_{S_2} &= Y_2(x, z), \quad 0 \leq x \leq l, \quad -\infty < z < +\infty; \\ V|_{S_3} &= V|_{S_4} = 0, \quad -a \leq y \leq b, \quad -\infty < z < +\infty; \end{aligned}$$

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} V = 0 \text{ равномерно относительно } (x, y) \in \overline{\Omega} \cap (z = 0).$$

Функции $Y_1(x, z)$ и $Y_2(x, z)$ считаем непрерывными в областях своего определения (S_1 и S_2 соответственно); абсолютно интегрируемыми по z при $-\infty < z < +\infty$, $0 \leq x \leq l$; равномерно относительно x , стремящимся к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$. В дальнейшем, для того чтобы обеспечить принадлежность решения задачи требуемому классу, на $Y_1(x, z)$ и $Y_2(x, z)$ будут наложены еще некоторые ограничения. Принятые же предложения относительно поведения функций $Y_1(x, z)$, $Y_2(x, z)$ и $V(x, y, z)$ позволяют использовать для решения задачи Дирихле метод преобразования Фурье, рекомендованный А.В. Бицадзе [1]. В самом деле, эти ограничения позволяют ввести преобразования Фурье:

$$V(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, y, l) e^{-ilz} dl. \quad (2)$$

Функция $u(x, y, l)$ выражается через $V(x, y, z)$ с помощью обратного преобразования Фурье:

$$u(x, y; l) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} V(x, y, z) e^{ilz} dz, \quad l \in R. \quad (3)$$

Введем обозначения: $D = \Omega \cap (z = 0)$, $D^+ = D \cap (y > 0)$, $D^- = D \cap (y < 0)$.

Справедлива следующая **лемма**:

1) Пусть функция $u(x, y, l)$, являясь решением уравнения

$$\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m u_{yy} - l^2 \operatorname{sgn} xy |xy|^m u = 0, \quad l \in R, \quad (4)$$

такова, что интеграл (2) допускает двухкратное дифференцирование по каждому из параметров x, y, z . Тогда функция $V(x, y, z)$, определяемая этим интегралом, является решением уравнения (1);

2) если функция $V(x, y, z)$ есть решение уравнения (1), причем такое, что

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} V = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} V_z = 0$$

равномерно относительно $(x, y) \in D$ и интеграл (3) можно дифференцировать два раза по каждому из параметров x и y , то функция $u(x, y; l)$ из (3) удовлетворяет уравнению (4).

Доказательство. Дифференцируя (2), найдем

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{sgn} y |y|^m V_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m V_{yy} + \operatorname{sgn} xy |xy|^m V_{zz} \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ilz} [\operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m u_{yy} - l^2 \operatorname{sgn} xy |xy|^m u] dl. \end{aligned}$$

Отсюда следует справедливость первого утверждения леммы. Далее, из (3) имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \operatorname{sgn} y |y|^m u_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m u_{yy} - l^2 \operatorname{sgn} xy |xy|^m u \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ilz} [\operatorname{sgn} y |y|^m V_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m V_{yy} - l^2 \operatorname{sgn} xy |xy|^m V] dz. \end{aligned}$$

Проинтегрировав последнее слагаемое под знаком интеграла по частям и принимая во внимание, что $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} V = \lim_{z \rightarrow \pm\infty} V_z = 0$, получим

$$\frac{1}{2p} \int_{-\infty}^{+\infty} [\operatorname{sgn} y |y|^m V_{xx} + \operatorname{sgn} x |x|^m V_{yy} - l^2 \operatorname{sgn} xy |xy|^m V] e^{ilz} dz = 0.$$

Отсюда следует справедливость второй части леммы.

Задача Дирихле. Найти решение $u \equiv u(x, y; l)$ уравнения (4) в области D , обладающее следующими свойствами:

- 1) $u \in C(\overline{D})$;
- 2) $u \in C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$ за исключением, быть может, характеристик уравнения (4);
- 3) удовлетворяет краевым условиям:

$$\begin{aligned} u(x, b; l) &= y_1(x, l), \quad u(x, -a; l) = y_2(x, l), \quad 0 \leq x \leq l, \quad l \in R, \\ u(0, y; l) &= 0, \quad u(l, y; l) = 0, \quad -a \leq y \leq b, \quad l \in R, \end{aligned}$$

где

$$y_j(x, l) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_j(x, z) e^{ilz} dz, \quad j = 1, 2; \quad l \in R. \quad (5)$$

Таким образом, сопоставляя задачи Дирихле в областях Ω и D , видим, что доказательство существования решения задачи Дирихле в области для уравнения (1) сводится к доказательству разрешимости задачи Дирихле в области D для уравнения (4) при любом действительном значении параметра $l \in R$.

Относительно граничных функций $y_1(x, l)$ и $y_2(x, l)$ предполагаем, что непериодические функции $\overline{y}_1(x, l)$ и $\overline{y}_2(x, l)$ при фиксированных значениях $l \in R$, полученные от $y_1(x, l)$ и $y_2(x, l)$ путем нечетного продолжения на отрезок $[-l, 0]$, а за тем на всю ось с периодом $2l$,

являются трижды непрерывно дифференцируемыми на R при любом действительном значении параметра l .

Обозначим через

$$a_m = \frac{2}{l^2 J_{u+1}^2(j_{m,u})} \int_0^l t \cdot f(t) J_u(j_{m,u} t) dt,$$

где $u + \frac{1}{2} \geq 0$, $j_{m,u}$ - корни функции Бесселя первого рода порядка u .

Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а Гобсона [2]. Пусть:

1) $f(t)$ произвольная функция, заданная на интервале $(0, l)$;

2) $\int_0^l \sqrt{t} f(t) dt$ существует и абсолютно сходится;

3) x - какая-нибудь внутренняя точка интервала (a, b) , такого, что $0 < a < b < l$ и $f(t)$ имеет на нем ограниченное полное изменение.

Тогда ряд Фурье- Бесселя $\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_u(j_{m,u} x)$

сходится и сумма его равна $\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$. Если $f(0) = f(l) = 0$, то сходимость имеет место в $[0, l]$

Введем функцию:

$$E_n(a_1, b_1) = \sqrt{ab} [J_p(a_1 m_n(l)) I_{-p}(b_1 m_n(l)) + J_{-p}(a_1 m_n(l)) I_p(b_1 m_n(l))],$$

где $a_1 = 2p^2 \sqrt[p]{a}$, $b_1 = 2p^2 \sqrt[p]{b}$, $m_n^2(l) = l^2 + k_n^2$, $l \in R$, $k_n = j_{p,n} / (2p^2 \sqrt[p]{l})$, $j_{p,n}$ - корни функции Бесселя первого рода порядка $p = \frac{1}{2+m}$.

Имеет место следующая основная теорема.

Т е о р е м а. Пусть:

1) постоянные величины a, b, l таковы, что для всех $n \in N$ и фиксированных значений $l \in R$

$$E_n(a_1, b_1) \neq 0;$$

2) функции $y_1(x, l)$ и $y_2(x, l)$ удовлетворяют условиям теоремы Гобсона при любом действительном значении параметра $l \in R$;

3) для всех $n = 1, 2, 3, \dots$ и фиксированных значений $l \in R$ имеет место неравенство

$$\inf_n \sqrt{m_n(l)} |E_n(a_1, b_1)| > 0.$$

Тогда существует единственное решение задачи Дирихле для уравнения (4) в области D , представимое в виде

$$u(x, y; l) = \begin{cases} u^+(x, y; l), & \text{если } (x, y) \in D^+, \quad l \in R; \\ u^-(x, y; l), & \text{если } (x, y) \in D^-, \quad l \in R, \end{cases}$$

где

$$u^+(x, y; l) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{M_n(a_1, y)}{E_n(a_1, b_1)} y_{1n}(l) + \frac{N_n(b_1, y)}{E_n(a_1, b_1)} y_{2n}(l) \right] (\sqrt{x} J_p(j_{p,n} \sqrt[p]{\frac{x}{l}})), \quad (6)$$

$$u^-(x, y; l) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{K_n(a_1, y)}{E_n(a_1, b_1)} y_{1n}(l) + \frac{Z_n(b_1, y)}{E_n(a_1, b_1)} y_{2n}(l) \right] (\sqrt{x} J_p(j_{p,n} \sqrt[p]{\frac{x}{l}})), \quad (7)$$

$$M_n(a_1, y) = \sqrt{ay} [I_p(\bar{y}) J_{-p}(\bar{a}) + I_{-p}(\bar{y}) J_p(\bar{a})], \quad N_n(b_1, y) = \sqrt{by} [I_p(\bar{b}) I_{-p}(\bar{y}) - I_{-p}(\bar{y}) I_p(\bar{b})],$$

$$K_n(a_1, y) = \sqrt{-ay} [J_p(\bar{a}) J_{-p}(\bar{y}) - J_{-p}(\bar{a}) J_p(\bar{y})], \quad Z_n(b_1, y) = \sqrt{-by} [J_p(\bar{y}) I_{-p}(\bar{b}) - J_{-p}(\bar{y}) I_p(\bar{b})],$$

$$\bar{y} = 2p^2 \sqrt[p]{|y|} m_n(l), \quad \bar{a} = a_1 m_n(l), \quad \bar{b} = b_1 m_n(l).$$

Теорема доказывается методом разделения переменных с учетом свойств бесселевых функций [2].

Единственность и существование решения пространственной задачи Дирихле

Определение 1. Решением задачи Дирихле в области Ω для уравнения (1) класса F будем называть функцию $V(x, y, z)$, определяемую формулой (2), в которой $u(x, y; I)$ является решением задачи Дирихле в области D для уравнения (4) класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D^+ \cup D^-)$.

Т е о р е м а 1. В классе F существует не более одного решения задачи Дирихле для уравнения (1) в области Ω , если $V|_{\partial\Omega} = 0$, где $\partial\Omega$ – граница области Ω .

Доказательство. Пусть $y_1(x, z) \equiv 0$, $y_2(x, z) \equiv 0$. Тогда из формул

$$y_j(x, I) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_j(x, z) e^{ilz} dz \quad (j=1, 2)$$

следует, что $y_j(x, I) \equiv 0$, $j=1, 2, I \in R$. Следовательно, $u(x, y; I) \equiv 0$ в D и из вышеприведенной формулы получаем, что $V \equiv 0$ в Ω . Теорема доказана.

Определение 2. Функции $y_1(x, z)$, $y_2(x, z)$ принадлежат классу Q_I , если:

1) они непрерывны в области своего определения (S_1 и S_2 соответственно); абсолютно интегрируемы по z при $-\infty < z < +\infty$, $0 \leq x \leq l$; равномерно относительно x стремятся к нулю при $z \rightarrow \pm\infty$;

2) их преобразования Фурье

$$y_j(x, I) = \frac{1}{\sqrt{2p}} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_j(x, z) e^{ilz} dz, \quad j=1, 2 \quad (8)$$

при $|I| \rightarrow +\infty$ имеют оценки

$$y_1(x, I) = O\left(\frac{1}{|I|^{1+e} e^{|I|}}\right), \quad y_2(x, I) = O\left(\frac{1}{|I|^{1+e} e^{|I|}}\right), \quad e > 0.$$

Если функции $\Psi_j(x, z) \in Q_I$, $j=1, 2$, то из формул (6) и (7) с учетом асимптотических представлений бесселевых функций

$$I_{\pm u}(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2pz}}, \quad J_{\pm u}(z) = \sqrt{\frac{2}{pz}} \cos\left(z \mathbf{m} \frac{pu}{2} - \frac{p}{4}\right)$$

и оценок (8) легко получаем оценку для функций $u(x, y; I)$ при $|I| \rightarrow +\infty$:

$$u(x, y; I) = O\left(\frac{1}{|I|^{1+e}}\right), \quad (x, y) \in \overline{D},$$

которая обеспечивает существование интеграла (2).

Т е о р е м а 2. Если $\Psi_j(x, z) \in Q_I$ ($j=1, 2$), то существует единственное решение класса F задачи Дирихле в области Ω для уравнения (1).

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1, леммы и формулы (5).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бицадзе А.В. Об одном трехмерном аналоге задачи Трикоми // Сибир. мат. журн. 1962. Т.3. Вып. 5. С. 642-644.
2. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. Ч.1. М.: ИЛ, 1949. 480 с.