Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Козлова, Специальные решения матричного уравнения Геллерстедта,
Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 2011, выпуск 1(), 108–112

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu909>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 13:22:40

УДК 517.956.6

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МАТРИЧНОГО
УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА*Е. А. Козлова*Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mail: leni2006@mail.ru

С помощью метода И. М. Гельфанда и Х. Баррос—Нето, применённого ими к исследованию уравнения Трикоми, в пространстве распределений построены фундаментальные решения для уравнения Геллерстедта, а также для его обобщения. Рассмотрена вырождающаяся система дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа, найдены её специальные решения в областях, ограниченных характеристиками уравнений (в гиперболической полуплоскости). В построении использованы элементы теории матриц, теории обобщённых функций и некоторые специальные функции (гипергеометрический ряд).

Ключевые слова: фундаментальное решение, обобщённые функции, функции от матриц.

Фундаментальные решения дифференциальных операторов — важный инструмент решения различных задач для уравнений в частных производных.

Пусть задан некоторый дифференциальный оператор L . Фундаментальное решение E оператора L — обобщённая функция, удовлетворяющая уравнению с δ -функцией в правой части: $LE = \delta$. Известно, что частное решение соответствующего неоднородного уравнения $Lu = f$ можно построить в виде свёртки фундаментального решения оператора L с правой частью уравнения $u = E * f$ [1].

В работах [2–4] И. М. Гельфанд и Х. Баррос—Нето построили фундаментальные решения дифференциального оператора Трикоми относительно точки (x_0, y_0) , лежащей в полуплоскости $y_0 < 0$, на основе специального решения уравнения Трикоми $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ вида

$$E(x, y; x_0, y_0) = \left[4(-y_0)^3 + 4(-y)^3 - 9(x - x_0)^2 + 8(-y_0)^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}} \right]^{-\frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \zeta\right),$$

где

$$\zeta = \frac{9(x - x_0)^2 - 4(-y)^3 - 4(-y_0)^3 + 8(-y_0)^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}}{9(x - x_0)^2 - 4(-y)^3 - 4(-y_0)^3 - 8(-y_0)^{\frac{3}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}},$$

а $F(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 1; \zeta)$ — гипергеометрическая функция [5].

Характеристики уравнения Трикоми, проходящие через точку (x_0, y_0) , делят плоскость на области D_I и D_I^* (D_I лежит ниже обеих характеристик, а D_I^* — дополнение D_I до $\mathbb{R}^2$), в которых $E_I(x, y; x_0, y_0) = \gamma E(x, y; x_0, y_0)$ и

Елена Александровна Козлова, аспирант, каф. прикладной математики и информатики.

$E_I^*(x, y; x_0, y_0) = -\gamma E(x, y; x_0, y_0)$ — фундаментальные решения соответственно в D_I и D_I^* ; $\gamma = 2^{-1/3}$.

Результаты работ [2–4] можно обобщить на случай уравнения Геллерстедта [6]:

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где m — положительное нечетное число, а также уравнения с вещественным параметром $\alpha > 0$:

$$\text{sign}(y)|y|^\alpha u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Представляет интерес следующая модификация уравнения:

$$\text{sign}(y)|y|^A u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

где A — постоянная квадратная матрица размерности $(n \times n)$, $u = u(x, y)$ — n -мерный вектор-столбец. Назовём это уравнение *матричным уравнением Геллерстедта*.

Рассмотрим дифференциальный оператор $L_\alpha : C^2(X) \rightarrow C(X)$, $X \subset \mathbb{R}^2$, действующий по правилу

$$L_\alpha = \text{sign}(y)|y|^\alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

и его матричный аналог $L_A : M^2(X) \rightarrow M(X)$, $X \subset \mathbb{R}^2$ (под пространством $M^p(X)$ понимаем пространство $(n \times n)$ -матриц с элементами из $C^p(X)$), действующий как

$$L_A = \text{sign}(y)|y|^A \frac{\partial^2}{\partial x^2} + I \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Здесь I — единичная матрица $(n \times n)$.

Попытаемся получить частное решение неоднородного матричного уравнения Геллерстедта $L_A u = f$ аналогично скалярному случаю. Для этого построим его специальные частные решения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Специальным решением* матричного уравнения Геллерстедта назовём матрицу-функцию $\mathbf{E}$, удовлетворяющую уравнению

$$L_A \mathbf{E}(x, y; x_0, y_0) = I \delta(x - x_0; y - y_0).$$

Тогда для $\mathbf{E}$ получаем следующее уравнение:

$$\text{sign}(y)|y|^A \mathbf{E}_{xx} + \mathbf{E}_{yy} = I \delta(x - x_0; y - y_0).$$

Упростим полученное выражение. Пусть J — нормальная Жорданова форма матрицы A , к которой приводит невырожденное преобразование T , то есть $A = T J T^{-1}$ [7]. Поэтому

$$\text{sign}(y)T|y|^J T^{-1} \mathbf{E}_{xx} + \mathbf{E}_{yy} = I \delta(x - x_0; y - y_0),$$

что после умножения слева на T^{-1} и замены $T^{-1} \mathbf{E} = W$ даёт

$$\text{sign}(y)|y|^J W_{xx} + W_{yy} = I \delta(x - x_0; y - y_0).$$

Для определённости будем рассматривать $u = (u_1(x, y), u_2(x, y))^T$ и матрицу (2×2) $A = (a_{ij})$ с различными положительными собственными значениями λ_1, λ_2 . Тогда Жорданова форма J имеет вид $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$, а $|y|^J = \text{diag}(|y|^{\lambda_1}, |y|^{\lambda_2})$. Распишем матричное равенство покомпонентно

$$\begin{pmatrix} |y|^{\lambda_1} & 0 \\ 0 & |y|^{\lambda_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11xx} & W_{12xx} \\ W_{21xx} & W_{22xx} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{11yy} & W_{12yy} \\ W_{21yy} & W_{22yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \delta,$$

где $T^{-1} = S = (s_{ij})$, из которого получаем четыре уравнения:

$$\text{sign}(y)|y|^{\lambda_i} W_{ijxx} + W_{ijyy} = s_{ij} \delta, \quad i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Применим замены вида $W_{ij} = V_{ij}s_{ij}$, которые сведут их к обычным уравнениям для нахождения фундаментальных решений с δ -функцией в правой части (или нулём, если какая-то из компонент s_{ij} равна нулю; тогда в нуль обратится и соответствующая компонента решения W_{ij}):

$$\text{sign}(y)|y|^{\lambda_i} V_{ijxx} + V_{ijyy} = \delta, \quad i = 1, 2, j = 1, 2.$$

Решения таких уравнений — фундаментальные решения оператора L_{λ_i} относительно точки (x_0, y_0) , $y_0 < 0$. Они аналогичны решениям И. М. Гельфанда и Х. Баррос—Нето и выражаются через функцию

$$E(x, y; x_0, y_0; \lambda_i) = \left[4(-y_0)^{\lambda_i+2} + 4(-y)^{\lambda_i+2} - (\lambda_i + 2)^2(x - x_0)^2 + 8(-y_0)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}(-y)^{\frac{\lambda_i}{2}+1} \right]^{-\beta_{\lambda_i}} F(\beta_{\lambda_i}, \beta_{\lambda_i}, 1; \zeta_{\lambda_i}),$$

где

$$\beta_{\lambda_i} = \frac{\lambda_i}{2(\lambda_i + 2)},$$

$$\zeta_{\lambda_i} = \frac{(\lambda_i + 2)^2(x - x_0)^2 - 4(-y)^{\lambda_i+2} - 4(-y_0)^{\lambda_i+2} + 8(-y_0)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}(-y)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}}{(\lambda_i + 2)^2(x - x_0)^2 - 4(-y)^{\lambda_i+2} - 4(-y_0)^{\lambda_i+2} - 8(-y_0)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}(-y)^{\frac{\lambda_i}{2}+1}},$$

$F(\beta_{\lambda_i}, \beta_{\lambda_i}, 1; \zeta_{\lambda_i})$ — гипергеометрическая функция. Если обозначить через $D_{I\lambda_i}$ и $D_{I\lambda_i}^*$ области, на которые плоскость делят характеристики уравнения $L_{\lambda_i} u = 0$, и обозначить

$$\gamma(\lambda_i) = 2^{\frac{\lambda_i-2}{\lambda_i+2}}, \quad (1)$$

то

$$V_{ij} = V_{ij}(x, y; x_0, y_0; \lambda_i) = \begin{cases} \gamma(\lambda_i) E(x, y; x_0, y_0; \lambda_i), & (x, y) \in D_{I\lambda_i}; \\ -\gamma(\lambda_i) E(x, y; x_0, y_0; \lambda_i), & (x, y) \in D_{I\lambda_i}^*. \end{cases}$$

Учитывая, что $W_{ij} = V_{ij}s_{ij}$, и записывая W в виде матрицы, получим (опуская аргументы $(x, y; x_0, y_0)$)

$$W = \begin{pmatrix} V_{11}(\lambda_1)s_{11} & V_{12}(\lambda_1)s_{12} \\ V_{21}(\lambda_2)s_{21} & V_{22}(\lambda_2)s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm\gamma(\lambda_1)E(\lambda_1)s_{11} & \pm\gamma(\lambda_1)E(\lambda_1)s_{12} \\ \pm\gamma(\lambda_2)E(\lambda_2)s_{21} & \pm\gamma(\lambda_2)E(\lambda_2)s_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \Xi_J \begin{pmatrix} \gamma(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \gamma(\lambda_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(\lambda_1) & 0 \\ 0 & E(\lambda_2) \end{pmatrix} S,$$

где множитель Ξ_J отвечает за знак выражения в нужной области. Теперь перепишем (1) с использованием функций от матриц:

$$\gamma(J) = \begin{pmatrix} \gamma(\lambda_1) & 0 \\ 0 & \gamma(\lambda_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{\frac{\lambda_1-2}{\lambda_1+2}} & 0 \\ 0 & 2^{\frac{\lambda_2-2}{\lambda_2+2}} \end{pmatrix} = 2^{(J-2I)K^{-1}},$$

где $K = J + 2I$. Тогда

$$E(J) = \begin{pmatrix} E(\lambda_1) & 0 \\ 0 & E(\lambda_2) \end{pmatrix} = \exp \left[-\frac{1}{2} J K^{-1} \ln(4(-y_0)^K + 4(-y)^K - K^2(x-x_0)^2 + 8(-y_0)^{\frac{1}{2}K}(-y)^{\frac{1}{2}K}) \right] F\left(\frac{1}{2} J K^{-1}, \frac{1}{2} J K^{-1}, 1; Z(J)\right),$$

где

$$Z(J) = \begin{pmatrix} \zeta_{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \zeta_{\lambda_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^2(x-x_0)^2 - 4(-y_0)^K - 4(-y)^K + \\ + 8(-y_0)^{\frac{1}{2}K}(-y)^{\frac{1}{2}K} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K^2(x-x_0)^2 - 4(-y_0)^K - 4(-y)^K - 8(-y_0)^{\frac{1}{2}K}(-y)^{\frac{1}{2}K} \end{pmatrix},$$

$F(A, B, C; z)$ — обобщение гипергеометрической функции на случай матричных параметров, а степенная функция выражена через экспоненту и логарифм, обобщения которых на матричный случай описаны, например, в [7]. За знак в областях I, II, III (см. рисунок) отвечает матрица Ξ :

$$\Xi_J = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (x, y) \in D_{I\lambda_1}, & \text{(I);} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, & (x, y) \in D_{I\lambda_2} \setminus D_{I\lambda_1}, & \text{(II);} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D_{I\lambda_2}, & \text{(III).} \end{cases}$$

Теперь нужно вернуться к решению $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = T W = T \Xi_J \gamma(J) E(J) T^{-1} = T \Xi_J T^{-1} T \gamma(J) T^{-1} T E(J) T^{-1} = \Xi_A \gamma(A) E(A).$$

Итак, на основе фундаментальных решений, полученных И. М. Гельфандом и Х. Баррос—Нето в [2–4], построено специальное частное решение матричного уравнения Геллерстедта.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Владимирцов В. С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. 512 с. [Vladimirov V. S. Equations of mathematical physics. Moscow: Nauka, 1981. 512 pp.]

2. *Barros-Neto J., Gelfand I. M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator // *Duke Math. J.*, 1999. Vol. 98, no. 3. Pp. 465–483.
3. *Barros-Neto J., Gelfand I. M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, II // *Duke Math. J.*, 2002. Vol. 111, no. 3. Pp. 561–584.
4. *Barros-Neto J., Gelfand I. M.* Fundamental solutions for the Tricomi operator, III // *Duke Math. J.*, 2005. Vol. 128, no. 1. Pp. 119–140.
5. *Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G.* Higher transcendental functions. Vol. I / ed. H. Bateman. New York – Toronto – London: McGraw-Hill Book Co, Inc., 1953. 302 pp.; русск. пер.: Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. В 3-х т. Т. 1: Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра. М.: Наука, 1973. 296 с.
6. *Gellerstedt S.* Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$ // *Ark. Mat. Astron. Fys. A*, 1937. Vol. 26, no. 3. Pp. 1–32.
7. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1988. 549 с. [*Gantmakher F. R.* Theory of matrices. Moscow: Nauka, 1988. 549 pp.]

Поступила в редакцию 22/XII/2010;
в окончательном варианте — 24/II/2011.

MSC: 35M10; 35A08

SPECIAL SOLUTIONS OF MATRIX GELLERSTEDT EQUATION

E. A. Kozlova

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
E-mail: leni2006@mail.ru

Fundamental solutions for the Gellerstedt equation and its generalization were obtained in the distribution space using the method applied by I. M. Gelfand and J. Barros-Neto to the studying the Tricomi equation. The degenerating system of the mixed-type partial differential equations was considered, its special solutions were constructed in the regions bounded by the characteristics of these equations (in the hyperbolic half-plane). The elements of the theory of matrices, theory of the generalized functions and the special functions (hypergeometric series) were used for this construction.

Key words: *fundamental solution, generalized functions, matrix functions.*

Original article submitted 22/XII/2010;
revision submitted 24/II/2011.

Elena A. Kozlova, Postgraduate Student, Dept. of Applied Mathematics & Computer Science.