Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Андреев, Е. Н. Огородников, Некоторые локальные и нелокальные аналоги задачи Коши–Гурса для системы уравнений типа Бицадзе–Лыкова с инволютивной матрицей, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 19–35

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu91>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 10:05:51

НЕКОТОРЫЕ ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ЗАДАЧИ КОШИ-ГУРСА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТИПА БИЦАДЗЕ-ЛЫКОВА С ИНВОЛЮТИВНОЙ МАТРИЦЕЙ

Рассмотрена вырождающаяся система двух гиперболических в полуплоскости уравнений с кратными характеристиками. Показано, что в случае инволютивности матричного коэффициента при младшей производной для этой системы уравнений отсутствует единственность решения задачи Коши-Гурса с данными на любой из характеристик, ограничивающих область существования решения задачи Коши. В указанных условиях обоснована корректность некоторых локальных и нелокальных аналогов задачи Коши-Гурса.

Неединственность решения задач Коши-Гурса

Обозначим M_n – множество постоянных матриц порядка n . Пусть матрица $G \in M_n$. Обозначим $\Lambda(G) = \{I_i\}$ – спектр матрицы G , I_i – собственные значения матрицы G , $I_i \in \mathbb{C}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$L_{m,A}(\mathbf{u}) \equiv y^{2m} \mathbf{u}_{xx} - \mathbf{u}_{yy} + mAy^{m-1} \mathbf{u}_x = 0 \quad (1)$$

при $m > 0$ с инволютивной над полем $\mathbf{R}$ действительных чисел матрицей $A \in M_2$ и вектором искомых функций $\mathbf{u}(x, y) = (u_1, u_2)^T$ в области Ω , ограниченной отрезком $[0, 1]$ линии вырождения типа $y = 0$ и ее характеристиками $x = 0$ и $h = 1$, где

$$x = x - \frac{1}{m+1} y^{m+1} \text{ и } h = x + \frac{1}{m+1} y^{m+1}. \quad (2)$$

В работе [1] система уравнений (1) при $m = 1$ приведена как пример системы, для которой задача Коши-Гурса с данными на любой из двух граничных характеристик некорректна в смысле отсутствия единственности решения. Отмеченная при $m = 1$ особенность этой системы сохраняется и для любых $m > 0$ [2].

В характеристических координатах (2) система уравнений (1) приводится к системе уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД – системе) специального вида:

$$(h-x)\mathbf{u}_{xh} + \frac{a}{2}(E+A)\mathbf{u}_x - \frac{a}{2}(E-A)\mathbf{u}_h = 0, \quad a = \frac{m}{m+1}, \quad (3)$$

для которой, используя результаты работ [3, 4] и методы, изложенные в работе [5], нетрудно получить решение задачи Коши методом Римана.

Утверждение. Регулярное в Ω решение $\mathbf{u}(x, y)$ системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным данным

$$\lim_{y \rightarrow +0} \mathbf{u}(x, y) = \mathbf{t}(x) = (t_1, t_2)^T; \quad (5)$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \mathbf{u}_y(x, y) = \mathbf{n}(x) = (n_1, n_2)^T, \quad (6)$$

при $\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x) \in C^2(0, 1)$ имеет вид

$$\mathbf{u}(x, h) = \frac{E+A}{2} \left[\mathbf{t}(h) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(h-s)^a} \right] + \frac{E-A}{2} \left[\mathbf{t}(x) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a} \right], \quad (7)$$

где ξ и η определяются формулами (2).

З а м е ч а н и е. Если в условиях утверждения вектор-функции $\mathbf{t}(x), \mathbf{n}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, то формула (7) является решением задачи Коши для системы уравнений (1) в классе функций

$$\mathbf{u}(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup (0, 1)) \cap C^2(\Omega) \quad (8)$$

с начальными данными

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{t}(x); \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_y(x, 0) = \mathbf{n}(x). \quad (10)$$

Если же относительно вектор-функции $\mathbf{n}(x)$ потребовать лишь свойства: $\mathbf{n}(x) \in C^2(0, 1) \cap L([0, 1], x^a, (1-x)^a)$, то формула (7) будет решением задачи Коши с начальными данными (6) и (9) в классе функций

$$\mathbf{u}(x, y) \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad (11)$$

что принято называть классическим решением [6].

Так как матрица A инволютивна, то $A^2 = E$, а ее спектр $\Lambda(A) \subset \{1; -1\}$. Хорошо известно [7], что при выполнении условия $a^2 + bc = 1$ произвольная инволютивная матрица второго порядка может быть записана в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; \quad a, b, c \in \mathbf{R}. \quad (12)$$

Пусть для определенности $a \geq 0$; $\mathbf{r}_1 = (a+1; c)^T$, $\mathbf{r}_2 = (-b; 1+a)^T$ – собственные векторы матрицы A , соответствующие собственным значениям $I_1 = 1$ и $I_2 = -1$. Обозначим $\mathbf{e}_1 = (1+a; b)$ и $\mathbf{e}_2 = (-c; 1+a)$ – собственные векторы матрицы A^* , сопряженной матрице A . Известно [8], что над полем действительных чисел матрица $A^* = A^T$, где A^T – транспонированная матрица A и $\Lambda(A) = \Lambda(A^T)$.

Собственные числа матриц A и A^T определяют собственные векторы неоднозначно. Выбор указанных выше собственных векторов связан со структурой матриц $E + A$ и $E - A$:

$$E + A = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & 1-a \end{pmatrix} = (\mathbf{r}_1; k\mathbf{r}_1) = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ n\mathbf{e}_1 \end{pmatrix}; \quad (13)$$

$$E - A = \begin{pmatrix} 1-a & -b \\ -c & 1+a \end{pmatrix} = (-n\mathbf{r}_2; \mathbf{r}_2) = \begin{pmatrix} -k\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где $k = \frac{b}{1+a}$, $n = \frac{c}{1+a}$.

Пусть

$$\Theta_0(x) = \left(\frac{x}{2}; \left(\frac{m+1}{2} x \right)^{\frac{1}{m+1}} \right) \text{ и } \Theta_1(x) = \left(\frac{1+x}{2}; \left(\frac{m+1}{2} (1-x) \right)^{\frac{1}{m+1}} \right) -$$

аффиксы точек пересечения характеристик системы уравнений (1), выходящих из произвольной точки $x \in [0, 1]$ с характеристиками $x = 0$ и $h = 1$ соответственно.

Рассмотрим для системы уравнений (1) следующую задачу.

Задача Коши-Гурса I (левая). Найти регулярное в Ω решение системы уравнений (1) с начальными данными (10) и условием на характеристике $x = 0$.

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \mathbf{j}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (15)$$

Имея цель найти решение поставленной задачи в форме решения задачи Коши (7), вычислим значение вектора $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$. Так как $\Theta_0(x) = \Theta_0[x(x, y); h(x, y)] = \Theta_0(0, x)$ при x и y , принимающих значения $\frac{x}{2}$ и $\left(\frac{m+1}{2} x \right)^{\frac{1}{m+1}}$ соответственно, то

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \frac{E+A}{2} \left[t(x) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(x-s)^a} \right] + \frac{E-A}{2} \left[t(0) + \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\mathbf{n}(s) ds}{s^a} \right]. \quad (16)$$

Используем определение интеграла дробного порядка Римана-Лиувилля [9] и подчиним выражение (16) условию (15):

$$\frac{1}{2}(E+A) \left[t(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} \mathbf{n}(x) \right] + \frac{1}{2}(E-A) \left[t(0) + \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} x^{-a} \mathbf{n}(x) \right] = \mathbf{j}(x). \quad (17)$$

Умножая левую и правую части равенства (17) на матрицу A и учитывая, что $A^2 = E$, получим

$$\frac{1}{2}(E+A)\left[t(x)+\frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}n(x)\right]-\frac{1}{2}(E-A)\left[t(0)+\frac{1}{2}D_{0x}^{-1}x^{-a}n(x)\right]=Aj(x). \quad (18)$$

Суммируя левые и правые части равенств (17) и (18) и вычитая (18) из (17), получим равенства

$$(E+A)\left[t(x)+\frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}n(x)\right]=(E+A)j(x); \quad (19)$$

$$(E-A)\left[t(0)+\frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-1}x^{-a}n(x)\right]=(E-A)j(x), \quad (20)$$

из которых (19) позволяет сразу определить один из неизвестных в формуле (7) векторов:

$$(E+A)t(x)=(e_1 \cdot t(x); ne_1 \cdot t(x))^T,$$

компоненты которого выражаются через одну и ту же линейную комбинацию компонент вектора $t(x)$:

$$e_1 \cdot t(x)=(1+a)t_1+bt_2,$$

где точка означает обычное скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве.

Соотношение (20), по сути, является некоторым необходимым условием, наложенным на значения другой линейной комбинации компонент вектора $t(x)$ вида

$$(E-A)t(x)=(-ke_2 \cdot t(x); e_2 \cdot t(x))^T=(-k(-ct_1+(1+a)t_2); (-ct_1+(1+a)t_2)),$$

вычисленной при $x=0$, и аналогичные линейные комбинации компонент векторов $n(x)$ и $j(x)$.

Таким образом, условия задач (10) и (15) не позволяют выразить неизвестные в формуле (7) функции $t_1(x)$ и $t_2(x)$ через функции, заданные этими условиями.

Пусть $j=(j_1; j_2)$ – произвольный вектор. Скалярное произведение вектора φ с собственными векторами матрицы A^T будем обозначать соответственно

$$j_1^e=e_1 \cdot j=(1+a)j_1+bj_2 \text{ и } j_2^e=e_2 \cdot j=-cj_1+(1+a)j_2. \quad (21)$$

Использование соотношений между линейными комбинациями компонент искомых и заданных начальными и граничными условиями вектор-функций в форме равенств (19) и (20) не всегда удобно, так как каждое векторное равенство (19) и (20) несет информацию об одной и той же линейной комбинации фигурирующих в ней функций. Это неудобство можно преодолеть, если воспользоваться свойством оператора (матрицы) $E+E_1A$, где, как обычно, E – единичная матрица во множестве M_2 , а $E_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ – одна из матриц Паули [7].

Л е м м а 1. Пусть $f=(f_1; f_2)^T$ и $j=(j_1; j_2)^T$ – произвольные векторы, а матрица $A \in M_2$ – инволютивна. Тогда

$$(E+E_1A)\left[\frac{1}{2}(E+A)f+\frac{1}{2}(E-A)j\right]=(f_1^e; j_2^e)^T. \quad (22)$$

Доказательство. Справедливость равенства (22) можно установить непосредственными вычислениями, используя явный вид матриц $E+A$, $E-A$ и матрицы

$$E+E_1A=\begin{pmatrix} 1+a & b \\ -c & 1+a \end{pmatrix}, \quad a^2+bc=1, \quad (23)$$

или с учетом равенства $A^2=E$ следующим образом. Вычислим произведение матриц

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(E+E_1A)(E+A) &= \frac{1}{2}(E^2+E_1AE+EA+E_1A^2)=\frac{1}{2}[(E^2+E_1E)+(E_1A+EA)]= \\ &= \frac{1}{2}[(E+E_1)E+(E_1+E)A]=\frac{1}{2}(E+E_1)(E+A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}(E+A)=\begin{pmatrix} 1+a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\frac{1}{2}(E+E_1A)(E-A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c & 1+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда левая часть равенства (22) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{f} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix} \mathbf{j} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{f} \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1^e \\ j_2^e \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать.

Некорректность задачи Коши-Гурса I отражает следующая теорема.

Т е о р е м а 1. Пусть $n(x) \in C^2(0, 1) \cap L([0, 1], x^a)$, $j(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. Тогда регулярное в Ω решение системы уравнений (1) в классе функций (11) с данными (10) и (15) определяется формулой (7) при выполнении следующих необходимых условий, наложенных на определенные линейные комбинации компонент вектор-функций $t(x)$ и $n(x)$:

$$t_1^e(x) = j_1^e(x) - \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} n_1^e(x); \quad (24)$$

$$D_{0x}^{-1} x^{-a} n_2^e(x) = 2[j_2^e(x) - j_2^e(0)]; \quad (25)$$

при этом решение задачи с условиями (10) и (15) не единственно, так как соответствующая однородная задача имеет бесчисленное множество нетривиальных решений вида

$$\mathbf{u}(x, y) = f\left(x + \frac{1}{m+1} y^{m+1}\right) \mathbf{r}_2 \quad (26)$$

с произвольной функцией $f(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и $f(0) = 0$.

Доказательство. Подчиняя значение вектора $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$ условию (15) и применяя к левой и правой частям полученного в результате равенства (17) оператор $E + E_1 A$, с учетом леммы 1 и формулы (22), приходим к системе уравнений

$$t_1^e(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} n_1^e(x) = j_1^e(x); \quad (27)$$

$$t_2^e(0) + \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} x^{-a} n_2^e(x) = j_2^e(x). \quad (28)$$

Условие (24) непосредственно следует из равенства (27), а условие (25), с учетом того, что $t(0) = \mathbf{u}(0, 0) = \mathbf{j}(0)$ по непрерывности, следует из равенства (28).

Для доказательства теоремы осталось заметить, что решение поставленной задачи, взятое в форме решения задачи Коши (7), очевидно удовлетворяет системе уравнений (1) и начальному условию (10), а при выполнении условий (24) и (25) оно принимает в точках $\Theta_0(x)$ границы

$$x - \frac{1}{m+1} y^{m+1} = 0 \text{ области } \Omega, \text{ заданные вектор-функцией } \mathbf{j}(x) \text{ значения.}$$

Подчиняя решение задачи однородным начальному и краевому условиям, из равенства (17) получим систему уравнений

$$(E + A)t(x) = 0. \quad (29)$$

Так как $\text{rank}(E + A) = 1$, то однородная система уравнений (29) имеет бесчисленное множество решений вида $t(x) = f(x) \mathbf{r}_2$, где $\mathbf{r}_2$ — собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению $I_2 = -1$.

Действительно,

$$(E + A)t(x) = (E + A)f(x) \mathbf{r}_2 = f(x)(E \mathbf{r}_2 + A \mathbf{r}_2) = f_2(x)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_2) = 0.$$

Из условия $f(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и $f(0) = 0$ следует, что и $t(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, $t(0) = 0$.

Задача Коши-Гурса II (правая). Найти регулярное в Ω решение системы уравнений (1) с начальными данными (10) и условием на характеристике $h = 1$:

$$\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = \mathbf{y}(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (30)$$

Т е о р е м а 2. Пусть $n(x) \in C^2(0, 1) \cap L([0, 1], (1-x)^a)$, $y(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. Тогда регулярное в Ω решение системы уравнений (1) в классе функций (11) с данными (10) и (30) определяется формулой (7) при выполнении следующих необходимых условий, наложенных на определенные линейные комбинации компонент вектор-функций $t(x)$ и $n(x)$:

$$D_{x1}^{-1} (1-x)^{-a} n_1^e(x) = 2[y_1^e(x) - y_1^e(1)]; \quad (31)$$

$$t_2^e(x) = y_2^e(x) - \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} n_2^e(x), \quad (32)$$

при этом решение задачи с условиями (10) и (30) неединственно, так как соответствующая однородная задача имеет бесчисленное множество нетривиальных решений вида

$$\mathbf{u}(x, y) = f\left(x - \frac{1}{m+1} y^{m+1}\right) \mathbf{r}_1 \quad (33)$$

с произвольной функцией $f(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ и $f(1) = 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы 2 – аналогично доказательству теоремы 1. Действительно, воспользуемся решением Коши (7) и вычислим значение вектора $\mathbf{u}[\Theta_1(x)]$.

Так как $\Theta_1(x) = \Theta_1[\mathbf{x}(x, y); \mathbf{h}(x, y)] = \Theta_1(x, 1)$ при x и y , принимающих значения $\frac{1+x}{2}$ и $\left(\frac{m+1}{2}(1-x)\right)^{\frac{1}{m+1}}$ соответственно, то

$$\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = \frac{E+A}{2} \left[t(1) + \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(1-s)^a} \right] + \frac{E-A}{2} \left[t(x) + \frac{1}{2} \int_x^1 \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a} \right]. \quad (34)$$

Подчиним выражение (34) условию (30):

$$\frac{1}{2}(E+A) \left[t(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-a} \mathbf{n}(x) \right] + \frac{1}{2}(E-A) \left[t(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} \mathbf{n}(x) \right] = \mathbf{y}(x). \quad (35)$$

Применяя к левой и правой частям равенства (35) оператор $E + E_1 A$, в силу леммы 1 приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} t_1^e(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-a} \mathbf{n}_1^e(x) &= \mathbf{y}_1^e(x); \\ t_2^e(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} \mathbf{n}_2^e(x) &= \mathbf{y}_2^e(x), \end{aligned}$$

из которых с учетом $t(1) = \mathbf{y}(1)$ следуют равенства (31) и (32).

Отсутствие единственности решения следует в свою очередь из равенства (35) при однородных начальных и краевых условиях:

$$(E-A)t(x) = 0.$$

Так как $\text{rank}(E-A) = 1$, то бесконечное множество решений однородной системы уравнений имеет вид $t(x) = f(x) \mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1$ — собственный вектор матрицы A , отвечающий собственному значению $I_1 = 1$.

Условие $f(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ обеспечивает принадлежность вектора $t(x)$ тому же классу функций.

Корректные постановки задач Коши-Гурса с данными на всей границе характеристической области

Как было показано в работе [1], при $m=1$ наиболее естественной с точки зрения разрешимости для уравнения (1) является задача, в которой, одновременно с заданием производной на линии вырождения типа уравнения (1), на обеих характеристиках заданы вполне определенные линейные комбинации компонент искомого вектор-функции $\mathbf{u}(x, y) = (u_1; u_2)^T$.

Задача I (Коши-Гурса). Найти регулярное в Ω решение системы уравнений (1) с начальными данными

$$\mathbf{u}_y(x, 0) = \mathbf{n}(x), \quad x \in (0, 1) \quad (36)$$

и условиями на характеристиках:

$$(1+a)u_1[\Theta_0(x)] + bu_2[\Theta_0(x)] = f_1(x); \quad (37)$$

$$-cu_1[\Theta_1(x)] + (1+a)u_2[\Theta_1(x)] = f_2(x), \quad (38)$$

где $x \in [0, 1]$.

Заметим, что задание указанных формулами (37) и (38) линейных комбинаций компонент векторов $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$ и $\mathbf{u}[\Theta_1(x)]$ равносильно заданию на характеристиках значений следующих скалярных произведений векторов:

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}[\Theta_0(x)] = f_1(x); \quad (39)$$

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}[\Theta_1(x)] = f_2(x), \quad (40)$$

где $\mathbf{e}_1 = (1+a; b)$ и $\mathbf{e}_2 = (-c; 1+a)$ – собственные векторы матрицы A^T , сопряженной к матрице A .

Обозначим для краткости выражения, стоящие в скобках в формулах (16) и (34), так

$$\mathbf{U}_1(x) = \mathbf{t}(x) + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{n}(x); \quad \mathbf{U}_2(x) = \mathbf{t}(0) + \frac{1}{2}D_{0x}^{-1}x^{-a}\mathbf{n}(x),$$

$$\mathbf{W}_1(x) = \mathbf{t}(1) + \frac{1}{2}D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}\mathbf{n}(x); \quad \mathbf{W}_2(x) = \mathbf{t}(x) + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}\mathbf{n}(x).$$

Тогда значения искомой вектор-функции $\mathbf{u}(x, y)$ в точках $\Theta_0(x)$ и $\Theta_1(x)$ могут быть записаны в виде

$$\mathbf{u}[\Theta_0(x)] = \frac{1}{2}(E+A)\mathbf{U}_1(x) + \frac{1}{2}(E-A)\mathbf{U}_2(x); \quad (41)$$

$$\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = \frac{1}{2}(E+A)\mathbf{W}_1(x) + \frac{1}{2}(E-A)\mathbf{W}_2(x). \quad (42)$$

Вычислим значения скалярных произведений (39) и (40):

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}[\Theta_0(x)] &= \frac{1}{2}[(E+A)\mathbf{U}_1(x) + (E-A)\mathbf{U}_2(x)] \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{2}(E\mathbf{U}_1(x) \cdot \mathbf{e}_1 + A\mathbf{U}_1(x) \cdot \mathbf{e}_1 + E\mathbf{U}_2(x) \cdot \mathbf{e}_1 - \\ &- A\mathbf{U}_2(x) \cdot \mathbf{e}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{U}_1(x) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{U}_1(x) \cdot A^T \mathbf{e}_1 + \mathbf{U}_2(x) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{U}_2(x) \cdot A^T \mathbf{e}_1) = \\ &= \frac{1}{2}(\mathbf{U}_1(x) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{U}_1(x) \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{U}_2(x) \cdot \mathbf{e}_1 - \mathbf{U}_2(x) \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{U}_1(x) \cdot \mathbf{e}_1. \end{aligned} \quad (43)$$

Аналогично вычисляется

$$\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}[\Theta_1(x)] = \mathbf{W}_2(x) \cdot \mathbf{e}_2. \quad (44)$$

Подчиняя выражения (43) и (44) условиям (39) и (40), получим

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t}(x) + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}(x) = f_1(x), \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{t}(x) + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}(x) = f_2(x). \quad (45)$$

Если записать скалярные произведения $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{t}(x)$ и $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{t}(x)$ в виде линейных комбинаций компонент $t_1(x)$ и $t_2(x)$ вектора $\mathbf{t}(x)$ и ввести вектор $\mathbf{f}(x) = (f_1; f_2)^T$, то нетрудно заметить, что система уравнений (45) равносильна уравнению в матричной форме

$$(E + E_1 A)\mathbf{t}(x) = \mathbf{f}(x) - \frac{1}{2}\Gamma(1-a)(D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{n}_1^e(x); D_{x1}^{-(1-a)}\mathbf{n}_2^e(x))^T,$$

из которого и определяется неизвестная вектор-функция $\mathbf{t}(x)$:

$$\mathbf{t}(x) = (E + E_1 A)^{-1} \left[\mathbf{f}(x) - \frac{1}{2}\Gamma(1-a)(D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{n}_1^e(x); D_{x1}^{-(1-a)}\mathbf{n}_2^e(x))^T \right]. \quad (46)$$

Запишем решение поставленной задачи в явном виде. Так как вектор-функция $\mathbf{t}(x)$ входит в решение задачи Коши (7) лишь в виде определенных линейных комбинаций своих компонент, именно $(E+A)\mathbf{t}(x)$ и $(E-A)\mathbf{t}(x)$, то получим и используем другое представление для вектора $\mathbf{t}(x)$. Для дальнейшего понадобятся некоторые свойства фигурирующих в вычислениях матриц, которые сформулируем в виде лемм.

Л е м м а 2. Пусть матрица $A \in M_2$ инволютивна, $a \geq 0$. Тогда матрица $E + E_1 A$ обратима, причем

$$(E + E_1 A)^{-1} = \frac{1}{2(1+a)}(E + E_1 A), \quad (47)$$

где матрица $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Так как $\det(E + E_1 A) = \frac{1}{2(1+a)} \neq 0$ заведомо при $a \geq 0$, то путем непосредственных вычислений нетрудно найти явный вид матрицы

$$(E + E_1 A)^{-1} = \frac{1}{2(1+a)} \begin{pmatrix} 1+a & -b \\ c & 1+a \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+a)}(\mathbf{r}_1; \mathbf{r}_2). \quad (48)$$

Справедливость представления обратной матрицы $(E + E_1 A)^{-1}$ по формуле (47) подтверждают следующие вычисления:

$$(E + E_1 A)^{-1} (E + E_1 A) = \frac{1}{2(1+a)} (E + AE_1)(E + E_1 A) = \frac{1}{2(1+a)} (E^2 + AE_1 E + EE_1 A + AE_1^2 A) =$$

$$\frac{1}{2(1+a)} (E + AE_1 + E_1 A + AEA) = \frac{1}{2(1+a)} (2E + AE_1 + E_1 A) = \frac{1}{1+a} (E + aE) = \frac{1+a}{1+a} E = E,$$

где использовано, что $E^2 = E$, $A^2 = E$, $AE_1 + E_1 A = 2aE$.

Л е м м а 3. Пусть матрица $A \in M_2$ инволютивна, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – ее собственные векторы, а $\mathbf{j} = (j_1; j_2)^T$ – произвольный вектор. Тогда справедливы равенства

$$(E + A)(E + E_1 A)^{-1} \mathbf{j} = \frac{1}{1+a} j_1 \mathbf{r}_1,$$

$$(E - A)(E + E_1 A)^{-1} \mathbf{j} = \frac{1}{1+a} j_2 \mathbf{r}_2. \quad (49)$$

Доказательство. Вычислим произведение матриц $(E + A)(E + E_1 A)$. Учитывая представление матрицы $(E + E_1 A)^{-1}$ по формуле (47), получим

$$(E + A) \frac{1}{2(1+a)} (E + E_1 A) = \frac{1}{2(1+a)} (E^2 + AE + EAE_1 + A^2 E_1) = \frac{1}{2(1+a)} (E^2 + AE + AE_1 + EE_1) =$$

$$= \frac{1}{2(1+a)} [(E + A)E + (A + E)E_1] = \frac{1}{2(1+a)} (E + A)(E + E_1) = \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} 1+a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a} (\mathbf{r}_1; 0).$$

Аналогично можно показать, что

$$(E - A)(E + E_1 A)^{-1} = \frac{1}{1+a} \begin{pmatrix} 0 & -b \\ 0 & 1+a \end{pmatrix} = \frac{1}{1+a} (0; \mathbf{r}_2).$$

Теперь справедливость формул (49) очевидна.

Л е м м а 4. Пусть матрица $A \in M_2$ инволютивна, $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – ее собственные векторы, а $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – собственные векторы ее сопряженной матрицы A^T . Тогда для любого вектора $\mathbf{y} = (y_1; y_2)^T$ имеют место формулы

$$(E + A)\mathbf{y} = \frac{1}{1+a} y_1^e \mathbf{r}_1,$$

$$(E - A)\mathbf{y} = \frac{1}{1+a} y_2^e \mathbf{r}_2, \quad (50)$$

где $y_1^e = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}$, $y_2^e = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}$.

Доказательство. Формулы (50) могут быть доказаны непосредственным вычислением. Например,

$$\frac{1}{1+a} y_1^e \mathbf{r}_1 = \frac{1}{1+a} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}) \mathbf{r}_1 = \frac{1}{1+a} [(1+a)y_1 + by_2] \begin{pmatrix} 1+a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+a)y_1 + by_2 \\ cy_1 + (1-a)y_2 \end{pmatrix} = (E + A)\mathbf{y},$$

где использовано равенство $bc = 1 - a^2$, являющееся следствием инволютивности матрицы A .

Аналогично можно показать справедливость второго равенства в (50).

С другой стороны, формулы (50) являются естественным следствием леммы 3.

Действительно, обозначая в формулах (49) вектор $(E + E_1 A)^{-1} \mathbf{j} = \mathbf{y}$, получим в силу леммы 1

$$\mathbf{j} = (E + E_1 A)\mathbf{y} = (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}; \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y})^T.$$

Тогда по лемме 2

$$(E + A)\mathbf{y} = (E + A)(E + E_1 A)^{-1} \mathbf{j} = \frac{1}{1+a} j_1 \mathbf{r}_1 = \frac{1}{1+a} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{y}) \mathbf{r}_1 = \frac{1}{1+a} y_1^e \mathbf{r}_1;$$

$$(E - A)\mathbf{y} = (E - A)(E + E_1 A)^{-1} \mathbf{j} = \frac{1}{1+a} j_2 \mathbf{r}_2 = \frac{1}{1+a} (\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{y}) \mathbf{r}_2 = \frac{1}{1+a} y_2^e \mathbf{r}_2.$$

Заметим, что задание двух линейных комбинаций (37) и (38) в краевых условиях можно

трактовать как задание следующего вектора:

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{u}[\Theta_0(x)]; \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{u}[\Theta_1(x)])^T = \mathbf{f}(x),$$

где вектор $\mathbf{f}(x) = (f_1; f_2)^T$ составлен из заданных условиями (37) и (38) функций, $x \in [0, 1]$.

Тогда с учетом леммы 1.1 можно считать, что на характеристической части границы области Ω задано следующее краевое условие:

$$(E + E_1 A) \left\{ \frac{1}{2} (E + A) \mathbf{u}[\Theta_0(x)] + \frac{1}{2} (E - A) \mathbf{u}[\Theta_1(x)] \right\} = \mathbf{f}(x)$$

или

$$\frac{1}{2} (E + A) \mathbf{u}[\Theta_0(x)] + \frac{1}{2} (E - A) \mathbf{u}[\Theta_1(x)] = (E + E_1 A)^{-1} \mathbf{f}(x) \quad (51)$$

(в силу существования обратной матрицы $E + E_1 A$).

Подставляя в левую часть формулы (2.16) значения $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$ и $\mathbf{u}[\Theta_1(x)]$ из (1.16) и (1.34) с учетом идемпотентности матриц $\frac{1}{2}(E + A)$ и $\frac{1}{2}(E - A)$ и формулы (47), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (E + A) \left[t(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} \mathbf{n}(x) \right] + \\ & + \frac{1}{2} (E - A) \left[t(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} \mathbf{n}(x) \right] = \frac{1}{2(1+a)} (E + A E_1) \mathbf{f}(x), \end{aligned}$$

откуда

$$t(x) = \frac{1}{2(1+a)} (E + A E_1) \mathbf{f}(x) - \frac{1}{4} (E + A) \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} \mathbf{n}(x) - \frac{1}{4} (E - A) \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} \mathbf{n}(x). \quad (52)$$

Теперь нетрудно записать решение поставленной задачи:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, h) &= \frac{1}{2} (E + A) \left[t(h) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(h-s)^a} \right] + \frac{1}{2} (E - A) \left[t(x) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a} \right] = \\ &= \frac{1}{2(1+a)} f_1(h) \mathbf{r}_1 - \frac{1}{4} (E + A) \left[\Gamma(1-a) D_{0h}^{-(1-a)} \mathbf{n}(h) - \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(h-s)^a} \right] + \\ &+ \frac{1}{2(1+a)} f_2(x) \mathbf{r}_2 - \frac{1}{4} (E - A) \left[\Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} \mathbf{n}(x) - \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a} \right] = \\ &= \frac{1}{2(1+a)} [f_1(h) \mathbf{r}_1 + f_2(x) \mathbf{r}_2] - \frac{1}{4} (E + A) \left[\int_0^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(h-s)^a} - \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(h-s)^a} \right] - \frac{1}{4} (E - A) \left[\int_x^1 \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a} - \int_x^h \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a} \right] = \\ &= \frac{1}{2(1+a)} [f_1(h) \mathbf{r}_1 + f_2(x) \mathbf{r}_2] - \frac{1}{4} (E + A) \int_0^x \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(h-s)^a} - \frac{1}{4} (E - A) \int_h^1 \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a}. \end{aligned} \quad (53)$$

Выражение (53) при $m=1$ совпадает с результатом, приведенным в работе [1]. Используя тот факт, что $A \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1$, а $A \mathbf{r}_2 = -\mathbf{r}_2$, формуле (53) можно придать вид

$$\mathbf{u}(x, h) = \frac{1}{4} (E + A) \left[\frac{f_1(h)}{1+a} \mathbf{r}_1 - \int_0^x \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(h-s)^a} \right] + \frac{1}{4} (E - A) \left[\frac{f_2(x)}{1+a} \mathbf{r}_2 - \int_h^1 \frac{\mathbf{n}(s) ds}{(s-x)^a} \right]. \quad (54)$$

Решение задачи можно выписать в терминах собственных векторов матриц A и A^T , если воспользоваться леммой 4 и формулами (50).

Действительно, так как $(E + A) \mathbf{n}(x) = \frac{1}{1+a} \mathbf{n}_1^e(x) \mathbf{r}_1$ и $(E - A) \mathbf{n}(x) = \frac{1}{1+a} \mathbf{n}_2^e(x) \mathbf{r}_2$, то вместо формулы (53) получим

$$\mathbf{u}(x, h) = \frac{1}{2(1+a)} \left[f_1(h) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\mathbf{n}_1^e(s) ds}{(h-s)^a} \right] \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2(1+a)} \left[f_2(x) - \frac{1}{2} \int_h^1 \frac{\mathbf{n}_2^e(s) ds}{(s-x)^a} \right] \mathbf{r}_2. \quad (55)$$

Т е о р е м а 3. Пусть вектор-функция $n(x) \in C^2(0, 1) \cap L([0, 1], x^a, (1-x)^a)$; $f_1(x)$, $f_2(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ – заданные функции. Тогда единственное в Ω решение системы уравнений (1) в классе функций (11) с начальными данными (36) и условиями на характеристиках (37) и (38) определяется формулой (55) или (54).

Доказательство. Решение задачи I в форме (55) можно получить, минуя векторно-матричные представления (46) и (53), если с учетом леммы 4 решение задачи Коши (7) записать в терминах собственных векторов матриц A и A^T :

$$u(x, h) = \frac{1}{2(1+a)} \left[t_1^e(h) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{n_1^e(s) ds}{(h-s)^a} \right] r_1 + \frac{1}{2(1+a)} \left[t_2^e(x) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{n_2^e(s) ds}{(s-x)^a} \right] r_2. \quad (56)$$

Вычислим, как ранее, значения векторов $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$:

$$u[\Theta_0(x)] = \frac{1}{2(1+a)} \left[t_1^e(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} n_1^e(x) \right] r_1 + \frac{1}{2(1+a)} \left[t_2^e(0) + \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} x^{-a} n_2^e(x) \right] r_2, \quad (57)$$

$$u[\Theta_1(x)] = \frac{1}{2(1+a)} \left[t_1^e(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1-x)^{-a} n_1^e(x) \right] r_1 + \frac{1}{2(1+a)} \left[t_2^e(x) + \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} n_2^e(x) \right] r_2. \quad (58)$$

Подчиняя значения $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ крайевым условиям (39) и (40) и учитывая, что собственные векторы матриц A и A^T , отвечающие разным собственным значениям, попарно ортогональны, а $e_1 \cdot r_1 = e_2 \cdot r_2 = 2(1+a)$, получим систему уравнений для искомых линейных комбинаций компонент вектора $t(x)$:

$$\begin{cases} t_1^e(x) = f_1(x) - \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{0x}^{-(1-a)} n_1^e(x), \\ t_2^e(x) = f_2(x) - \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} n_2^e(x). \end{cases} \quad (59)$$

Вычисляя значения $t_1^e(x)$ и $t_2^e(h)$ по формулам (59), находим

$$\begin{aligned} u(x, h) &= \frac{1}{2(1+a)} \left[f_1(h) - \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{0h}^{-(1-a)} n_1^e(h) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{n_1^e(s) ds}{(h-s)^a} \right] r_1 + \\ &+ \frac{1}{2(1+a)} \left[f_2(x) - \frac{1}{2} \Gamma(1-a) D_{x1}^{-(1-a)} n_2^e(x) + \frac{1}{2} \int_x^h \frac{n_2^e(s) ds}{(s-x)^a} \right] r_2 = \\ &= \frac{1}{2(1+a)} \left[f_1(h) - \frac{1}{2} \left(\int_0^h \frac{n_1^e(s) ds}{(h-s)^a} - \int_x^h \frac{n_1^e(s) ds}{(h-s)^a} \right) \right] r_1 + \frac{1}{2(1+a)} \left[f_2(x) - \frac{1}{2} \left(\int_x^1 \frac{n_2^e(s) ds}{(s-x)^a} - \int_x^h \frac{n_2^e(s) ds}{(s-x)^a} \right) \right] r_2 = \\ &= \frac{1}{2(1+a)} \left[f_1(h) - \frac{1}{2} \int_0^x \frac{n_1^e(s) ds}{(h-s)^a} \right] r_1 + \frac{1}{2(1+a)} \left[f_2(x) - \frac{1}{2} \int_h^1 \frac{n_2^e(s) ds}{(s-x)^a} \right] r_2. \end{aligned}$$

Однозначная разрешимость задачи I по - прежнему следует из формул (59) и существования обратной матрицы $(E + E_1 A)^{-1}$, а принадлежность вектор-функции $t(x)$ классу функций $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ очевидна из формулы (46).

Замечание к постановкам задачи I (Коши-Гурса).

Задание на характеристиках, указанных в (37) и (38) линейных комбинаций компонент вектор-функций $u[\Theta_0(x)]$ и $u[\Theta_1(x)]$ не является необходимым для корректности задач I условием. Можно показать, что если вместо условий (37) и (38) на характеристиках заданы произвольные независимые линейные комбинации функций $u_i[\Theta_0(x)]$ и $u_i[\Theta_1(x)]$ ($i = 1, 2$), то задача I будет также однозначно разрешима. Непосредственные вычисления в этом случае будут громоздкими, но заменой переменных такую задачу можно свести к задаче, в которой на одной характеристике задана одна, а на другой — другая компонента вектор-функции $u(x, y)$.

Задача II (Коши-Гурса). Найти регулярное в Ω решение системы уравнений (1) с начальными данными (2.1) и условием покомпонентно:

$$u_1[\Theta_0(x)] = j(x) \quad \text{и} \quad u_2[\Theta_1(x)] = y(x), \quad x \in [0, 1]. \quad (60)$$

Выделим первую компоненту вектор-функции $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$ в формуле (16) и вторую компоненту $\mathbf{u}[\Theta_1(x)]$ в формуле (34):

$$\begin{aligned} u_1[\Theta_0(x)] &= \frac{1}{2}[(1+a)t_1(x) + bt_2(x)] + \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}[(1+a)n_1(x) + bn_2(x)] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[(1-a)t_1(0) - bt_2(0)] + \frac{1}{4}D_{0x}^{-1}x^{-a}[(1-a)n_1(x) - bn_2(x)], \\ u_2[\Theta_1(x)] &= \frac{1}{2}[ct_1(1) + (1-a)t_2(1)] + \frac{1}{4}D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}[cn_1(x) + (1-a)n_2(x)] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[-ct_1(x) + (1+a)t_2(x)] + \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}[-cn_1(x) + (1+a)n_2(x)]. \end{aligned} \quad (61)$$

Подчиним значения $u_1[\Theta_0(x)]$ и $u_2[\Theta_1(x)]$ условиям (60) и, учитывая, что $t_1(0) = j(0)$, $t_2(1) = y(1)$ по непрерывности, а линейные комбинации $(1-a)n_1(x) - bn_2(x) = -k\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}(x) = -\frac{b}{1+a}\mathbf{n}_2^e(x)$ и $cn_1(x) + (1-a)n_2(x) = n\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}(x) = \frac{c}{1+a}\mathbf{n}_1^e(x)$, для определения неизвестных функций $t_1(x)$ и $t_2(x)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[(1+a)t_1(x) + bt_2(x)] = j(x) - \frac{1}{2}(1-a)j(0) + \frac{1}{2}bt_2(0) - \\ \quad - \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{n}_1^e(x) + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{1+a}\right)D_{0x}^{-1}x^{-a}\mathbf{n}_2^e(x), \\ \frac{1}{2}[-ct_1(x) + (1+a)t_2(x)] = y(x) - \frac{1}{2}(1-a)y(1) - \frac{1}{2}ct_1(1) - \\ \quad - \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}\mathbf{n}_2^e(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{c}{1+a}\right)D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}\mathbf{n}_1^e(x), \end{cases} \quad (62)$$

которая равносильна уравнению в матричной форме:

$$\frac{1}{2}(E + E_1A)t(x) = \mathbf{p}(x), \quad (63)$$

где $\mathbf{p}(x) = (p_1(x); p_2(x))^T$, а через $p_1(x)$ и $p_2(x)$ – обозначены правые части уравнений в системе (62).

Однозначная разрешимость уравнения (63) гарантируется существованием обратной матрицы $(E + E_1A)^{-1}$. С учетом формулы (47) имеем

$$t(x) = 2(E + E_1A)^{-1}\mathbf{p}(x) = \frac{1}{1+a}(E + AE_1)\mathbf{p}(x).$$

Однако правые части уравнений системы содержат пока неизвестные постоянные. Для их нахождения вычислим по формулам (61) дополнительно

$$\begin{aligned} u_1[\Theta_0(1)] &= \frac{1}{2}[(1+a)t_1(1) + bt_2(1)] + \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}[(1+a)n_1(x) + bn_2(x)] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[(1-a)t_1(0) - bt_2(0)] + \frac{1}{4}D_{01}^{-1}x^{-a}[(1-a)n_1(x) - bn_2(x)], \\ u_2[\Theta_0(0)] &= \frac{1}{2}[ct_1(1) + (1-a)t_2(1)] + \frac{1}{4}D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}[cn_1(x) + (1-a)n_2(x)] + \\ &\quad + \frac{1}{2}[-ct_1(0) + (1+a)t_2(0)] + \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}[-cn_1(x) + (1+a)n_2(x)]. \end{aligned} \quad (64)$$

С учетом краевых условий (60) для определения постоянных $t_1(1)$ и $t_2(0)$ получим систему уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}[(1+a)t_1(1) - bt_2(0)] &= j(1) - \frac{1}{2}(1-a)j(0) - \frac{1}{2}by(1) - \\ &\quad - \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}n_1^e(x) + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{1+a}\right)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x), \\ \frac{1}{2}[ct_1(1) + (1+a)t_2(0)] &= y(0) - \frac{1}{2}(1-a)y(1) + \frac{1}{2}cj(0) - \\ &\quad - \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}n_2^e(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{c}{1+a}\right)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x), \end{aligned} \right. \quad (65)$$

или в матричной форме

$$\frac{1}{2}(E + AE_1)(t_1(1); t_2(0))^T = \mathbf{f},$$

где $\mathbf{f} = (f_1; f_2)$ — вектор, составленный из правых частей уравнений системы (65).

Так как $E + AE_1 = 2(1+a)(E + E_1A)^{-1}$, то

$$(1+a)(t_1(1); t_2(0))^T = (E + E_1A)\mathbf{f}. \quad (66)$$

Непосредственное вычисление по формуле (66) дает

$$\begin{aligned} (1+a)t_1(1) &= (1+a)f_1 + bf_2 = (1+a)j(1) - \frac{1}{2}(1-a^2)j(0) - \frac{1}{2}(1+a)by(1) - \\ &\quad - \frac{1}{4}(1+a)\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}n_1^e(x) + \frac{1}{4}bD_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) + by(0) - \frac{1}{2}b(1-a)y(1) + \\ &\quad + \frac{1}{2}bcj(0) - \frac{1}{4}b\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}n_2^e(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{1+a}\right)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) = \\ &= (1+a)j(1) + by(0) - by(1) - \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}[(1+a)n_1^e(x) + bn_2^e(x)] + \\ &\quad + \frac{1}{4}bD_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}(1-a)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x). \end{aligned}$$

Преобразуем выражение

$$\begin{aligned} (1+a)n_1^e(x) + bn_2^e(x) &= [(1+a)\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2] \cdot \mathbf{n}(x) = [(1+a)(1+a; b) + b(-c; 1+a)] \cdot \mathbf{n}(x) = \\ &= (1+a)[(1+a; b) + (-(1+a); b)] \cdot \mathbf{n}(x) = 2(1+a)(a; b)\mathbf{n}(x) = 2(1+a)[an_1(x) + bn_2(x)]. \end{aligned}$$

В процессе вычислений всюду используется равенство $a^2 + bc = 1$, являющееся следствием инволютивности матрицы A . Тогда

$$\begin{aligned} t_1(1) &= j(1) + \frac{b}{1+a}[y(0) - y(1)] - \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}(an_1(x) + bn_2(x)) + \\ &\quad + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{1+a}\right)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x). \end{aligned} \quad (67)$$

Аналогично из формулы (66) получим

$$\begin{aligned} t_2(0) &= y(0) - \frac{c}{1+a}[j(1) - j(0)] + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}(cn_1(x) - an_2(x)) - \\ &\quad - \frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{c}{1+a}\right)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x). \end{aligned} \quad (68)$$

С учетом найденных в (67) и (68) значений $t_1(1)$ и $t_2(0)$ правые части уравнений (62) будут иметь вид

$$\begin{aligned} p_1(x) &= j(x) + \frac{1}{2}by(0) - \frac{1}{2}(1-a)j(1) + \frac{1}{4}b\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}[cn_1(x) - an_2(x)] - \\ &\quad - \frac{1}{8}b\frac{1-a}{1+a}D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{8}(1-a)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}n_1^e(x) + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{1+a}\right)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x); \\ p_2(x) &= y(x) - \frac{1}{2}cj(1) - \frac{1}{2}(1-a)y(0) + \frac{1}{4}c\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}[an_1(x) + bn_2(x)] - \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{8}(1-a)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) + \frac{1}{8}c\frac{1-a}{1+a}D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - \frac{1}{4}\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}n_2^e(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{c}{1+a}\right)D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x).$$

Теперь по формуле (63) находим

$$\begin{aligned} (1+a)t_1(x) &= (1+a)p_1(x) - bp_2(x) = (1+a)j(x) + \frac{1}{2}b(1+a)y(0) - \frac{1}{2}(1-a^2)j(1) + \\ &+ \frac{1}{4}b(1+a)\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}[cn_1(x) - an_2(x)] - \frac{1}{8}b(1-a)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{8}(1-a^2)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - \\ &- \frac{1}{4}(1+a)\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}n_1^e(x) + \frac{1}{4}bD_{0x}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - by(x) + \frac{1}{2}bcj(1) + \frac{1}{2}b(1-a)y(0) - \\ &- \frac{1}{4}bc\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}[an_1(x) + bn_2(x)] + \frac{1}{8}b(1-a)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{8}bc\frac{1-a}{1+a}D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) + \\ &+ \frac{1}{4}b\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}n_2^e(x) + \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{1+a}\right)D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) = (1+a)j(x) - by(x) + \frac{1}{2}b(1+a+1-a)y(0) + \\ &+ \frac{1}{2}(a^2 + bc - 1)j(1) + \frac{1}{4}b\Gamma(1-a)\left\{(1+a)D_{01}^{-(1-a)}[cn_1(x) - an_2(x)] - cD_{01}^{-(1-a)}[an_1(x) + bn_2(x)] + \right. \\ &+ D_{x1}^{-(1-a)}n_2^e(x)\left.\right\} - \left\{\frac{1}{8}(1-a^2)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) + \frac{1}{8}(1-a)^2D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - \frac{1}{4}(1-a)D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x)\right\} + \\ &+ \frac{1}{4}bD_{0x}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}(1+a)\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}n_1^e(x). \end{aligned}$$

Вычислим линейную комбинацию

$$(1+a)[cn_1(x) - an_2(x)] - c[an_1(x) + bn_2(x)] = cn_1(x) - (1+a)n_2(x) = -e_1 \cdot n(x) = -n_2^e(x).$$

Тогда выражение в первых фигурных скобках упрощается:

$$\begin{aligned} (1+a)D_{01}^{-(1-a)}[cn_1(x) - an_2(x)] - cD_{01}^{-(1-a)}[an_1(x) + bn_2(x)] + D_{x1}^{-(1-a)}n_2^e(x) = \\ = -[D_{01}^{-(1-a)}n_2^e(x) - D_{x1}^{-(1-a)}n_2^e(x)] = -D_{0x}^{-(1-a)}n_2^e(x). \end{aligned}$$

Кроме того, выражение во вторых фигурных скобках будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}(1-a^2 + 1 - 2a + a^2)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - \frac{1}{4}(1-a)D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) = \\ = \frac{1}{4}(1-a)[D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x)] = \frac{1}{4}(1-a)D_{0x}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (1+a)t_1(x) &= (1+a)j(x) - b[y(x) - y(0)] - \frac{1}{4}b\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}n_2^e(x) + \frac{1}{4}bD_{0x}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \\ &- \frac{1}{4}(1+a)D_{0x}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - \frac{1}{4}(1+a)\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}n_1^e(x). \end{aligned} \quad (69)$$

Объединяя первый и последний интегралы в формуле (69) с учетом того, что

$$\begin{aligned} bn_2^e(x) + (1+a)n_1^e(x) &= [be_2 + (1+a)e_1] \cdot n(x) = [b(-c; 1+a) + (1+a)(1+a; b)] \cdot n(x) = \\ &= (1+a)[(-1-a; b) + (1+a; b)] \cdot n(x) = 2(1+a)(a; b) \cdot n(x) = 2(1+a)[an_1(x) + bn_2(x)], \end{aligned}$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} (1+a)t_1(x) &= (1+a)j(x) - b[y(x) - y(0)] - \frac{1}{2}(1+a)\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}[an_1(x) + bn_2(x)] + \\ &+ \frac{1}{4}bD_{0x}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}(1-a)D_{0x}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x), \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} t_1(x) &= j(x) - \frac{b}{1+a}[y(x) - y(0)] - \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}[an_1(x) + bn_2(x)] + \\ &+ \frac{1}{4}bD_{0x}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)D_{0x}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x). \end{aligned} \quad (70)$$

Аналогичными вычислениями находим

$$t_2(x) = y(x) + \frac{c}{1+a}[j(x) - j(1)] + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}[cn_1(x) - an_2(x)] -$$

$$-\frac{1}{4}\left(\frac{1-a}{1+a}\right)D_{x1}^{-1}x^{-a}n_2^e(x)-\frac{1}{4}\left(\frac{c}{1+a}\right)D_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x). \quad (71)$$

Полученный результат отражает следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Пусть вектор-функция $n(x) \in C^2(0, 1)$, причем линейные комбинации компонент $n(x)$ таковы, что $n_1^e(x) = (1+a)n_1 + bn_2 \in L([0, 1], (1-x)^a)$, а $n_2^e(x) = -cn_1 + (1+a)n_2 \in L([0, 1], x^a)$; $j(x), y(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. Тогда единственное в Ω решение системы уравнений (1) в классе функций (11) с начальными данными (36) и условиями на характеристиках (60) определяется формулой решения задачи Коши (7), в которой компоненты вектора $t(x) = (t_1; t_2)^T$, в свою очередь, заданы формулами (70) и (71).

Доказательство. Единственность решения в задаче II является следствием обратимости матрицы $E + E_1A$. Принадлежность вектор-функции $t(x)$ классу функций $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ очевидна из формул (70) и (71) при условии, что $n_1^e(x)$ и $n_2^e(x)$ принадлежат указанным условиям теоремы классам функций.

Теперь корректность поставленной задачи становится следствием корректности задачи Коши.

К постановке нелокальных краевых задач для системы уравнений (1)

Хорошо известно, что постановка нелокальных условий является одним из инструментов устранения неравноправия характеристик как носителей данных Дарбу, обеспечивающих существование единственного решения той или иной краевой задачи [10].

В этой связи рассмотрим один пример нелокальной постановки краевой задачи с данными на всей границе характеристической области Ω .

Задача. Найти регулярное в Ω решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным данным

$$u_y(x, 0) = n(x), \quad x \in (0, 1) \quad (72)$$

и условиям

$$u_1[\Theta_0(x)] = m_2 u_2(x, 0) + j_1(x); \quad (73)$$

$$u_2[\Theta_1(x)] = m_1 u_1(x, 0) + j_2(x), \quad (74)$$

где $m_1, m_2 \in \mathbf{R}$ — произвольные константы; $j_1(x), j_2(x)$ — заданные функции, $x \in [0, 1]$.

При $m_1, m_2 \equiv 0$ условия (73) и (74) переходят в условия (60) задачи II, корректность которой обоснована в предыдущем пункте.

Покажем, что при некоторых значениях постоянных m_1 и m_2 краевая задача с условиями (73) и (74) не будет корректной для любого инволютивного матричного коэффициента системы уравнений (1).

Обозначим неизвестные функции $u_1(x, 0)$ и $u_2(x, 0)$ соответственно $t_1(x)$ и $t_2(x)$ и воспользуемся полученным выше решением задачи Коши-Гурса II.

Заменяя в формулах (60), (61) $j(x)$ на $m_2 t_2(x) + j_1(x)$, а $y(x)$ на $m_1 t_1(x) + j_2(x)$, получим систему уравнений

$$\begin{cases} (1+a+bm_1)t_1(x) - m_2(1+a)t_2(x) = (1+a)j_1(x) - b[j_2(x) - j_2(0) - m_1 t_1(0)] + p_1(x), \\ -(1+a)m_1 t_1(x) + (1+a-cm_2)t_2(x) = (1+a)j_2(x) + c[j_1(x) - j_1(1) - m_2 t_2(1)] + p_2(x), \end{cases} \quad (75)$$

где обозначено

$$p_1(x) = -\frac{1}{2}(1+a)\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}[am_1(x) + bn_2(x)] + \frac{1}{4}b(1+a)D_{0x}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}(1-a)D_{0x}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x),$$

$$p_2(x) = \frac{1}{2}(1+a)\Gamma(1-a)D_{x1}^{-(1-a)}[cn_1(x) - am_2(x)] - \frac{1}{4}(1-a)D_{x1}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) - \frac{1}{4}cD_{x1}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x).$$

Для однозначной разрешимости системы уравнений (75) необходимо и достаточно, чтобы матрица коэффициентов при неизвестных $t_1(x)$ и $t_2(x)$ была невырожденной.

Вычислим значение определителя этой матрицы:

$$\Delta = (1+a+bm_1)(1+a-cm_2) - m_1 m_2 (1+a)^2 = (1+a)(1+a+bm_1 - cm_2 - 2m_1 m_2),$$

где использовалось равенство $bc = 1 - a^2$, являющееся следствием инволютивности матрицы A .

Заметим, что условие $\Delta \neq 0$ выполняется на множестве инволютивных матриц $A \in M_2$, в частности при $m_1, m_2 = 1$ и $a = 1$.

Действительно, из условия $bc = 1 - a^2$ при $a = 1$ следует, что $bc = 0$. Пусть для определенности $b \neq 0, c = 0$, тогда матрица A имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, а значение $\Delta = 2b$.

Однако условие $\Delta \neq 0$ еще не является достаточным условием однозначной разрешимости задачи в целом.

Действительно, правые части уравнений (75) содержат неизвестные пока постоянные $t_1(0)$ и $t_2(1)$, которые совпадают со значениями функций $u_1[\Theta_0(0)]$ и $u_2[\Theta_1(1)]$, и в силу краевых условий (73) и (74) имеем

$$t_1(0) = m_2 t_2(0) + j_1(0), \quad t_2(1) = m_1 t_1(1) + j_2(1). \quad (76)$$

Воспользуемся вычисленными ранее значениями $u_1[\Theta_0(1)]$ и $u_2[\Theta_1(0)]$ (64) и, учитывая, что в силу краевых условий (73) и (74) $u_1[\Theta_0(1)] = m_2 t_2(1) + j_1(1)$ и $u_2[\Theta_1(0)] = m_1 t_1(0) + j_2(0)$, получим равенства

$$(1+a)t_1(1) + bt_2(1) + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}n_1^e(x) + (1-a)t_1(0) - bt_2(0) - \\ - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{1+a}\right)D_{01}^{-1}x^{-a}n_2^e(x) = 2m_2 t_2(1) + 2j_1(1); \quad (77)$$

$$ct_1(1) + (1-a)t_2(1) + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{1+a}\right)D_{01}^{-1}(1-x)^{-a}n_1^e(x) - ct_1(0) + (1+a)t_2(0) + \\ + \frac{1}{2}\Gamma(1-a)D_{01}^{-(1-a)}n_2^e(x) = 2m_1 t_1(0) + 2j_2(0). \quad (78)$$

Исключая из равенств $t_2(0)$ и $t_1(1)$ по формулам (76), приходим к системе уравнений $m_2[(1+a) + m_1(b-2m_2)]t_2(1) + m_1[(1-a)m_2 - b]t_1(0) = m_1[2m_2 j_1(1) - b j_1(0)] + (1+a)m_2 j_2(1) + q_1(x)$, $m_2[c + (1-a)m_1]t_2(1) + m_1[1+a - m_2(c+2m_1)]t_1(0) = m_2[2m_1 j_2(0) + c j_2(1)] + (1+a)m_1 j_1(0) + q_2(x)$, где через q_1 и q_2 обозначены интегральные члены с известными в силу начальных условий функциями.

Для однозначной разрешимости задачи необходимо потребовать неравенства нулю определителя этой системы:

$$\Delta_0 = m_1 m_2 \{ [1+a + m_1(b-2m_2)][1+a - m_2(c+2m_1)] - [c + (1-a)m_1][(1-a)m_2 - b] \}.$$

Величина $\Delta_0 \neq 0$ тождественна на множестве инволютивных матриц A . Действительно, например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и значений $m_1 = 1, m_2 = -1$ величина $\Delta_0 = -20$. Однако в случае $m_1 = m_2 = 1, \Delta_0 = 0$ для любой инволютивной матрицы $A \in M_2$. Действительно, при $m_1 = m_2 = 1$ имеем

$$\Delta_0 = (1+a+b-2)(1+a-c-2) - (1-a+c)(1-a-b) = (-1+a+b)(-1+a-c) - (1-a+c)(1-a-b) = \\ = (1-a-b)(1-a+c) - (1-a+c)(1-a-b) = 0.$$

Возвращаясь к вопросу корректности постановок задач Коши-Гурса, заметим, что и задачу I с условиями (37), (38), и задачу II с условиями (60) можно рассматривать как частные случаи задачи со смещением, в которой на искомую вектор-функцию $u(x, y)$ наложено следующее не-локальное условие:

$$A(x)u[\Theta_0(x)] + B(x)u[\Theta_1(x)] = c(x), \quad (79)$$

где $A(x), B(x)$ — заданные функциональные матрицы; $c(x)$ — известная вектор-функция, $x \in [0, 1]$.

Так, например, в задаче I указанные выше в (79) матрицы имеют вид

$$A(x) = \frac{1}{2}(E + E_1 A)(E + A) = \frac{1}{2}(E + E_1)(E + A), \quad B(x) = \frac{1}{2}(E + E_1 A)(E - A) = \frac{1}{2}(E - E_1)(E - A).$$

В задаче II матрица $A(x) = \frac{1}{2}(E + E_1)$, а $B(x) = \frac{1}{2}(E - E_1)$.

При определенных ограничениях на матрицы $A(x)$ и $B(x)$ нетрудно указать достаточные условия однозначной разрешимости краевых задач для системы уравнений (1) с условием (79) на характеристической части границы области Ω . Однако на простом примере можно убедиться, что задача с начальными данными (72) и условием (79) может оказаться некорректной в смысле однозначной разрешимости.

Пусть в условии (79) матрицы $A(x) = E - A$, $B(x) = E + A$, $\mathbf{c}(x) = (c_1(x); c_2(x))^T$ — заданная вектор-функция.

Подставляя выражение для $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$ и $\mathbf{u}[\Theta_1(x)]$ из формул (16), (34) в условие (79), получим равенство

$$(E - A) \left[t(0) + \frac{1}{2} D_{0x}^{-1} x^{-a} \mathbf{n}(x) \right] + (E + A) \left[t(1) + \frac{1}{2} D_{x1}^{-1} (1 - x)^{-a} \mathbf{n}(x) \right] = \mathbf{c}(x),$$

которое, являясь необходимым условием для представления решения задачи в форме решения задачи Коши (7), лишь накладывает определенные ограничения на заданную вектор-функцию $\mathbf{n}(x)$ и значения искомого вектора $t(x)$ в точках $x = 0$ и $x = 1$, но не позволяет определить сам вектор $t(x)$.

Очевидно, задача с начальными данными (72) и условием

$$A(x)\mathbf{u}[\Theta_0(x)] + B(x)\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = H(x)\mathbf{u}(x, 0) + \mathbf{c}(x), \quad (80)$$

при $A(x) = E - A$, $B(x) = E + A$ и $H(x)$ — известной функциональной матрице, будет тривиально разрешима, если матрица $H(x)$ обратима всюду на отрезке $[0, 1]$.

Учитывая вышеизложенное, рассмотрим задачу, которую назовем задачей с условиями Бицадзе-Нахушева [11].

Задача (Бицадзе-Нахушева). Найти регулярное в области Ω решение системы уравнений (1), удовлетворяющее начальным данным (72) и нелокальному условию вида

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{u}[\Theta_0(x)] + \mathbf{B}(x)\mathbf{u}[\Theta_1(x)] = \mathbf{H}(x)\mathbf{u}(x, 0) + \mathbf{K}(x)\mathbf{u}_y(x, 0) + \mathbf{c}(x), \quad (81)$$

где $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}(x)$, $\mathbf{H}(x)$ и $\mathbf{K}(x)$ — известные $[2 \times 2]$ функциональные матрицы, $\mathbf{c}(x) = (c_1(x); c_2(x))^T$ — заданная вектор-функция, $x \in [0, 1]$.

Теорема 5. Пусть компоненты функциональных матриц и вектор-функций $\mathbf{A}(x)$, $\mathbf{B}(x)$, $\mathbf{H}(x)$, $\mathbf{K}(x)$, $\mathbf{c}(x)$, $\mathbf{n}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. Тогда единственное в Ω решение системы уравнений (1) из класса функций (8) с начальными условиями (72), удовлетворяющее нелокальному условию (81), существует и может быть найдено по формуле (7), если матрица $\mathbf{A}(x)(E + A) + \mathbf{B}(x)(E - A) - 2\mathbf{H}(x)$ обратима всюду на отрезке $[0, 1]$, а также обратимы следующие числовые матрицы:

$$\begin{aligned} & \mathbf{A}(1)(E + A) + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1)), \quad \mathbf{B}(0)(E - A) + 2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)), \\ & \mathbf{B}(0)(E - A) + 2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)) - \mathbf{B}(0)(E + A) \left[\mathbf{A}(1)(E + A) + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1)) \right]^{-1} \mathbf{A}(1)(E - A); \\ & \mathbf{A}(1)(E + A) + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1)) - \mathbf{A}(1)(E - A) \left[\mathbf{B}(0)(E - A) + 2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)) \right]^{-1} \mathbf{B}(0)(E + A). \end{aligned}$$

Доказательство. По условию (72) $\mathbf{u}_y(x, 0) = \mathbf{n}(x)$ — заданная вектор-функция. Обозначим $\mathbf{K}(x)\mathbf{u}_y(x, 0) + \mathbf{c}(x) = \mathbf{K}(x)\mathbf{n}(x) + \mathbf{c}(x) = \mathbf{j}(x)$ и заметим, что $\mathbf{j}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$. Обозначим вектор $\mathbf{u}(x, 0) = t(x)$ и подставим выражения (16) для $\mathbf{u}[\Theta_0(x)]$ и (34) для $\mathbf{u}[\Theta_1(x)]$ в условие (81). Тогда для определения вектор-функции $t(x)$ получим систему уравнений в матричной форме:

$$[\mathbf{A}(x)(E + A) + \mathbf{B}(x)(E - A) - 2\mathbf{H}(x)]t(x) + \mathbf{A}(x)(E - A)t(0) + \mathbf{B}(x)(E + A)t(1) = \mathbf{f}(x), \quad (82)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x) = & 2\mathbf{j}(x) - \frac{1}{2}\mathbf{A}(x) \left[(E + A)\Gamma(1 - a)D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{n}(x) + (E - A)D_{0x}^{-1}x^{-a}\mathbf{n}(x) \right] - \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{B}(x) \left[(E + A)D_{x1}^{-1}(1 - x)^{-a}\mathbf{n}(x) + (E - A)\Gamma(1 - a)D_{x1}^{-(1-a)}\mathbf{n}(x) \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

Определив предварительно значения $t(0)$ и $t(1)$ и обращая в уравнении (82) матрицу $\mathbf{A}(x)(E + A) + \mathbf{B}(x)(E - A) - 2\mathbf{H}(x)$, получим

$$t(x) = [\mathbf{A}(x)(E + A) + \mathbf{B}(x)(E - A) - 2\mathbf{H}(x)]^{-1} \mathbf{p}(x), \quad (84)$$

где вектор-функция

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(x) = & \mathbf{f}(x) - \mathbf{A}(x)(E - A)t(0) - \mathbf{B}(x)(E + A)t(1) = 2[\mathbf{K}(x)\mathbf{n}(x) + \mathbf{c}(x)] - \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{A}(x)\left[(E + A)\Gamma(1 - a)D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{n}(x) + (E - A)\left(D_{0x}^{-1}x^{-a}\mathbf{n}(x) + 2t(0)\right)\right] - \\ & - \frac{1}{2}\mathbf{B}(x)\left[(E + A)\left(D_{x1}^{-1}(1 - x)^{-a}\mathbf{n}(x) + 2t(1)\right) + (E - A)\Gamma(1 - a)D_{x1}^{-(1-a)}\mathbf{n}(x)\right]. \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{f}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$ в силу (83) и, следовательно, $\mathbf{p}(x) \in C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$, то и вектор-функция $t(x)$ будет принадлежать классу функций $C[0, 1] \cap C^2(0, 1)$.

Рассматривая уравнение (82) при $x = 0$ и $x = 1$, для нахождения значений $t(1)$ и $t(0)$ получим систему матричных уравнений:

$$\begin{cases} [\mathbf{A}(1)(E + A) + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1))]t(1) + \mathbf{A}(1)(E - A)t(0) = \mathbf{f}(1), \\ \mathbf{B}(0)(E + A)t(1) + [2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)) + \mathbf{B}(0)(E - A)]t(0) = \mathbf{f}(0). \end{cases} \quad (85)$$

Существование обратных матриц, оговоренных условиями теоремы, позволяет выразить значения $t(1)$ и $t(0)$:

$$\begin{cases} t(1) = \mathbf{q}(1) - [\mathbf{A}(1)(E + A) + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1))]^{-1} \mathbf{A}(1)(E - A)t(0), \\ t(0) = \mathbf{s}(0) - [2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)) + \mathbf{B}(0)(E - A)]^{-1} \mathbf{B}(0)(E + A)t(1), \end{cases} \quad (86)$$

где $\mathbf{q}(1) = [\mathbf{A}(1)(E + A) + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1))]^{-1} \mathbf{f}(1)$, $\mathbf{s}(0) = [2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)) + \mathbf{B}(0)(E - A)]^{-1} \mathbf{f}(0)$.

Из системы уравнений (85) нетрудно получить

$$\begin{cases} \left\{ [2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)) + \mathbf{B}(0)(E - A)] - \mathbf{B}(0)(E + A)[\mathbf{A}(1)(E + A) + \right. \\ \left. + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1))]^{-1} \mathbf{A}(1)(E - A) \right\} t(0) = \mathbf{f}(0) - \mathbf{B}(0)(E + A)\mathbf{q}(1), \\ \left\{ [\mathbf{A}(1)(E + A) + 2(\mathbf{B}(1) - \mathbf{H}(1))] - \mathbf{A}(1)(E - A)[2(\mathbf{A}(0) - \mathbf{H}(0)) + \right. \\ \left. + \mathbf{B}(0)(E - A)]^{-1} \mathbf{B}(0)(E + A) \right\} t(1) = \mathbf{f}(1) - \mathbf{A}(1)(E - A)\mathbf{s}(0). \end{cases} \quad (87)$$

Обратимость матриц, фигурирующих в системе уравнений (87), оговоренная в теореме, гарантирует однозначную разрешимость этих уравнений.

Окончательно неизвестная вектор-функция $t(x)$ определяется из формулы (84). Корректность поставленной задачи следует из корректности задачи Коши.

В наиболее общей постановке в условиях Бицадзе-Нахушева (81) могут фигурировать некоторые линейные непрерывные операторы, действующие в банаховом пространстве функций из класса гладкости искомого решения. Тогда при $\mathbf{H} = \mathbf{K} = 0$ получаем нелокальную задачу со смещением, а если $\mathbf{B} = 0$ или $\mathbf{A} = 0$, то условие (81) превращается в нелокальное условие типа Бицадзе-Самарского.

Корректность задач Коши-Гурса для системы уравнений (1) с инволютивной матрицей можно, в частности, обеспечить, если наложить на искомое решение, например, следующее нелокальное условие:

$$Pu(x, 0) = Tu[\Theta_i(x)] + \mathbf{c}(x), \quad i \in \{0, 1\}, \quad (88)$$

где T, P — линейные непрерывные операторы; $\mathbf{c}(x)$ — известная вектор-функция, причем либо P , либо T — обратимы. Тогда, при соблюдении дополнительных требований к операторам $P^{-1}T$ или $T^{-1}P$, обеспечивающих в конечном итоге применение принципа сжатых отображений, задача с условием (88) будет однозначно разрешима [12].

Аналогичные соображения можно высказать и для условия (88) с матричными (в частности, с матричными интегродифференциальными) операторами [13, 14]. Однако, как было показано выше, переход к матричным нелокальным краевым условиям вносит новый аспект в проблему корректности той или иной задачи, в чем нетрудно убедиться на примере задачи Коши-

Гурса для системы уравнений (1) с нелокальным условием (88) при $i = 0$, в котором P и T — не особые $[2 \times 2]$ — матрицы.

Обозначая $\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{t}(x)$ и используя выражение (17) для определения вектор-функции $\mathbf{t}(x)$, получим систему уравнений

$$Pt(x) - \frac{1}{2}T(E + A)t(x) = \mathbf{f}(x),$$

$$\text{где } \mathbf{f}(x) = \mathbf{c}(x) - \frac{1}{4}T(E + A)\Gamma(1-a)D_{0x}^{-(1-a)}\mathbf{n}(x) - \frac{1}{2}T(E - A)\left[t(0) + \frac{1}{2}D_{0x}^{-1}x^{-a}\mathbf{n}(x)\right].$$

Если $T = A$, где A — инволютивная матрица, фигурирующая в системе уравнений (1), а $P = E$ — единичная матрица, то

$$P - \frac{1}{2}T(E + A) = E - \frac{1}{2}A(E + A) = E - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}A^2 = E - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}E = \frac{1}{2}(E - A)$$

— вырожденная матрица, и однородная задача с условиями (72) и (88) будет иметь бесчисленное множество нетривиальных решений, если $t(0) = 0$, а неоднородная задача будет разрешима лишь при условии $\mathbf{f}(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$.

Рассмотренный в работе эффект влияния спектра матрицы коэффициентов при младших производных на корректность постановки задачи Коши-Гурса и некоторых ее нелокальных аналогов присущ не только системам с вырождением типа, но и некоторым системам с вырождением порядка. В этой связи следует отметить работу [15].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Андреев А.А., Огородников Е.Н. О корректности задач Дарбу и Коши-Гурса для одной вырождающейся гиперболической системы // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. восьмой межвуз. конф. Ч.3. Самара: СамГТУ, 1998. С.3–7.
2. Огородников Е.Н. О некоторых краевых задачах для системы уравнений типа Бицадзе-Лыкова с инволютивной матрицей // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. десятой межвуз. конф. Ч.3. Самара: СамГТУ, 2000. С.119–126.
3. Андреев А.А., Килбас А.А. О решениях неоднородного гипергеометрического уравнения и вычислении интегралов // Докл. АН БССР. 1983. Т.27. №6. С.493–496.
4. Андреев А.А., Килбас А.А. О некоторых ассоциированных гипергеометрических функциях // Изв. вузов. Математика. 1984. №12. С.3–12.
5. Андреев А.А. Построение элементарных решений и решение задачи Коши для уравнений и систем уравнений гиперболического типа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Куйбышев, 1981. 100 с.
6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976. 352 с.
7. Беллман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969. 368 с.
8. Ланкастер П. Теория матриц. М.: Наука, 1978. 280 с.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 688 с.
10. Нахушев А.М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. школа, 1995. 301 с.
11. Андреев А.А., Огородников Е.Н. О корректности некоторых нелокальных аналогов задачи Коши-Гурса для системы уравнений Бицадзе-Лыкова с инволютивной матрицей // Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики: Тез. докл. Второй междунар. конф. Нальчик: НИИ ПМА КБНЦ РАН, 2001. С. 53–54.
12. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука. 1986. 496 с.
13. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Применение матричных интегродифференциальных операторов в постановке и решении нелокальных краевых задач для систем уравнений гиперболического типа // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2001. Вып. 12. С. 45–53.
14. Андреев А.А., Огородников Е.Н. Краевая задача со смещением для системы уравнений с вырождением порядка в некоторых специальных случаях // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. одиннадцатой межвуз. конф. Ч.3. Самара: СамГТУ. 2001. С.3–10.
15. Андреев А.А., Огородников Е.Н. О корректности нелокальных аналогов задачи Коши-Гурса для системы уравнений с вырождением порядка в одном специальном случае // Тр. мат. центра им. Лобачевского. Т. 11. Проблемы современной математики: Мат. науч. конф. Казан. матем. общество. Казань: Унипресс, 2001. С. 10–14.