Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. О. Васильева, В. В. Сильвестров, Сосредоточенная сила вблизи вершины межфазной трещины с жёсткой накладкой на её берегу, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 1(), 191–195

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu918>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.90.164.192

26 апреля 2023 г., 13:53:53

УДК 539.3

СОСРЕДОТОЧЕННАЯ СИЛА ВБЛИЗИ ВЕРШИНЫ МЕЖФАЗНОЙ ТРЕЩИНЫ С ЖЁСТКОЙ НАКЛАДКОЙ НА ЕЁ БЕРЕГУ

Ю. О. Васильева, В. В. Сильвестров

¹ Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова, 428015, Чебоксары, Московский пр., 65.² Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, 199991, Москва, Ленинский пр., 65.

E-mails: shydaisy@mail.ru, v-silvestrov@yandex.ru

Изучается плоское напряжённое состояние вблизи вершины межфазной трещины, порождённое заданной сосредоточенной силой. Один из берегов трещины частично усилен жёсткой прямолинейной накладкой. Находятся комплексные потенциалы, коэффициенты интенсивности напряжений в вершине трещины, приводятся их графики.

Ключевые слова: трещина, жёсткая накладка, сосредоточенная сила, кусочно-однородная упругая плоскость, напряжения, коэффициенты интенсивности напряжений, гипергеометрическая функция.

Пусть в кусочно-однородном упругом изотропном теле, составленном из разных по упругим свойствам верхней и нижней полуплоскостей, на линии раздела сред $y = 0$ расположена полубесконечная открытая трещина $[0, +\infty)$, верхний берег которой на участке $[0, l]$ подкреплён абсолютно жесткой прямолинейной накладкой, присоединённой к телу без натяга, а остальная часть этого берега и весь нижний берег трещины свободны от напряжений:

$$\begin{aligned} u^+(x) + iv^+(x) &= i\varepsilon x, & x \in (0, l); & \quad \tau_{xy}^+(x) + i\sigma_y^+(x) = 0, & x \in (l, +\infty); \\ \tau_{xy}^-(x) + i\sigma_y^-(x) &= 0, & x \in (0, +\infty), \end{aligned}$$

где $u + iv$ — вектор смещений, $\tau_{xy} + i\sigma_y$ — вектор напряжений, ε — неизвестный угол поворота накладки, а верхними индексами плюс и минус помечены значения функций на верхнем и нижнем берегах трещины. Вдоль луча $(-\infty, 0]$ полуплоскости жёстко соединены друг с другом, и в точке $x = x_0$ ($x_0 < 0$) действует сосредоточенная сила $X_0 + iY_0$. На бесконечности напряжения и вращение исчезают. На накладку никакие внешние силы не действуют.

Требуется найти комплексные потенциалы, описывающие плоское напряжённое состояние тела, и исследовать поведение напряжений вблизи вершины трещины.

Воспользуемся формулами Колосова—Мусхелишвили для кусочно-одно-

---

Юлия Олеговна Васильева, аспирант, каф. математического анализа и дифференциальных уравнений. Василий Васильевич Сильвестров (д.ф.-м.н.), профессор, каф. высшей математики.

родной плоскости [1]:

$$\begin{aligned}\sigma_x + \sigma_y &= 4\operatorname{Re} \Phi_*(z), \quad z = x + iy, \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi_*(z) + \Omega_*(\bar{z}) + (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)}, \\ 2\mu_j(u + iv)'_x &= \kappa_j\Phi_*(z) - \Omega_*(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi'_*(z)},\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\Phi_*(z) &= \begin{cases} \Phi(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \alpha_1\Phi(z) + \alpha_2\Omega(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \quad \Omega_*(z) = \begin{cases} \Omega(z), & \operatorname{Im} z > 0, \\ \alpha_3\Omega(z) + \alpha_4\Phi(z), & \operatorname{Im} z < 0, \end{cases} \\ \alpha_1 &= (1 + \mu_*\kappa_1)/(1 + \kappa_2), \quad \alpha_2 = (1 - \mu_*)/(1 + \kappa_2), \quad \alpha_3 = 1 - \alpha_2, \quad \alpha_4 = 1 - \alpha_1, \\ \mu_* &= \mu_2/\mu_1, \quad \kappa_j = (3 - \nu_j)/(1 + \nu_j), \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

где $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ — кусочно-голоморфные функции (комплексные потенциалы) с линией разрыва $[0, +\infty)$, а μ_1 , ν_1 и μ_2 , ν_2 — модули сдвига и коэффициенты Пуассона верхней ($j = 1$) и нижней ($j = 2$) полуплоскостей соответственно. В точках $z = 0$ и $z = l \pm i0$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ могут иметь интегрируемые особенности, на ∞ они исчезают, а в точке $z = x_0$ имеют простые полюсы с вычетами $P_1 = -(X_0 + iY_0)/[2\pi(1 + \mu_*\kappa_1)]$ и $P_2 = \kappa_2(X_0 + iY_0)/[2\pi(\mu_* + \kappa_2)]$ соответственно [2]. На луче $(0, +\infty)$ функции $\Phi(z)$, $\Omega(z)$ удовлетворяют краевым условиям

$$\begin{aligned}\kappa_1\Phi^+(x) - \Omega^-(x) &= 2i\mu_1\varepsilon, \quad x \in (0, l); \\ \Phi^+(x) + \Omega^-(x) &= 0, \quad x \in (l, +\infty); \\ \alpha_1\Phi^-(x) + \alpha_2\Omega^-(x) + \alpha_3\Omega^+(x) + \alpha_4\Phi^+(x) &= 0, \quad x \in (0, +\infty),\end{aligned}\tag{2}$$

откуда находим [3]:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= H_1(z/l), \quad \Omega(z) = H_2(z/l); \\ H_j(\zeta) &= [A_0 + C_2(\zeta - t_0)^{-1} + \varepsilon\mu_1 J_2(\zeta)]\chi_{j1}(\zeta) + [C_1(\zeta - t_0)^{-1} + \varepsilon\mu_1 J_1(\zeta)]\chi_{j2}(\zeta), \\ A_0 &= -\frac{X_0 + iY_0}{2\pi l c_3(\alpha_1 + \alpha_3)}, \quad C_j = (-1)^j \frac{P_1\chi_{2j}(t_0) - P_2\chi_{1j}(t_0)}{l \det X^+(t_0)}, \quad t_0 = x_0/l, \\ J_j(\zeta) &= \frac{(-1)^j}{\kappa_1\pi} \int_0^1 \frac{\chi_{2j}^+(t) + \alpha_4\alpha_3^{-1}\chi_{1j}^+(t)}{(t - \zeta) \det X^+(t)} dt, \quad j = 1, 2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon\mu_1 &= -\left(\int_0^1 t \operatorname{Re} [(A_0 + C_2(t - t_0)^{-1})\chi_{11}^+(t) + C_1(t - t_0)^{-1}\chi_{12}^+(t)] dt\right) \times \\ &\quad \times \left(\int_0^1 t \operatorname{Re} [\chi_{11}^+(t)J_2(t) + \chi_{12}^+(t)J_1(t)] dt\right)^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}c_3 &= \frac{c_1\xi_2 e^{i\pi a}\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)\Gamma(b)} + \frac{c_2\xi_1 e^{i\pi(a+1-c)}\Gamma(2-c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b+1-c)\Gamma(1-a)}, \\ c_1 &= \frac{(1-\xi_1)\Gamma(2-c)e^{-i\pi c}}{\Gamma(a+1-c)\Gamma(1-b)}, \quad c_2 = \frac{(1-\xi_2)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\xi_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4m\kappa_1^{-1}} \right), \quad \alpha = \frac{\alpha_2\kappa_1 + \alpha_4}{\alpha_3\kappa_1}, \quad m = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \\ a &= 1 - \frac{\ln \xi_1}{2\pi i}, \quad b = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi i} (\ln m - \ln \xi_1), \quad c = 1 + \frac{1}{2\pi i} (\ln \xi_2 - \ln \xi_1) \\ (0 < \arg \xi_1 &\leq \pi, \quad \pi \leq \arg \xi_2 < 2\pi, \quad \operatorname{Im} \xi_1 \geq 0, \quad \operatorname{Im} \xi_2 \leq 0),\end{aligned}$$

где $\Gamma(\zeta)$ — гамма-функция Эйлера и $\chi_{ij}(\zeta)$ — элементы канонической матрицы $\mathbf{X}(\zeta)$ однородной векторной краевой задачи Римана (2) при $l = 1$. Для изучения напряжений вблизи вершины трещины $z = 0$ достаточно знать выражение этой матрицы при $\operatorname{Re} z < 1$:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(\zeta) &= \zeta^\lambda \begin{pmatrix} c_1\xi_2 & c_2\xi_1 \\ c_1m & c_2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_{11}(\zeta) & \eta_{12}(\zeta) \\ \eta_{21}(\zeta) & \eta_{22}(\zeta) \end{pmatrix}, \quad \lambda = -\frac{\ln \xi_1}{2\pi i}, \\ \eta_{11}(\zeta) &= F(a, b; c; \zeta), \quad \eta_{12}(\zeta) = a(1 - \zeta)F(a + 1, b; c; \zeta), \\ \eta_{21}(\zeta) &= \zeta^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; \zeta), \\ \eta_{22}(\zeta) &= (a - c + 1)\zeta^{1-c}(1 - \zeta)F(a - c + 2, b - c + 1; 2 - c; \zeta) \\ &\quad \text{при } |\zeta| < 1, \zeta \notin [0, 1]; \\ \eta_{11}(\zeta) &= a_*(\zeta - 1)^{-a}F(a, c - b; c; \zeta_*), \\ \eta_{12}(\zeta) &= aa_*(\zeta - 1)^{-a}F(a + 1, c - b; c; \zeta_*), \\ \eta_{21}(\zeta) &= -c_*\zeta^{1-c}(\zeta - 1)^{c-a-1}F(a + 1 - c, 1 - b; 2 - c; \zeta_*), \\ \eta_{22}(\zeta) &= (c - a - 1)c_*\zeta^{1-c}(\zeta - 1)^{c-a-1}F(a + 2 - c, 1 - b; 2 - c; \zeta_*), \\ a_* &= e^{i\pi a}, \quad \zeta_* = \zeta/(\zeta - 1), \quad c_* = e^{i\pi(a-c)} \\ &\quad \text{при } \operatorname{Re} \zeta < 1/2, \zeta \notin [0, 1/2].\end{aligned}$$

Здесь $F(a, b; c; \zeta)$ — гипергеометрическая функция Гаусса, а у многозначных функций ζ^p и $(\zeta - 1)^q$ берутся ветви, однозначные в плоскости с разрезами $[0, +\infty)$ и $[1, +\infty)$ соответственно, определяемые условиями $0 < \arg \zeta < 2\pi$ и $0 < \arg(\zeta - 1) < 2\pi$.

Из приведённых формул и формул (1) следует, что вблизи точки $z = 0$ на действительной отрицательной полуоси $x < 0$ вектор напряжений $\sigma_y - i\tau_{xy}$ имеет асимптотику

$$\begin{aligned}\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) &= \frac{K_{\text{I}} - iK_{\text{II}}}{\sqrt{2\pi}|x|^{\gamma_0 - i\delta_0}} + \frac{K_{\text{III}} - iK_{\text{IV}}}{\sqrt{2\pi}|x|^{1 - \gamma_0 - i\delta_0}} + O(1), \quad x \rightarrow 0-0, \\ K_{\text{I}} - iK_{\text{II}} &= \sqrt{2\pi}(\xi_1 + m)D_2e^{-i\pi(\gamma_0 - i\delta_0)}, \\ K_{\text{III}} - iK_{\text{IV}} &= \sqrt{2\pi}(\xi_2 + m)D_1e^{-i\pi(1 - \gamma_0 - i\delta_0)}, \quad \gamma_0 - i\delta_0 = \ln \xi_2/(2\pi i), \\ D_j &= c_j[A_0 - C_2t_0^{-1} + \varepsilon\mu_1J_2(0) + (\lambda_j - 1)(C_1t_0^{-1} - \varepsilon\mu_1J_1(0))]l^{\lambda_j}, \\ \lambda_j &= (2\pi i)^{-1} \ln \xi_j, \quad j = 1, 2\end{aligned}$$

в случае $\gamma_0 \neq 1/2$ и асимптотику

$$\begin{aligned}\sigma_y(x) - i\tau_{xy}(x) &= \frac{(K_{\text{I}} - iK_{\text{II}})|x|^{i\delta_2} + (K_{\text{III}} - iK_{\text{IV}})|x|^{i\delta_1}}{\sqrt{2\pi}|x|} + O(1), \quad x \rightarrow 0-0, \\ K_{\text{I}} - iK_{\text{II}} &= -\sqrt{2\pi}(\xi_1 + m)D_2e^{-\pi\delta_2},\end{aligned}$$

$$K_{\text{III}} - iK_{\text{IV}} = -\sqrt{2\pi}(\xi_2 + m)D_1 e^{-\pi\delta_1}, \quad \delta_{1,2} = \ln |\xi_{1,2}|/(2\pi)$$

в случае $\gamma_0 = 1/2$. Таким образом, интенсивность напряжений вблизи точки $z = 0$ в любом случае определяется четырьмя коэффициентами K_I , K_{II} , K_{III} , K_{IV} , и напряжения в вершине трещины всегда имеют как степенную, так и осциллирующую особенность. Для значений упругих параметров $\kappa_1 = 1,8$, $\kappa_2 = 2,2$ и $\mu_* = 2$, когда $\gamma_0 = 0,79373$, графики зависимости коэффициентов K_I , K_{II} , K_{III} , K_{IV} и угла поворота накладки ε от расстояния $d = |x_0|$ между точкой приложения сосредоточенной силы и вершиной трещины и от направления ϕ силы приведены на рис. 1–4. В первом случае сила $X_0 + iY_0 = -P$ ($P > 0$) постоянна и направлена вдоль действительной оси, а во втором случае сила $X_0 + iY_0 = P(\cos \phi + i \sin \phi)$ составляет угол ϕ с осью x , $x_0 = 0,2$. В обоих случаях принято $l = 1$.

Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 10-01-00103).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Черепанов Г. П. Механика разрушения композиционных материалов. М.: Наука, 1983. 296 с. [Cherepanov G. P. Fracture Mechanics of composite materials. Moscow: Nauka, 1983. 296 pp.]
2. Сильвестров В. В. Метод римановых поверхностей в задаче о межфазных трещинах и включениях при наличии сосредоточенных сил // Изв. вузов. Матем., 2004. № 7. С. 78–91; англ. пер.: Sil'vestrov V. V. The method of Riemann surfaces in the problem of interfacial cracks and inclusions in the presence of point forces. // Russian Math. (Iz. VUZ), 2004. Vol. 48, no. 7. Pp. 75–88.
3. Хвоцинская Л. А. К проблеме Римана в случае произвольного числа особых точек / В сб.: Краевые задачи, специальные функции и дробное исчисление: Труды международной конференции (16–20 февраля 1996 г.); ред. А. А. Килбас. Минск: Белорус.

ун-т, 1996. С. 377–382. [Khvoshchinskaya L. A. To the Riemann problem in the case of an arbitrary number of singular points/ In: *Boundary value problems, special functions and fractional calculus*: Proceedings of the International Conference (February 16–20, 1996); ed. A. A. Kilbas. Minsk: Belorus. Un-t, 1996. Pp. 377–382].

Поступила в редакцию 27/I/2011;
в окончательном варианте — 14/III/2011.

MSC: 74B05; 74Rxx, 33Cxx

CONCENTRATED FORCE ACTING NEAR THE TIP OF AN INTERFACE CRACK WITH A RIGID OVERLAY ON ITS SIDE

Yu. O. Vasilyeva, V. V. Silvestrov

¹ Ulyanov Chuvash State University,
65, Moskovskiy pr., Cheboksary, 428015, Russia.

² Gubkin Russian State University of Oil and Gas,
65, Leninskiy pr., Moscow, 199991, Russia.

E-mails: shydaisy@mail.ru, v-silvestrov@yandex.ru

Plane stress state near the tip of an interface crack induced by specified concentrated force is considered. One of the crack faces is partially reinforced by a rigid straight line overlay. The complex potentials, the stress intensity factors at the crack-tip are found, corresponding plots are presented.

Key words: *crack, rigid overlay, concentrated force, piecewise-homogeneous elastic plane, stresses, stress intensity factors, hypergeometric function.*

Original article submitted 27/I/2011;
revision submitted 14/III/2011.

Yulia O. Vasilyeva, Postgraduate Student, Dept. of Mathematical Analysis & Differential Equations. *Vasily V. Silvestrov* (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Professor, Dept. of Higher Mathematics.