Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Е. Лернер, Существенно нелокальные краевые задачи для гиперболических уравнений, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 36–39

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu92>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 07:43:55

СУЩЕСТВЕННО НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Для гиперболического нелинейного уравнения общего вида ставится краевая задача в характеристическом треугольнике лишь с нелокальными краевыми условиями на всей его границе. Разрешимость задачи редуцируется к разрешимости системы трех нелинейных интегродифференциальных уравнений. Для волнового уравнения дается формула решения этой задачи, а для линейного уравнения без производных первого порядка, в частности для телеграфного уравнения, показывается ее разрешимость. Для гиперболического линейного однородного уравнения второго порядка с исчезающим инвариантом Римана в характеристическом квадрате ставится краевая задача с нелокальными краевыми условиями на его сторонах и заданием значения искомой функции в одной из его вершин. Показывается однозначная ее разрешимость.

1. Пусть Δ - открытый треугольник с вершинами в точках $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,0)$ и точка $Q(x,1-x) \in AB$, $Q_1(x,0)$ и $Q_2(0,1-x)$ - ее проекция соответственно на OB и OA , $0 < x < 1$.

Рассмотрим в области Δ уравнения

$$u_{xy} = g(x, y, u, p, q), \quad u = u(x, y), \quad p = u_x(x, y), \quad q = u_y(x, y), \quad (1)$$

$$u_{xy} = f(x, y), \quad f(x, y) \in C^0(\bar{\Delta}), \quad (2)$$

$$u_{xy} = f(x, y) - a(x, y)u_x - b(x, y)u_y - c(x, y)u, \quad (3)$$

где $a(x, y), b(x, y) \in C^1(\bar{\Delta})$, $c(x, y) \in C^0(\bar{\Delta})$.

В качестве продолжения постановки и исследования краевых задач, содержащих лишь нелокальные краевые условия [1-3], рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $u(x, y) \in C^0(\bar{\Delta}) \cap C^1(\bar{\Delta})$, $u_{xy} \in C^0(\Delta)$;
- 2) $u(x, y)$ такова, что $g(x, y, u, p, q) \in C^0(\Delta \times \Lambda)$, $\Lambda = (-\infty < u < +\infty) \times (-\infty < p < +\infty) \times (-\infty < q < +\infty)$;
- 3) $u(x, 1-x) - u(x, 0) = y_1(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $y_1(x) \in C^1(0 \leq x \leq 1)$;
- 4) $u(1-y, y) - u(0, y) = y_2(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $y_2(y) \in C^1(0 \leq y \leq 1)$, $y_1(1) = y_2(1) = 0$.

Т е о р е м а 1. Для уравнения (2) решение задачи 1 единственно и определяется формулой

$$u(x, y) = y_1(1-y) + y_2(1-x) + \int_0^x \int_0^y f(s, t) ds dt - \int_0^{1-x} \int_0^{1-x} f(s, t) ds dt - \int_0^{1-y} \int_0^y f(s, t) ds dt. \quad (4)$$

Т е о р е м а 2. Пусть функция $u(x, y)$ является решением системы (5) – (7) интегродифференциальных уравнений

$$u(x, y) = y_1(1-y) + y_2(1-x) + \int_0^x \int_0^y g(s, t; u(s, t), u_s(s, t), u_t(s, t)) ds dt - \int_0^{1-x} \int_0^{1-x} g(s, t; u(s, t), u_s(s, t), u_t(s, t)) ds dt - \int_0^{1-y} \int_0^y g(s, t; u(s, t), u_s(s, t), u_t(s, t)) ds dt, \quad (5)$$

$$u_x(x, y) = -y_2(1-x) + \int_0^y g(x, t; u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t)) dt - \int_0^{1-x} g(x, t; u(x, t), u_x(x, t), u_t(x, t)) dt + \int_0^x g(1-x, t; u(1-x, t), u_t(1-x, t)) dt, \quad (6)$$

$$u_y(x, y) = -y_1(1-y) + \int_0^y g(s, y; u(s, y), u_s(s, y), u_y(s, y)) ds + \\ + \int_0^y g(1-y, t; u(1-y, t), u_y(1-y, t), u_t(1-y, t)) dt - \int_0^{1-y} g(s, y; u(s, y), u_s(s, y), u_y(s, y)) ds. \quad (7)$$

Тогда функция $u(x, y)$ является решением задачи 1 для уравнения (1).

В справедливости теорем 1 и 2 можно убедиться непосредственно, пользуясь формулами (8), (9):

$$\left(\int_0^x \int_0^{1-x} r(s, t) ds dt \right)'_x = \int_0^{1-x} r(x, t) dt - \int_0^x r(s, 1-x) ds; \quad (8)$$

$$\left(\int_0^{1-y} \int_0^y r(s, t) ds dt \right)'_y = - \int_0^y r(1-y, t) dt + \int_0^{1-y} r(s, y) ds. \quad (9)$$

Т е о р е м а 3. Для телеграфного уравнения

$$u_{xy} + ku = f(x, y), \quad k = \text{const}, \quad f(x, y) \in C^0(\Delta)$$

и его обобщения

$$u_{xy} + C(x, y)u = f(x, y), \quad C(x, y) \in C^0(\Delta), \quad f(x, y) \in C^0(\Delta)$$

решение задачи 1 существует и единственно.

Доказательство следует из соотношения (3) для указанных уравнений и метода последовательных приближений (см. [4], с. 211-216).

II. Пусть ∇ - открытый квадрат с вершинами $O(0,0)$, $A(0,1)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$. Рассмотрим в ∇ уравнение (3) при $f(x, y) \equiv 0$, т. е. уравнение

$$Lu = u_{xy} + a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = 0, \quad (10)$$

где $a(x, y), b(x, y) \in C^1(\overline{\nabla})$, $c(x, y) \in C^0(\overline{\nabla})$.

Задача 2. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $Lu \equiv 0$ в ∇ ;
- 2) $u \in C^0(\overline{\nabla}) \cap C^1(\overline{\nabla})$, $u_{xy} \in C^0(\overline{\nabla})$;
- 3) $u(x, 1) - u(x, 0) = y(x)$, $0 \leq x \leq 1$, $y(x) \in C^1(0 \leq x \leq 1)$;
- 4) $u(1, y) - u(0, y) = j(y)$, $0 \leq y \leq 1$, $j(y) \in C^1(0 \leq y \leq 1)$, $y(1) = y(0) = j(1) = j(0) = 0$;
- 5) $u(0, 0) = u_0 = \text{const}$.

Т е о р е м а 4. Решение задачи 2 существует и единственно, если

$$h(x, y) = a_x(x, y) + a(x, y)b(x, y) - c(x, y) \equiv 0 \quad \text{в } \overline{\nabla}; \quad (11)$$

$$\int_0^1 a(x, t) dt \neq 0, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \int_0^1 b(t, y) dt \neq 0, \quad 0 \leq y \leq 1. \quad (12)$$

Доказательство. Пусть $t(x) = u(x, 1)$, $t(x) \in C^1$, $0 \leq x \leq 1$; $n(y) = u_y(0, y)$, $n(y) \in C^0(0 \leq y \leq 1)$.

Тогда функцию $u(x, y)$ в ∇ можно представить по формуле (1.27) [5]:

$$u(x, y) = N(x, y) \left[t(x) + \int_1^y N^{-1}(x, t) P(x, t) n(t) dt \right], \quad (13)$$

где $N(x, y) = \exp \left\{ - \int_1^y a(x, t) dt \right\}$, $P(x, y) = \exp \left\{ - \int_0^x b(t, y) dt \right\}$.

Отсюда, пользуясь нелокальными условиями 3) и 4) и условием 5) для нахождения функций $t(x)$ и $n(y)$, получим систему интегральных уравнений (14), (15):

$$t(x) = \frac{N(x, 0)}{1 - N(x, 0)} \int_1^0 N^{-1}(0, t) P(0, t) n(t) dt + \frac{y(x)}{1 - N(x, 0)}, \quad (14)$$

$$n(y) + \frac{1}{r(y, y)} \int_0^y \frac{\partial r(y, t)}{\partial y} n(t) dt = \frac{j'(y)}{r(y, y)} - u_0 \frac{m'(y)}{r(y, y)}, \quad (15)$$

где

$$r(y, t) = N(1, y)N^{-1}(1, t)P(1, t) - N(0, y)N^{-1}(0, t)P(0, t); \quad (16)$$

$$r(y, y) = \exp \left\{ - \int_0^1 b(t, y) dt \right\} - 1; \quad m(y) = N(1, y) - N(0, y). \quad (17)$$

В силу свойств функций $a(x, y), b(x, y)$ и $c(x, y)$ уравнение (15) является интегральным уравнением Вольтера второго рода и, следовательно, однозначно разрешимо, причем $n(y) \in C^0[0, 1]$. Отсюда из (14) следует, что функция $t(x)$ однозначно определена и $t(x) \in C^1[0, 1]$. Из сказанного и (13) следует теорема 4.

Замечание 1. Здесь в отличие от [2] удалось доказать разрешимость задачи 2 для линейного гиперболического уравнения с младшими членами. Легко видеть, что к тому же результату пришли, если бы вместо квадрата ∇ был взят прямоугольник с любыми размерами.

III. Пусть область D есть разность двух квадратов $D_0 = O_0 A_0 B_0 C_0$ и $\overline{D_1} = \overline{OABC}$; $O_0(0; 0)$, $A_0(0; 3)$, $B_0(3; 3)$, $C_0(3; 0)$; $O(1; 1)$, $A(1; 2)$, $B(2; 2)$, $C(2; 1)$. Пусть также O_1 и C_1 - проекции точек O и C на $O_0 C_0$; A_1 и B_1 - проекции точек A и B на $A_0 B_0$; O_2 и A_2 - проекции точек O и A на $O_0 A_0$; C_2 и B_2 - проекции точек C и B на $C_0 B_0$. Рассмотрим прямоугольники $\nabla_1 = OCC_1 O_1$, $\nabla_2 = BCC_2 B_2$, $\nabla_3 = ABB_1 A_1$, $\nabla_4 = OAA_2 O_2$.

В области D рассмотрим уравнение (10) при $a(x, y), b(x, y) \in C^1(\overline{D})$, $c(x, y) \in C^0(\overline{D})$.

Задача 3. Найти функцию $u(x, y)$ со свойствами:

- 1) $Lu \equiv 0$ в $\overline{D} \setminus S$, $S = OO_1 \cup CC_1 \cup A_1 A \cup B_1 B \cup B_2 B \cup C_2 C \cup A_2 A \cup O_2 O$;
- 2) $u \in C^0(\overline{D}) \cap C^1(\overline{\nabla_1}) \cap C^1(\overline{\nabla_2}) \cap C^1(\overline{\nabla_3}) \cap C^1(\overline{\nabla_4})$;
 $u_{xy} \in C^0[D \setminus (A_1 O_1 \cup B_1 C_1 \cup A_2 B_2 \cup O_2 C_2 \cup)]$;
- 3) $u(1, 0) = u_0 = \text{const}$;
- 4) $u(x, 1) - u(x, 0) = y_1(x)$, $1 \leq x \leq 2$, $y_1(x) \in C^1(1 \leq x \leq 2)$; $y_1(1) = y_1(2) = 0$;
- 5) $u(2, y) - u(1, y) = j_1(y)$, $0 \leq y \leq 1$; $j_1(y) \in C^1(0 \leq y \leq 1)$; $j_1(0) = j_1(1) = 0$;
- 6) $u(x, 2) - u(x, 1) = y_2(x)$, $2 \leq x \leq 3$, $y_2(x) \in C^1(2 \leq x \leq 3)$; $y_2(2) = y_2(3) = 0$;
- 7) $u(3, y) - u(2, y) = j_2(y)$, $1 \leq y \leq 2$; $j_2(y) \in C^1(1 \leq y \leq 2)$; $j_2(1) = j_2(2) = 0$;
- 8) $u(x, 3) - u(x, 2) = y_3(x)$, $1 \leq x \leq 2$, $y_3(x) \in C^1(1 \leq x \leq 2)$; $y_3(1) = y_3(2) = 0$;
- 9) $u(2, y) - u(1, y) = j_3(y)$, $2 \leq y \leq 3$; $j_3(y) \in C^1(2 \leq y \leq 3)$; $j_3(2) = j_3(3) = 0$;
- 10) $u(x, 2) - u(x, 1) = y_4(x)$, $0 \leq x \leq 1$; $y_4(x) \in C^1(0 \leq x \leq 1)$; $y_4(0) = y_4(1) = 0$;
- 11) $u(1, y) - u(0, y) = j_4(y)$, $1 \leq y \leq 2$; $j_4(y) \in C^1(1 \leq y \leq 2)$; $j_4(1) = j_4(2) = 0$.

Теорема 5. Решение задачи 3 существует и единственно, если:

$$h(x, y) = a_x(x, y) + a(x, y)b(x, y) - c(x, y) \equiv 0 \text{ в } \overline{\nabla_1} \cup \overline{\nabla_2} \cup \overline{\nabla_3} \cup \overline{\nabla_4}; \quad (18)$$

$$\int_0^1 a(x, t) dt \neq 0, 1 \leq x \leq 2; \int_1^2 b(t, y) dt \neq 0, 0 \leq y \leq 1; \quad (19)$$

$$\int_1^2 a(x, t) dt \neq 0, 2 \leq x \leq 3; \int_2^3 b(t, y) dt \neq 0, 1 \leq y \leq 2; \quad (20)$$

$$\int_2^3 a(x, t) dt \neq 0, 1 \leq x \leq 2; \int_1^2 b(t, y) dt \neq 0, 2 \leq y \leq 3; \quad (21)$$

$$\int_1^2 a(x, t) dt \neq 0, 0 \leq x \leq 1; \int_0^1 b(t, y) dt \neq 0, 1 \leq y \leq 2. \quad (22)$$

Доказательство.

1. Пусть $u_i(x, y) (i = \overline{1, 4})$ – следы искомой функции $u(x, y)$ в $\overline{V_i}$. Тогда функция $u_i(x, y)$ существует и единственна по теореме 4 в силу соответственно условий (19) – (22) доказываемой теоремы и свойств инварианта Римана $h(x, y)$ относительно линейных преобразований переменных [4].

Действительно, рассмотрим, например, функцию $u_1(x, y)$. Заменой переменных $x = x' + 1$, $y = y'$ квадрат ∇_1 преобразуется в квадрат $\nabla = (0 \leq x \leq 1) \times (0 \leq y \leq 1)$, условия 3) – 5) задачи 3 – соответственно в условия 5), 3) и 4) задачи 2. Отсюда по теореме 4 следует существование и единственность функции $u_1(x, y)$. Аналогично доказывается существование и единственность функций $u_i(x, y) (i = \overline{2, 4})$ с учетом $u(1, 0) = u_2(2, 1) = u_3(1, 2) = u_4(0, 1) = u_0$ в силу свойств функций $u_i(x)$ и $j_i(y), i = \overline{1, 4}$.

2. Функция $u_{12}(x, y)$ – след искомой функции $u(x, y)$ в квадрате $\overline{V_{12}} = (2 \leq x \leq 3) \times (0 \leq y \leq 1)$ – существует и единственна как решение в нем задачи Гурса с данными:

- 1) $u_{12}(2, y) = u_1(2, y), 0 \leq y \leq 1$;
- 2) $u_{12}(x, 1) = u_2(x, 1), 2 \leq x \leq 3$;
- 3) $u_1(2, 1) = u_2(2, 1) = u_0$.

Аналогично находятся следы искомой функции $u(x, y)$ в остальных «угловых» – квадратах области D , чем и завершается доказательство теоремы 5.

Замечание 2. Доказанная теорема указывает на возможность постановки разрешимой существенно нелокальной краевой задачи в двусвязной области, причем с нелокальными краевыми условиями лишь на части границы области.

Замечание 3. Если к условиям задачи 3 добавить требование $Lu \equiv 0, (1 \leq x \leq 2) \times (1 \leq y \leq 2)$ и $u \in C^0(\overline{D_0})$, то получится существенно нелокальная краевая задача в односвязной области с нелокальными условиями на части границы области и расположенной внутри него замкнутой линии – сторонах квадрата.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Лернер М.Е. Две существенно нелокальные краевые задачи для уравнений эллиптического типа // Математическое моделирование и краевые задачи: Тр. восьмой межвуз. науч. конференции. Ч. 3. Самара: СамГТУ, ИА РФ, 1998. С. 63–66.
2. Лернер М.Е. Существенно нелокальные краевые задачи для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов // Вест. СамГТУ. Сер.: Физ.-мат. науки. 1999. Вып. 7. С. 178–180.
3. Лернер М.Е. Репин О.А. Существенно нелокальная краевая задача для уравнений с частными производными // Математические заметки. 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 478–480.
4. Трикоми Ф. Лекции по уравнениям в частных производных // М.: ИЛ, 1957. 443 с.
5. Лернер М.Е. Принципы максимума и краевые задачи для гиперболических уравнений, систем уравнений и уравнений смешанного типа в неклассических областях. Самара: СамГТУ, 2001. 193 с.
6. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. М.: ГИФМЛ, 1959. 232 с.