Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Яхонтов, Вычисление гипергеометрических рядов с квазилинейной временной и линейной ёмкостной сложностью, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 3(), 149–156

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu924>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 09:29:50

Информатика

УДК 519.677

ВЫЧИСЛЕНИЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ВРЕМЕННОЙ И ЛИНЕЙНОЙ ЁМКОСТНОЙ СЛОЖНОСТЬЮ

С. В. Яхонтов

Санкт-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет,
198504, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр-т, 28.

E-mails: sergey_home_mail@inbox.ru

Проводится построение простого для практической реализации алгоритма со сложностью $O(M(n) \log(n)^2)$ по времени и $O(n)$ по памяти для вычисления гипергеометрических рядов с рациональными коэффициентами на машине Шёнхаге, где $M(n)$ — сложность умножения целых чисел. Показывается, что данный алгоритм пригоден в практической информатике для построения конструктивных аналогов часто используемых констант математического анализа.

Ключевые слова: конструктивные вещественные числа, гипергеометрические ряды, квазилинейная временная сложность, линейная ёмкостная сложность.

Введение. Предлагается простой для практической реализации алгоритм, квазилинейный по времени и линейный по памяти, на машине Шёнхаге [1], для вычисления приближённых значений гипергеометрических рядов с рациональными коэффициентами. Данные ряды используются для расчёта некоторых констант математического анализа и элементарных функций в рациональных точках.

С помощью $Sch(FQLINTIME//LINS\ SPACE)$ будем обозначать класс алгоритмов, вычисляемых на машине Шёнхаге, квазилинейных по времени и линейных по памяти. Основной особенностью машины Шёнхаге является возможность рекурсивных вызовов процедур. Под квазилинейностью понимается ограниченность сверху функцией вида $O(n \log(n)^k)$ при некотором k .

Отличительной особенностью алгоритмов, основанных на разложениях в ряды, является относительная простота как самих алгоритмов, так и анализа их вычислительной сложности, так как при этом обычно производятся только арифметические операции над рациональными числами без обращения к дополнительным алгоритмам. Для вычислений с небольшим количеством знаков после двоичной точки ряды эффективнее других способов в связи с небольшими константами в оценках вычислительной сложности. Поэтому такие алгоритмы важны в информатике для практических приложений.

Известно [2], что линейно сходящиеся гипергеометрические ряды с рациональными коэффициентами можно вычислять с помощью метода двоичного деления с временной сложностью $O(M(n)(\log(n))^2)$ и ёмкостной слож-

Яхонтов Сергей Викторович (к.ф.-м.н.), доцент, каф. информатики.

ностью $O(n \log(n))$ ($M(n)$ — сложность умножения n -битовых целых чисел). В последнее время появились работы, например [3], в которых описываются алгоритмы (на основе модифицированного метода двоичного деления) вычисления значений линейно сходящихся гипергеометрических рядов с временной сложностью $O(M(n)(\log(n))^2)$ и ёмкостной сложностью $O(n)$. В [4] предложены простые для практической реализации алгоритмы для вычисления степенных рядов с полиномиальной временной и линейной ёмкостной сложностью.

Недостатком метода из [3] является относительная сложность практической реализации. В настоящей работе предлагается простой для практической реализации алгоритм, который, так же как и алгоритм из [3], является квазилинейным по времени и линейным по памяти. Идея работать с некоторой заданной точностью для того, чтобы вычислить значение гипергеометрического ряда с линейной ёмкостной сложностью, предложена в [5].

Вычислительная сложность конструктивных вещественных чисел и функций подробно освещается в монографии [6]. Множество конструктивных вещественных чисел с квазилинейной по времени и линейной по памяти сложностью вычисления двоично-рациональных приближений будем обозначать $Sch(FQLINTIME//LINS\!P\!A\!C\!E)_{CF}$ (данное множество можно определить по аналогии с множеством $FLINS\!P\!A\!C\!E$ вычислимых действительных чисел [4] с учётом другой вычислительной модели).

Везде далее через n будет обозначаться длина записи точности вычисления 2^{-n} двоично-рациональных приближений. Под функцией $\log(k)$ будем понимать логарифм по основанию 2.

1. Метод двоичного деления. Данный метод предназначен для вычисления значений линейно сходящихся рядов с рациональными коэффициентами, в частности, для вычисления гипергеометрических рядов вида

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a(i)}{b(i)} \prod_{j=0}^i \frac{p(j)}{q(j)}, \quad (1)$$

где a, b, p, q — полиномы с целыми коэффициентами; данный ряд линейно сходится, если его частичная сумма

$$S(\mu(k)) = \sum_{i=0}^{\mu(k)} \frac{a(i)}{b(i)} \prod_{j=0}^i \frac{p(j)}{q(j)}, \quad (2)$$

где $\mu(k)$ — линейная функция от k , отличается от точного значения не более чем на 2^{-k} : $|S - S(\mu(k))| \leq 2^{-k}$.

В классическом варианте метод двоичного деления состоит в следующем. Обозначим $k_1 = \mu(k)$. Рассмотрим частичную сумму (2) для некоторых чисел i_1 и i_2 , $0 \leq i_1 \leq k_1$, $0 \leq i_2 \leq k_1$, $i_1 \leq i_2$:

$$S(i_1, i_2) = \sum_{i=i_1}^{i_2} \frac{a(i)p(i_1) \dots p(i)}{b(i)q(i_1) \dots q(i)}. \quad (3)$$

Будем вычислять величины $P(i_1, i_2) = p(i_1) \dots p(i_2)$, $Q(i_1, i_2) = q(i_1) \dots q(i_2)$, $B(i_1, i_2) = b(i_1) \dots b(i_2)$ и $T(i_1, i_2) = B(i_1, i_2)Q(i_1, i_2)S(i_1, i_2)$. Если $i_1 = i_2$, то

величины вычисляются напрямую. Иначе ряд делится на две части, левую и правую, и величины $P(i_1, i_2)$, $Q(i_1, i_2)$, $B(i_1, i_2)$ вычисляются для каждой из частей рекурсивно. Затем полученные величины комбинируются:

$$\begin{aligned} P(i_1, i_2) &= P_l P_r, & Q(i_1, i_2) &= Q_l Q_r, & B(i_1, i_2) &= B_l B_r, \\ T(i_1, i_2) &= B_r Q_r T_l + B_l P_l T_r. \end{aligned} \quad (4)$$

Алгоритм начинает свою работу с $i_1 = 0$, $i_2 = k_1$. После вычисления величин $T(0, k_1)$, $B(0, k_1)$, $Q(0, k_1)$ осуществляется деление $T(0, k_1)$ на $B(0, k_1)Q(0, k_1)$, чтобы получить результат с заданной точностью. Длины чисел $T(0, k_1)$ и $B(0, k_1)Q(0, k_1)$ пропорциональны $k \log(k)$, то есть алгоритм двоичного деления является квазилинейным по памяти; временная сложность данного алгоритма — $O(M(k) \log(k)^2)$ [2].

2. Алгоритм вычисления гипергеометрических рядов из [3]. В алгоритме из [3] вычисляются редуцированные числитель и знаменатель дроби $\hat{T}/\hat{Q}$, где $\hat{T} = TBQ$, $\hat{Q} = BQ$, имеющие длину $O(n)$, тогда как в классическом варианте вычисляются числитель и знаменатель длины $O(n \log(n))$. Затем производится деление редуцированного числителя на редуцированный знаменатель с тем, чтобы получить значение суммы ряда с заданной точностью. Параметром усовершенствованного алгоритма из [3] является модуль m — верхняя граница длины редуцированных $\hat{T}$ и $\hat{Q}$; модуль m вычисляется как произведение достаточного числа простых чисел. Ряд разбивается на N/G групп, где G — величина, зависящая от m , и для каждой группы применяется классический алгоритм двоичного деления. Далее вычисленные значения комбинируются по модулю m с использованием реконструкции рациональных чисел с тем, чтобы получить $\hat{T}$ и $\hat{Q}$.

Недостатком данного алгоритма является необходимость оценивать величину m для каждого вида ряда отдельно; в [3] для этого предлагается достаточно трудоемкий метод, на примере которого оценивается m для ряда $\zeta(3)$. Недостатком алгоритма из [3] является также необходимость реализовывать достаточно сложный алгоритм реконструкции рациональных чисел (rational number reconstruction), имеющий временную сложность $O(M(n) \log(n))$ и ёмкостную сложность $O(n)$.

3. Основной алгоритм класса $Sch(FQLINTIME//LINS\,SPACE)$. Модифицируем метод двоичного деления для гипергеометрических рядов так, чтобы алгоритм получился простой и при этом вычисления находились в пределах класса $Sch(FQLINTIME//LINS\,SPACE)$.

Пусть требуется вычислить значения гипергеометрического ряда (1) с точностью 2^{-n} . Для этого достаточно вычислить частичную сумму (2) с точностью $2^{-(n+1)}$, так как

$$\begin{aligned} |S - S(\mu(n+1))^*| &\leq |S - S(\mu(n+1))| + |S(\mu(n+1)) - S(\mu(n+1))^*| \leq \\ &\leq 2^{-(n+1)} + 2^{-(n+1)} = 2^{-n}. \end{aligned}$$

Здесь $S(\mu(n+1))^*$ — обозначение для приближенного значения $S(\mu(n+1))$. Обозначим $r = \mu(n+1)$. Возьмем минимальную величину k_1 такую, что $2^{k_1} \geq r$; пусть $r_1 = \lceil r/k_1 \rceil$. Запишем частичную сумму (2) в виде

$$P(r) = \sigma_1 + \tau_2 [\sigma_2 + \tau_3 [\sigma_3 + \dots + \tau_{k_1-1} [\sigma_{k_1-1} + \tau_{k_1} \sigma_{k_1}]]], \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{где } \sigma_1 &= \sum_{i=0}^{r_1-1} \frac{a(i)}{b(i)} \prod_{j=0}^i \frac{p(j)}{q(j)} = \sigma'_1, \\ \tau_2 &= \prod_{j=0}^{r_1} \frac{p(j)}{q(j)}, \quad \sigma_2 = \frac{a(r_1)}{b(r_1)} + \sum_{i=r_1+1}^{2r_1-1} \frac{a(i)}{b(i)} \prod_{j=r_1+1}^i \frac{p(j)}{q(j)} = \xi_2 + \sigma'_2, \\ \tau_3 &= \prod_{j=r_1+1}^{2r_1} \frac{p(j)}{q(j)}, \quad \sigma_3 = \frac{a(2r_1)}{b(2r_1)} + \sum_{i=2r_1+1}^{3r_1-1} \frac{a(i)}{b(i)} \prod_{j=2r_1+1}^i \frac{p(j)}{q(j)} = \xi_3 + \sigma'_3, \quad \dots \end{aligned}$$

Величины σ'_t будем вычислять классическим методом двоичного деления для суммы (3), где $i_1 = (t-1)r_1 + 1$, $i_2 = t \cdot r_1 - 1$; для σ'_1 возьмем $i_1 = 0$, $i_2 = r_1 - 1$.

Введём следующие обозначения: $\omega = l(W) + 1$, $W = \max(A, B)$, где $A = \max_{i=0..r} (|a(i)|, |b(i)|)$, $B = \max_{j=0..r} (|p(j)|, |q(j)|)$, $l(u)$ — длина битового представления u . Оформим оценку вычислительной сложности расчёта σ_t и τ_t в виде двух лемм.

ЛЕММА 1. *Временная сложность алгоритма двоичного деления для вычисления σ_t ограничена сверху $O(M(r) \log(r))$; ёмкостная сложность ограничена сверху $O(r)$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную максимальную цепочку рекурсивных вызовов, полученных в результате вычислений в соответствии с формулами (4). Условимся, что нумерация в цепочке начинается с самого глубокого элемента цепочки: $i = 1, \dots, \varsigma$, где ς — длина цепочки, $\varsigma \leq \lceil \log(2r_1) \rceil$.

Пользуясь методом математической индукции по i , покажем, что длина представления числа T на глубине i при вычислении σ'_t удовлетворяет соотношению $l(T_i) < 2^{i+1}\omega + 2^i$. При этом заметим, что $l(P_i) \leq 2^i\omega$, $l(Q_i) \leq 2^i\omega$, $l(B_i) \leq 2^i\omega$, так как при увеличении i происходит удвоение длины числа. База индукции: $i = 1$, $l(T_1) \leq 2\omega < 2^2\omega + 2^1$; индукционный переход:

$$l(T_{i+1}) < 2^i\omega + 2^i\omega + 2^{i+1}\omega + 2^i + 1 < 2^{(i+1)+1}\omega + 2^{i+1}.$$

Отметим, что исходя из этой оценки T_ς имеет длину $O(r)$, так как

$$l(T_\varsigma) < C_1 2^\varsigma \omega \leq C_2 \frac{r}{\log(r)} \log(r) = C_2 r;$$

здесь учитывается тот факт, что все коэффициенты $a(i)$, $b(i)$, $p(j)$, $q(j)$ являются полиномами.

Оценим временную сложность вычисления σ'_t . При этом будем учитывать свойство функции сложности умножения: $2M(2^{-1}m) \leq M(m)$ (квазилинейные и полиномиальные функции удовлетворяют этому свойству). Так как в узле дерева вызовов на уровне i производится C_3 умножений $2^{\varsigma-i}$ чисел, длины которых не превосходят $2^{i+1}\omega + 2^i$, получаем следующую оценку количества операций, требуемых для вычисления σ'_t :

$$\text{Time}(\sigma'_t) \leq C_3 \sum_{i=1}^{\varsigma} 2^{\varsigma-i} M(2^{i+1}\omega + 2^i) < C_4 \sum_{i=1}^{\varsigma} 2^{\varsigma-i} M(2^{i+2}\omega) =$$

$$= C_4 \sum_{i=1}^{\varsigma} 2^{\varsigma-i} M(2^{\varsigma-(\varsigma-(i+2))} \omega) \leq C_5 \sum_{i=1}^{\varsigma} 2^{\varsigma-i} 2^{-\varsigma+(i+2)} M(2^{\varsigma} \omega) \leq \\ \leq C_6 \varsigma M(r) \leq C_7 \log(r) M(r)$$

(здесь используется неравенство для $2^{\varsigma} \omega$ из оценки для $l(T_{\varsigma})$). Заключительное деление дает $O(M(r))$ операций.

Теперь оценим ёмкостную сложность вычисления σ'_t . Учитывая, что в узле дерева вызовов вложенности i количество памяти, расходуемой на временные переменные, — это $C_8(2^{i+1}\omega + 2^i)$, получаем, что количество памяти во всех одновременно существующих рекурсивных вызовах оценивается следующим образом:

$$\text{Space}(\sigma'_t) \leq \sum_{i=1}^{\varsigma} C_8(2^{i+1}\omega + 2^i) \leq C_9(2^{\varsigma}\omega + 2^{\varsigma}) \leq C_{10}r = O(r). \quad \square$$

ЛЕММА 2. *Временная сложность алгоритма двоичного деления для вычисления числителя и знаменателя τ_t ограничена сверху $O(M(r) \log(r))$; ёмкостная сложность ограничена сверху $O(r)$.*

Доказательство. Оценки вычислительной сложности τ_t совпадают с таковыми для σ_t в силу того, что неравенства из доказательства леммы 1 также актуальны и для τ_t , если вычислять числитель и знаменатель σ_t с помощью алгоритма двоичного деления для произведений. $\square$

Рассчитывать приближённые значения $P(r)^*$ с точностью $2^{-(n+1)}$ по формуле (5) будем в соответствии со следующим итеративным процессом:

$$\begin{aligned} h_1(m) &= \sigma_{k_1}^*, \\ \widehat{h}_i(m) &= \sigma_{k_1-i+1}^* + \tau_{k_1-i+2}^* h_{i-1}, \quad i = 1, \dots, k_1, \\ h_i(m) &= \widehat{h}_i(m) + \varepsilon_i; \end{aligned} \quad (6)$$

при $i = k_1$ полагаем $P(r)^* = h_{k_1}(m)$. Здесь $m \geq r$ (величину m выберем позже); σ_i^*, τ_i^* — приближения σ_i, τ_i с точностью 2^{-m} . Величины $h_i(m)$ получаются отбрасыванием битов $q_{m+1}q_{m+2} \dots q_{m+j}$ чисел $\widehat{h}_i(m)$ после двоичной точки, начиная с $(m+1)$ -го, т. е.

$$|\varepsilon_i| = |h_i(m) - \widehat{h}_i(m)| = 0.0 \dots 0 q_{m+1} q_{m+2} \dots q_{m+j}, \quad (7)$$

а знак ε_i совпадает со знаком $\widehat{h}_i(m)$ (ясно, что $|\varepsilon_i| < 2^{-m}$).

Предположим, что выполняются следующие условия:

$$|b(i)| \geq 2 \text{ для всех } i, \quad |p(j)|/|q(j)| \leq 1 \text{ для всех } j. \quad (8)$$

Покажем, что тогда верны следующие две леммы.

ЛЕММА 3. *Для любого $i = 1, 2, \dots, k_1$ справедлива оценка*

$$|h_i(m)| < (i+1)r_1 W. \quad (9)$$

Доказательство. Применим математическую индукцию по j для $h_j(m)$. База индукции при j , равном 1: $|h_1(m)| \leq r_1 W + 2^{-m} < 2r_1 W$. Индукционный переход для $(j+1) \geq 2$:

$$\begin{aligned} |h_{j+1}(m)| &= |\sigma_{k_1-(j+1)+1}^* + \tau_{k_1-(j+1)+2}^* h_j + \varepsilon_{j+1}| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} r_1 W + (j+1) r_1 W + 2^{-m} < ((j+1)+1) r_1 W. \quad \square \end{aligned}$$

ЛЕММА 4. Погрешность вычисления $h_{k_1}(m)$ по схеме (6) оценивается как

$$\Delta(k_1, m) < 2^{-m} m k_1^2 W.$$

Доказательство. Обозначим $H_1 = \sigma_{k_1}$, $H_i = \sigma_{k_1-i+1} + \tau_{k_1-i+2} H_{i-1}$, $\eta(i, m) = |h_i(m) - H_i|$. Воспользуемся методом математической индукции для $\eta(j, m)$ по j . База индукции при j , равном 1:

$$\eta(1, m) = |h_1(m) - H_1| = |\sigma_{k_1}^* - \sigma_{k_1}| < 2^{-m}.$$

Индукционный переход для $(j+1) \geq 2$:

$$\begin{aligned} \eta(j+1, m) &= |\sigma_{k_1-(j+1)+1}^* + \tau_{k_1-(j+1)+2}^* h_j(m) + \varepsilon_{j+1} - \\ &\quad - \sigma_{k_1-(j+1)+1} - \tau_{k_1-(j+1)+2} H_j| < \\ &< |\tau_v^* h_j(m) - \tau_v h_j(m) + \tau_v h_j(m) - \tau_v H_j| + 2 \cdot 2^{-m} \leq \\ &\leq 2^{-m} h_j(m) + \eta(j, m) + 2 \cdot 2^{-m}. \end{aligned}$$

Так как из (9) $|h_j(m)| < (j+1) r_1 W$ и, по индукционному предположению, $\eta(j, m) < 2^{-m} m j^2 W$, можно записать

$$\begin{aligned} \eta(j+1, m) &< 2^{-m} (j+1) r_1 W + 2^{-m} m j^2 W + 2 \cdot 2^{-m} < \\ &< 2^{-m} (j+1) m W + 2^{-m} m (j+1)^2 W = 2^{-m} m (j+2)^2 W. \end{aligned}$$

Из $\Delta(k_1, m) = \eta(k_1, m)$ получаем искомое неравенство. $\square$

Из леммы 4 следует, что достаточно взять m такое, чтобы выполнялось

$$m \geq (n+1) + \lceil 2 \log(n+1) + 2 \log(r) + \log(W) \rceil, \quad (10)$$

для вычисления $P(r)^*$ с точностью $2^{-(n+1)}$.

Обозначим алгоритм расчёта гипергеометрического ряда, использующий схему (6), через *LinSpaceBinSplit* (linear space binary splitting).

АЛГОРИТМ LINSPEACEBINSPLIT. ПРИБЛИЖЁННОЕ ЗНАЧЕНИЕ РЯДА (1).

Вход: Запись точности вычисления 2^{-n} .

Выход: Приближённое значение ряда (1) с точностью 2^{-n} .

Описание:

- 1) вычисляем $r := \mu(n+1)$; подбираем k_1 так, чтобы $2^{k_1} \geq r$; вычисляем $r_1 := \lceil r/k_1 \rceil$; рассчитываем W ;
- 2) рассчитываем m по формуле (10);

- 3) $h := \sigma_{k_1}^*$ (с помощью обычного алгоритма двоичного деления с точностью 2^{-m});
- 4) выполняем цикл по i от 2 до k_1 :
 - а) рассчитываем $v_1 := \sigma_{k_1-i+1}^*$ с точностью 2^{-m} с помощью обычного алгоритма двоичного деления и $v_2 := \tau_{k_1-i+2}^*$ с точностью 2^{-m} ,
 - б) вычисляем выражение $\hat{h} := v_1 + v_2 h$,
 - в) h присваиваем величину $\hat{h}$, округлённую в соответствии с (7);
- 5) на выход записываем h .

Оценим временную вычислительную сложность данного алгоритма, учитывая, что r и m линейно зависят от n :

- $O(\log(n))$ вычислений σ_t дают $O(M(n) \log(n)^2)$;
- $O(\log(n))$ вычислений τ_t дают $O(M(n) \log(n)^2)$;
- $O(\log(n))$ умножений чисел длины $O(n)$ дают $O(M(n) \log(n))$;

итого получаем $O(M(n) \log(n)^2)$ битовых операций. Ёмкостная сложность алгоритма *LinSpaceBinSplit* — $O(n)$, так как во всех вычислениях в данном алгоритме фигурируют числа длины $O(n)$.

ТЕОРЕМА. Модифицированный алгоритм двоичного деления для расчёта гипергеометрических рядов *LinSpaceBinSplit* принадлежит классу сложности $Sch(FQLINTIME//LINSPEC)$.

Заключение. В табл. 1, 2 приведены формулы и ряды для расчёта некоторых часто используемых на практике констант математического анализа. Данные ряды линейно сходятся (см. [2–4]), и они удовлетворяют условиям (8); следовательно, для расчёта их приближённых значений можно использовать алгоритм *LinSpaceBinSplit*, то есть перечисленные константы принадлежат множеству конструктивных чисел $Sch(FQLINTIME//LINSPEC)_{CF}$. Алгоритм *LinSpaceBinSplit* можно также использовать для вычисления приближений многих других констант и приближений элементарных функций в рациональных точках.

Если для умножения использовать алгоритм Шёнхаге—Штрассена с временной сложностью $O(n \log(n) \log \log(n))$, то временная сложность алгоритма *LinSpaceBinSplit* будет $O(n \log(n)^3 \log \log(n))$; при использовании для умножения простого рекурсивного метода с временной сложностью $O(n^{\log(3)})$ временная сложность алгоритма *LinSpaceBinSplit* будет $O(n^{\log(3)} \log(n)^2)$.

Отметим, что ряд константы e сходится со скоростью $2^{-O(n \log(n))}$, поэтому временная сложность расчёта e в соответствии с алгоритмом *LinSpaceBinSplit* будет $O(M(n) \log(n))$, а ёмкостная — $O(n/\log(n))$.

Таблица 1

Формулы для расчёта констант		
Константы	Формулы	Ряды
e	$e = \exp(1)$	$\exp(1) = 2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i i!}$
π	$\pi = 16\alpha - 4\beta$	$\alpha = \arctg\left(\frac{1}{5}\right) = 2 \frac{1}{5} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2^{2i+1} 5^{2i}},$ $\beta = \arctg\left(\frac{1}{239}\right) = 2 \frac{1}{239} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{2^{2i+1} 239^{2i}}$
$\zeta(3)$		$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (205i^2 + 250i + 77) ((i+1)!)^5 (i!)^5}{2^{((2i+2)!)^5}}$

Таблица 2

Ряды для расчёта констант				
Константы	$a(i)$	$b(i)$	$p(j)$	$q(j)$
e	1	2	1	j
π	1	$2(2i+1)$	-1	5^2
	1	$2(2i+1)$	-1	239^2
$\zeta(3)$	$205i^2 + 250i + 77$	2	$p(0) = 1, p(j) = -j^5$	$32(2j+1)^5$

Из дальнейших исследований можно отметить построение алгоритмов расчёта гипергеометрических рядов с рациональными коэффициентами с временной сложностью $O(n \log(n)^k)$, $k \leq 3$, и при этом имеющих линейную ёмкостную вычислительную сложность.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Schönhage A., Grotefeld A. F. W., Vetter E.* Fast algorithms. A multitape Turing machine implementation. Mannheim, Germany: BI-Wissenschaftsverlag, 1994. 298 pp.
2. *Haible B., Papanikolaou T.* Fast multiprecision evaluation of series of rational numbers / In: *Algorithmic number theory: Proceedings of 3rd international symposium (Portland, OR, 1998)* / Lect. Notes Comput. Sci., 1423. Berlin: Springer, 1998. Pp. 338–350.
3. *Cheng H., Gergel B., Kim E., Zima E.* Space-efficient evaluation of hypergeometric series // *SIGSAM Bull.*, 2005. Vol. 39, no. 2. Pp. 41–52.
4. *Yakhontov S. V.* FLINSPACE constructive real numbers and functions (in Russian). Saarbrücken, Germany: Lambert Academic Publishing, 2010. 167 pp.
5. *Gourdon X., Sebah P.* Binary splitting method: <http://numbers.computation.free.fr/Constants/Algorithms/splitting.ps>.
6. *Ko K.-I.* Complexity theory of real functions. Progress in Theoretical Computer Science. Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 1991. 310 pp.

Поступила в редакцию 01/II/2011;
в окончательном варианте — 24/VIII/2011.

MSC: 03F60; 68Q17

CALCULATION OF HYPERGEOMETRIC SERIES WITH QUASI-LINEAR TIME AND LINEAR SPACE COMPLEXITY

S. V. Yakhontov

St. Petersburg State University, Mathematics and Mechanics Faculty,
28, Universitetskii prosp., Stariy Petergoff, St. Petersburg, 198504.

E-mails: sergey_home_mail@inbox.ru

A simple for practical implementation algorithm with the time complexity $O(M(n) \log(n)^2)$ and space complexity $O(n)$ for the evaluation of hypergeometric series with rational coefficients on the Schönhage machine is constructed (here $M(n)$ is the complexity of integer multiplication). It is shown that this algorithm is suitable in practical informatics for constructive analogues of often used constants of analysis.

Key words: constructive real numbers, hypergeometric series, quasi-linear time, linear space complexity.

Original article submitted 01/II/2011;
revision submitted 24/VIII/2011.

Sergey V. Yakhontov (Ph. D. (Phys. & Math.)), Associate Professor, Dept. of Informatics.