Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Смилянский, Решение центральной и боковой задач связи для одной системы первого ранга, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 40–45

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu93>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 11:28:43

РЕШЕНИЕ ЦЕНТРАЛЬНОЙ И БОКОВОЙ ЗАДАЧ СВЯЗИ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО РАНГА

Решены в замкнутой форме центральная и боковая задачи связи для системы из n уравнений:

$\frac{d\bar{w}}{dz} = \left(A_0 + \frac{A_1}{z} \right) \bar{w}$, где $\bar{w}$ – вектор-решение; $A_0 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$; A_1 – постоянные матрицы, все I_k – различны, все строки матрицы A_1 – пропорциональны ее первой строке. Система имеет регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную (первого ранга) $z = \infty$.

Рассматривается система из n уравнений:

$$\frac{d\bar{w}}{dz} = \left(A_0 + \frac{A_1}{z} \right) \bar{w}; \quad \bar{w} = \text{colon}\{w_1, \mathbf{K}, w_n\}; \quad A_0 = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \quad A_1 = (a_{vk})_1^n, \quad (1)$$

где A_0, A_1 – постоянные матрицы; все строки матрицы A_1 пропорциональны ее первой строке; $\lambda_v \neq \lambda_k$, если $v \neq k$.

Система (1) имеет регулярную особую точку $z = 0$ и иррегулярную (первого ранга) $z = \infty$. Фундаментальная матрица (ФМ) системы (1) может быть представлена в виде $\Psi'(z) = S(z)z^\Delta$, где матрица $S(z)$ голоморфна при $z = 0$, а Δ – постоянная матрица. Формальная фундаментальная матрица системы (1) имеет вид

$$\hat{\Phi}(z) = P(z)z^R e^{A_0 z}; \quad P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^{-n}; \quad \det P_0 \neq 0, \quad R = \text{diag}\{r_1, \dots, r_n\}, \quad r_k = \overline{a_{kk}} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2)$$

где P_v – постоянные матрицы. Введем линии ("линии Стокса") в комплексной плоскости z , определяемые условием

$$\text{Re } \lambda_{j_1} z = \text{Re } \lambda_{j_2} z = \mathbf{L} = \text{Re } \lambda_{j_k} z \quad (2 \leq k \leq n). \quad (3)$$

Возьмем какую-либо линию (3) в качестве исходной – l_1 и последовательно (против часовой стрелки) обозначим остальные через $l_2, l_3, \dots$. Введем "стандартные сектора" (С.С.).

$$l_2 - \pi + (v-1)\pi \leq \arg z < l_2 + (v-1)\pi; \quad v = 1, 2, 3. \quad (4)$$

В каждом С.С. любая пара выражений $\text{Re } \lambda_\alpha z, \text{Re } \lambda_\beta z$ ($\alpha \neq \beta$) становится равной только на одной линии Стокса.

Пусть матрица P_0 и нумерация характеристических корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (т. е. столбцов матрицы $\hat{\Phi}(z)$ – см. (2)) зафиксированы. Тогда [1, § 4], [2, 3] в любом С.С. существует единственная ФМ, для которой формальная ФМ (2) является асимптотическим разложением в этом секторе для больших $|z|$. Ниже такую ФМ будем называть "асимптотически базисной" в соответствующем секторе.

Пусть матрица P_0 и нумерация $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ зафиксированы. Пусть ФМ $\Phi_v(z)$ асимптотически базисна в v -м С.С. (4). Так как $\Psi'(z), \Phi_1(z), \Phi_2(z), \Phi_3(z)$ – ФМ системы (1), то существуют соотношения

$$\Phi_1(z) = \Phi_2(z) F_1; \quad \Phi_2(z) = \Phi_3(z) F_2; \quad \Psi'(z) = \Phi_v(z) T_v; \quad v = \overline{1, 3}, \quad (5)$$

где F_1, F_2, T_1, T_2, T_3 – постоянные неособые матрицы. Матрицы F_1, F_2 дают решение боковой задачи связи, а матрицы T_1, T_2, T_3 – центральной задачи связи. Очевидно, что $T_2 = F_1 T_1, T_3 = F_2 F_1 T_1$.

В настоящей работе для системы (1) найдены в замкнутой форме матрицы F_1, F_2, T_1 .

Для этого использовано представление векторов-решений $\bar{y}(z)$ системы (1) в виде контурных интегралов Лапласа [4, гл. 19, § 19.4]

$$\bar{y}(z) \equiv \bar{y}(z, \Sigma) = \int_{\Sigma} e^{z\xi} \bar{v}(\xi) d\xi, \quad (6)$$

где $\bar{v}(\xi)$ – подходящим образом выбранный вектор-решение следующей системы из n уравнений:

$$(A_0 - \xi E) \frac{d\bar{v}}{d\xi} = (A_1 + E) \bar{v}, \quad (7)$$

(E – единичная матрица), а Σ – контур, на котором выполняется условие на внеинтегральный член:

$$e^{\int \xi} (\xi E - A_0) \bar{v}(\xi)|_{\Sigma} = 0. \quad (8)$$

Для дальнейшего нам потребуется

Предложение 1. Жорданова форма J_{A_1} матрицы A_1 для системы (1) имеет вид

$$J_{A_1} = \text{diag}\{0, \mathbf{K}, 0, \rho\}, \quad \rho = a_{11} + \dots + a_{nn}. \quad (9)$$

Из предложения 1 следует, что заменой $\bar{w} = Q \bar{u}$ (столбцы матрицы Q – собственные векторы матрицы A_1) система (1) может быть приведена к виду

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \left(B_0 + \frac{B_1}{z} \right) \bar{u}, \quad B_0 = Q^{-1} A_0 Q = (b_{vk})_1^n; \quad B_1 = Q^{-1} A_1 Q = \text{diag}\{0, \dots, 0, \rho\}. \quad (10)$$

Для системы (10) задачи связи решены в [1, § 10], [5]. Однако в общем случае, когда элементы матриц A_0, A_1 – параметры, а n велико, фактический переход от (1) к (10) весьма затруднителен. Целесообразнее найти решение задач связи непосредственно для системы (1), что и сделано в настоящей работе.

Рассмотрим это детальнее. Пусть $\Phi_1^*(z), \Phi_2^*(z)$ – ФМ системы (10), асимптотически базисные в соответствующих С.С. (4). Соответствующая им формальная ФМ имеет вид

$$\hat{\Phi}^*(z) = \left(\sum_{v=0}^{\infty} P_v^* z^{-v} \right) z^R e^{A_0 z}.$$

Пусть известна постоянная неособая матрица F_1^* из соотношения $\Phi_1^*(z) = \Phi_2^*(z) F_1^*$. ФМ $\Phi_1(z) = Q \Phi_1^*(z), \Phi_2(z) = Q \Phi_2^*(z)$ системы (1) асимптотически базисны в тех же С.С., что и соответственно ФМ $\Phi_1^*(z), \Phi_2^*(z)$, так как любой элемент k -того столбца матрицы $\Phi_1(z)$, например, является линейной комбинацией из элементов k -того столбца матрицы $\Phi_1^*(z)$. Следовательно, справедливо соотношение $\Phi_1(z) = \Phi_2(z) F_1^*$. Но реально воспользоваться этим соотношением невозможно, если неизвестна матрица Q , так как соответствующая $\Phi_1(z), \Phi_2(z)$ формальная ФМ $\hat{\Phi}(z) = Q \hat{\Phi}^*(z)$.

В [1, § 10], [5] решения системы (10) также представлены в виде контурных интегралов Лапласа (6). Причем оказалось, что система, определяющая $\bar{v}(\xi) = \text{colon}\{\bar{v}_1(\xi), \mathbf{K}, \bar{v}_n(\xi)\}$, состоит из $(n-1)$ алгебраических линейных однородных уравнений и одного линейного дифференциального уравнения (ЛДУ). Это позволило свести нахождение $v_n(\xi)$ к решению одного скалярного ЛДУ первого порядка и затем найти $v_n(\xi)$. Прочие $v_l(\xi)$ ($l = \overline{1, n-1}$) выражены через $v_n(\xi)$ с помощью упомянутой подсистемы из $(n-1)$ алгебраических уравнений.

По-видимому, в настоящей работе впервые указана система вида (1), в зависимости от формы записи которой вектор $\bar{v}(\xi)$ определяется либо одним ЛДУ, либо системой из n ЛДУ, причем в обоих случаях найдено решение. Отметим также, что эти найденные решения различны.

Доказательство предложения 1. Характеристическое уравнение матрицы A_1 имеет вид

$$\det(\rho E - A_1) = \rho^n + \sum_{v=1}^n (-1)^v S_v \rho^{n-v}, \quad (11)$$

где S_v – сумма всех главных миноров порядка v матрицы A_1 [6, гл. 2, § 1, п. 7]. Так как все строки матрицы A_1 пропорциональны ее первой строке, то $S_v = 0$ для $v = \overline{2, n}$. Отсюда следует: $\rho_v = 0$ ($v = \overline{1, n-1}$), $\rho_n \equiv \rho = a_{11} + \dots + a_{nn}$. Собственный вектор $\bar{q} = \text{colon}\{q_1, \mathbf{K}, q_n\}$, принадлежащий собственному значению $\rho_v = 0$, удовлетворяет системе уравнений $A_1 \bar{q} = 0$. Так как все строки матрицы A_1 пропорциональны ее первой строке, то эта система имеет только одно независимое уравнение: $a_{11} q_1 + \dots + a_{1n} q_n = 0$. Оно имеет $(n-1)$ свободное неизвестное. Следовательно, фундаментальная система решений системы $A_1 \bar{q} = 0$ состоит из $(n-1)$ линейно независимых (собственных) векторов-решений. Ненулевому собственному значению $\rho_n = \rho$ принадлежит один линейно независимый собственный вектор. Следовательно, матрица A_1 имеет n линейно

независимых собственных векторов и, следовательно, жорданова форма J_{A_1} матрицы A_1 диагональна.

Перейдем к решению задач связи для системы (1). Пусть нумерация $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбрана из условия $\operatorname{Re} \lambda_j z < \operatorname{Re} \lambda_{j+1} z$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$. Тогда [1, § 5], [2], [3] F_1 – верхняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали, а F_2 – нижняя треугольная матрица с единичными элементами на главной диагонали. Именно такая нумерация $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ предполагается везде ниже. В [1, § 10], [7] дан "геометрический" способ такой нумерации λ_k .

Л е м м а. Пусть все строки матрицы A_1 пропорциональны ее первой строке. Тогда система (7) имеет вектор-решение $\bar{v}(\xi) = \operatorname{colon}\{v_1(\xi), \mathbf{K}, v_n(\xi)\}$ вида

$$v_l(\xi) = c_l (\xi - \lambda_l)^{-1} \prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-a_{lv}}, \quad c_l = \frac{a_{l1}}{a_{11}}, \quad l = \overline{1, n}. \quad (12)$$

Доказательство. Запишем систему (7) в виде

$$(\lambda_l - \xi) \frac{dv_l}{d\xi} = \sum_{v=1}^n a_{lv} v_v(\xi) + v_l(\xi), \quad l = \overline{1, n}. \quad (13)$$

Подставим (12) в (13). В результате получаем

$$c_l \prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-a_{lv}} \left(\frac{1}{(\xi - \lambda_l)} + \sum_{v=1}^n \frac{a_{vv}}{(\xi - \lambda_v)} \right) = \prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-a_{lv}} \left(\sum_{v=1}^n \frac{a_{lv} c_v}{(\xi - \lambda_v)} + \frac{c_l}{(\xi - \lambda_l)} \right), \quad \prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-a_{vv}}, \quad l = \overline{1, n} \quad (14)$$

Сокращая на $\prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-a_{lv}}$ и приводя подобные при $(1/(\xi - \lambda_v))$, имеем

$$\sum_{v=1}^n \frac{c_l a_{vv} - a_{lv} c_v}{(\xi - \lambda_v)} = 0, \quad l = \overline{1, n}. \quad (15)$$

Для того чтобы (15) выполнялось при любом ξ , требуем

$$c_l a_{vv} - a_{lv} c_v = 0; \quad l = \overline{1, n}; \quad v = \overline{1, n}; \quad v \neq l \quad (16)$$

(при $v = l$ уравнение (16) обращается в тождество). Покажем, что совокупность $c_1, c_2, \dots, c_n$ (из (12)) является решением системы (16). Так как все строки матрицы A_1 пропорциональны первой строке, то $c_l = \frac{a_{lk}}{a_{1k}} \quad (k = \overline{1, n})$. Подставляя это в (16), находим условие

$$\frac{a_{ln}}{a_{nn}} = \frac{a_{lk}}{a_{nk}} \quad (k = \overline{1, n}). \quad (17)$$

При фиксированных l и v это условие пропорциональности l -й и v -й строк матрицы A_1 . А это по предположению выполняется.

Ниже везде предполагается, что во всех решениях вида (6) компоненты $v_l(\xi)$ вектора $\bar{v}(\xi)$ совпадают с выражениями (12).

Для построения ФМ $\Phi_1(z)$ проведем в ξ -плоскости из точки λ_k полубесконечный луч f_k так, чтобы он не встречал на своем пути других особых точек λ_j ($j \neq k$) подынтегральной функции в (6). Пусть контур Σ_k представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль этого луча, обходящую точку $\xi = \lambda_k$ в положительном направлении (против часовой стрелки) и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча. Как известно [4, гл. 19, § 19.5], если на указанном луче выполнено условие $\operatorname{Re}(\xi - \lambda_k) z < 0$, то интеграл

$$\bar{y}_k(z) \equiv \bar{y}(z, \Sigma_k) = e^{I_k z} \int_{\Sigma_k} e^{z(x - I_k)} \bar{v}(x) dx \quad (k = \overline{1, n}) \quad (18)$$

является решением системы (1), причем решением, для которого k -тый столбец матрицы $\hat{\Phi}(z)$ является асимптотическим разложением.

Обозначим аргумент левой стороны луча f_k (если смотреть из точки λ_k), т. е. линии, вдоль которой контур интегрирования идет из бесконечности к точке λ_k , через ω . На левой стороне луча f_k задаем $\arg(\xi - \lambda_k) = \omega$ (везде ниже многозначные функции $(\xi - \lambda_k)^{-a_{kk}}$ рассматриваются на римановой поверхности, причем левая сторона луча f_k рассматривается как место склейки левого берега разреза нижнего листа $(\xi - \lambda_k)$ с правым берегом разреза верхнего листа). Условие на луче $\operatorname{Re}(\xi - \lambda_k) z < 0$ везде ниже будем записывать в виде

$$\frac{\pi}{2} < \arg z + \omega < \frac{3\pi}{2}. \quad (19)$$

Если ω задано, то (19) однозначно определяет область $\arg z$, где (18) асимптотически базисно. В определенных пределах ($\omega_{k, \min} < \omega < \omega_{k, \max}$) луч f_k можно поворачивать так, чтобы он не пересекал других особых точек λ_j . Если при этом на луче постоянно выполнено (19), то такие решения являются аналитическими продолжениями исходного. Если под (18) понимать именно такое решение, то область асимптотической базисности больше, чем $\pi \left(\frac{\pi}{2} - \omega_{k, \max} < \arg z < \frac{3\pi}{2} - \omega_{k, \min} \right)$. Пусть все лучи f_k ($k = \overline{1, n}$) параллельны и не пересекают других особых точек λ_j ($j \neq k$) (это предполагается везде ниже). Тогда совокупность векторов $\bar{y}_k(z)$ ($k = \overline{1, n}$) в (18) составляет ФМ, асимптотически базисную в общем секторе, большем, чем π , т. е. асимптотически базисную в стандартном секторе. Введенную выше ФМ $\Phi_1(z)$ будем считать составленной из векторов-столбцов $\bar{y}_k(z)$. Полагаем далее, что нумерация λ_k произведена "геометрическим" способом, указанным в [1, § 10], [7]. Кроме того, далее будем для определенности считать, что лучи f_k перпендикулярны оси проектирования (см. там же).

Предложение 2. В асимптотическом разложении (2) для построенной выше ФМ $\Phi_1(z)$ матрица $P_0 = \text{diag}\{[P_0]_{11}, [P_0]_{22}, \dots, [P_0]_{nn}\}$, где

$$[P_0]_{kk} = c_k e^{-i\pi r_k} \left(e^{-i2\pi r_k} - 1 \right) \Gamma(-r_k) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n (\lambda_k - \lambda_v)^{-r_v}, \quad (20)$$

$i = \sqrt{-1}$; $r_k = a_{kk}$; $c_k = a_{k1}/a_{11}$; $k = \overline{1, n}$; $\Gamma(-r_k)$ – гамма-функция.

Доказательство. k -тая компонента $y_{kk}(z)$, вектора $\bar{y}_k(z)$ из (18) имеет вид ($r_v = a_{vv}$):

$$y_{kk}(z) \equiv y_k(z, \Sigma_k) = e^{\lambda_k z} \int_{\Sigma_k} e^{z(\xi - \lambda_k)} c_k (\xi - \lambda_k)^{-1} \prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-r_v} d\xi. \quad (21)$$

Прилагая к (21) известный способ [4, гл. 19] получения (2) из решения (18), нужно представить функцию $\prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n (\xi - \lambda_v)^{-r_v}$ в виде многочлена по $(\xi - \lambda_k)$ с остаточным членом (по формуле

Тейлора), подставить это в (21) и затем почленно проинтегрировать. Первое слагаемое этой суммы интегралов, соответствующее свободному члену многочлена (т. е. нулевому члену разложения по $1/z$), имеет вид

$$e^{\lambda_k z} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n (\lambda_k - \lambda_v)^{-r_v} c_k J(z); \quad J(z) = \int_{\Sigma_k} e^{z(\xi - \lambda_k)} (\xi - \lambda_k)^{-r_k - 1} d\xi. \quad (22)$$

Замена $(\xi - \lambda_k) = \tau$ приводит интеграл $J(z)$ к виду

$$J(z) = \int_{\Sigma'_k} e^{z\tau} \tau^{-r_k - 1} d\tau, \quad (23)$$

где Σ'_k – соответствующая петля вокруг точки $\tau = 0$. Далее с использованием формулы (5) из [8, гл. 1, § 1.6], в которой предварительно сделана замена $t = e^{-i\pi} \tau$, находим

$$e^{\lambda_k z} \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n (\lambda_k - \lambda_v)^{-r_v} c_k J(z) = z^{r_k} e^{\lambda_k z} c_k e^{-i\pi r_k} \left(e^{-i2\pi r_k} - 1 \right) \Gamma(-r_k) \prod_{\substack{v=1 \\ v \neq k}}^n (\lambda_k - \lambda_v)^{-r_v}. \quad (24)$$

Отсюда следует (20). Проводя аналогичную процедуру с l -й компонентой $y_{lk}(z)$ вектора $\bar{y}_k(z)$ ($l \neq k$), находим, что первое слагаемое суммы интегралов, соответствующее свободному члену многочлена, имеет вид $z^{r_k - 1} e^{\lambda_k z} G$ (G – константа), т. е. относится к первому члену разложения по $1/z$. Следовательно, матрица P_0 диагональна.

Замечание. Так как нумерация λ_k проведена "геометрическим" способом, то [1, § 10], [7]

$$(\lambda_k - \lambda_j) = (\lambda_j - \lambda_k) e^{i\pi}, \quad \text{если } j < k. \quad (25)$$

Предложение 3. Пусть $\rho \neq$ целому положительному числу (см. предложение 1). Тогда система (1) имеет $(n - 1)$ линейно независимых решений, голоморфных в точке $z = 0$ и одно решение вида $z^\rho \bar{s}(z)$, где вектор-функция $\bar{s}(z)$ голоморфна в точке $z = 0$.

Доказательство. Согласно [9, гл. IV, § 4] в рассматриваемом случае ФМ системы (1) может быть представлена в виде $\Psi'(z) = S(z)z^{J_{A_1}}$, где матрица $S(z)$ голоморфна при $z = 0$. Из этого непосредственно следует справедливость предложения 3. Предложение 3 доказано.

Пусть O_k – точка посередине отрезка, соединяющего λ_k и λ_{k+1} (в ξ -плоскости). Обозначим через m_k замкнутый контур, выходящий из точки O_k и обходящий точку λ_k против часовой стрелки. Введем $(n-1)$ контуров интегрирования $\Omega_k = m_{k+1}m_k m_{k+1}^{-1}m_k^{-1}$ ($k = \overline{1, n-1}$), где m_k^{-1} означает обход по контуру m_k в отрицательном направлении – по часовой стрелке. Для контуров Ω_k ($k = \overline{1, n-1}$) контура $m_k, m_{k+1}, m_k^{-1}, m_{k+1}^{-1}$ выходят (начинаются) из точки O_k . Введем также контур интегрирования Ω_n . Он представляет собой петлю, идущую из бесконечности вдоль луча (направленного также как и лучи контуров Σ_k), обходящую против часовой стрелки точку $\xi = 0$ по окружности (например), такой, что все точки λ_k ($k = \overline{1, n}$) лежат внутри ее, и возвращающуюся к бесконечности вдоль этого же луча. Начальные аргументы по-прежнему заданы в виде $\arg(\xi - \lambda_k) = \omega$ ($k = \overline{1, n}$) на левой стороне луча контура Σ_k . Для двойной петли Ω_k ($k = \overline{1, n-1}$) их можно эквивалентно задать в точке O_k : $\arg(\xi - \lambda_j)_{O_k} = \omega + \theta_j$, где θ_j – угол, по модулю меньший π , на который нужно повернуть (против или по часовой стрелке) расположенный на левом берегу луча контура Σ_j вектор $(\xi - \lambda_j)$, чтобы совместить его с точкой O_k . Для Ω_n можно эквивалентно считать, что $\arg(\xi - \lambda_j) = \omega$ ($j = \overline{1, n}$) на левой стороне луча контура Ω_n в бесконечности. На контурах Ω_k ($k = \overline{1, n}$) выполняется условие (8).

Введем следующие n решений системы (1):

$$\bar{x}_k(z) \equiv \bar{x}(z, \Omega_k) = \int_{\Omega_k} e^{z\xi} \bar{v}(\xi) d\xi, \quad k = \overline{1, n}. \quad (26)$$

Предложение 4. В окрестности $z = 0$ решения $\bar{x}_k(z)$ имеют вид $(\bar{\alpha}_{vk}, \bar{\alpha}_{vn})$ – постоянные векторы):

$$\bar{x}_k(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\alpha}_{vk} z^v, \quad k = \overline{1, n-1}, \quad \alpha_{0k} = \text{colon}\{\alpha_{1k}, \mathbf{K}, \alpha_{nk}\}; \quad (27)$$

$$\alpha_{lk} = c_l \int_{\Omega_k} (\xi - \lambda_l)^{-1} \prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-r_v} d\xi, \quad r_v = a_{vv}, \quad l = \overline{1, n};$$

$$\bar{x}_n(z) = z^p \sum_{v=0}^{\infty} \bar{\alpha}_{vn} z^v, \quad \bar{\alpha}_{0n} = \text{colon}\{\alpha_{1n}, \mathbf{K}, \alpha_{nn}\}, \alpha_{ln} = c_l e^{-i\pi\rho} \left(e^{-i2\pi\rho} - 1 \right) \Gamma(-\rho), \quad l = \overline{1, n}, \quad (28)$$

где $\Gamma(-\rho)$ – гамма-функция.

Доказательство. Разлагая $e^{z\xi}$ в ряд по $(z\xi)$ в (26) для $k = \overline{1, n-1}$ и почленно интегрируя, получаем (27). Для $\bar{x}_n(z)$ произведем в интеграле (26) замену $z\xi = \tau$. Для компоненты $x_{ln}(z)$ вектора $\bar{x}_n(z)$ это приводит к выражению

$$x_{ln}(z) = z^p \int_{\Omega'_n} e^{\tau} c_l (\tau - z\lambda_l)^{-1} \prod_{v=1}^n (\tau - z\lambda_v)^{-r_v} d\tau, \quad l = \overline{1, n}, \quad (29)$$

где контур интегрирования Ω'_n в τ -плоскости подобен контуру интегрирования Ω_n в ξ -плоскости. Полагая, что выполняется $|\tau| > |z\lambda_n|$ ($v = \overline{1, n}$), разлагаем каждый сомножитель $(\tau - z\lambda_v)^{-r_v}$ в ряд по $z\lambda_v/\tau$ и результат почленно интегрируем. Это дает (28) (с использованием формулы (5) в [8, гл. 1, § 1.6], в которой предварительно сделана замена $t = e^{-i\pi} \tau$). Предложение 4 доказано.

Введенную выше ФМ $\Psi'(z)$ будем считать составленной из векторов-столбцов $\bar{x}_k(z)$.

Т е о р е м а. Для построенных выше ФМ $\Phi_1(z), \Psi'(z)$ элементы $[F_1]_{km}$ матрицы F_1 , элементы $[F_2]_{mk}$ матрицы F_2 и отличные от нуля элементы $[T_1]_{vk}$ матрицы T_1 имеют вид (нумерация λ_k выбрана из условия $\text{Re} \lambda_k z < \text{Re} \lambda_{k+1} z$ в секторе $l_1 < \arg z < l_2$):

$$[F_1]_{km} = \gamma_m, \quad [F_2]_{mk} = \gamma_k e^{i2\pi \sum_{v=k}^{m-1} r_v}, \quad i = \sqrt{-1}, \quad m = k+1, \quad k+2, \mathbf{K}, n; \quad k = \overline{1, n}; \quad \gamma_v = \left(1 - e^{-i2\pi r_v} \right); \quad (30)$$

$$[T_1]_{kk} = -\gamma_{k+1}, \quad [T_1]_{k+1,k} = \gamma_k, \quad k = \overline{1, n-1}; \quad (31)$$

$$[T_1]_{kn} = e^{-i2\pi \sum_{v=k+1}^n r_v}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (32)$$

где формально $\sum_{v=n+1}^n r_v \equiv 0$.

Доказательство. В работе [7] (см. также [1, § 10]) для уравнения

$$z \frac{d^n y}{dz^n} + \sum_{v=0}^{n-1} (za_{v0} + a_{v1}) \frac{d^v y}{dz^v} = 0 \quad (33)$$

a_{v0}, a_{v1} – постоянные, построены однострочечная ФМ $\Phi_1(z)$ из решений [7, формула (5)]

$$y_k(z) = e^{I_k z} \int_{\Sigma_k} e^{z(x-I_k)} \prod_{n=1}^n (x - I_n)^{-r_n-1} dx, \quad k = \overline{1, n} \quad (34)$$

и однострочечная ФМ $X(z)$ из решений [7, формула (9)]

$$x_k(z) = \int_{\Omega_k} e^{z\xi} \prod_{v=1}^n (\xi - \lambda_v)^{-r_v-1} d\xi, \quad k = \overline{1, n}, \quad (35)$$

где константы r_v определены для уравнения (33) (в [1, § 10], в формуле (3) для $y_k(z)$ – опечатка). Там же найдены матрицы F_1, F_2 для однострочечной ФМ $\Phi_1(z)$ (см. (24) в [7]) и матрица связи T_0 в соотношении $X(z) = \Phi_1(z)T_0$ (см. (14) в [7]).

Дословно повторяя для l -й строки ФМ $\Phi_1(z), \Psi'(z)$ из настоящей работы рассуждения, проведенные в [7], [1, § 10], можно показать, что выражения (30) настоящей работы совпадают с (24) в [7], а выражения (31), (32) – с (14) в [7].

Содержание [7] составляет часть § 10 в [1].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Смилянский В.Р. Центральная и боковая задачи связи для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой. Новосибирск: НГУ, 1995. 317 с.
2. Смилянский В.Р. Некоторые свойства множителей Стокса I // Исследования по теории операторов и их приложения: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1979. С. 97 - 107.
3. Смилянский В.Р. Некоторые свойства множителей Стокса II // Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1981. С. 107 - 117.
4. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: Науч.-техн. изд-во Украины, 1939. 719с.
5. Смилянский В.Р. Центральная и боковая задачи связи для сопряженных систем и уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. Т. 56. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1995. С. 33 – 67.
6. Мишина А.П., Проскураков И.В. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра). М.: Наука, 1965. 300 с.
7. Смилянский В.Р. Множители Стокса и коэффициенты связи для некоторых уравнений // Функциональный анализ и прикл. математика: Сб. науч. тр. Киев: Наук. думка, 1982. С. 157 –173.
8. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М.: Наука, 1965. 296 с.
9. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.