Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кудинов, В. В. Дикоп, Р. Ж. Габдушев, С. А. Назаренко, Определение собственных чисел краевой задачи Штурма–Лиувилля, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 46–48

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu94>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 10:21:44

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА - ЛИУВИЛЛЯ

Приводится методика определения собственных чисел краевой задачи Штурма – Лиувилля, основанная на совместном использовании точных (метод разделения переменных) и приближённых аналитических (взвешенных невязок) методов. Показана высокая точность получаемых решений и хорошая сходимость к точному решению при увеличении числа приближений.

В методе разделения переменных искомое решение принимается в таком виде, что оно с самого начала точно удовлетворяет дифференциальному уравнению краевой задачи. Собственные числа и неизвестные коэффициенты решения находятся из точного выполнения граничных и начальных условий. Однако не для всех дифференциальных уравнений можно найти функции, точно удовлетворяющие им. Такие функции известны лишь для простейших линейных дифференциальных уравнений применительно к телам классической формы (пластина, цилиндр, шар) при классических линейных граничных условиях. При усложнении любого из этих факторов трудоемкость применения метода Фурье существенно возрастают вплоть до практической невозможности его использования.

В настоящей работе рассматривается метод, основанный на совместном использовании метода Фурье и методов взвешенных невязок (ортогонального метода Бубнова – Галеркина). Ввиду того, что удовлетворение уравнению в данном случае осуществляется путём составления его невязки и требования ортогональности невязки к собственным функциям, дифференциальное уравнение может быть сколь угодно сложным. Не накладывается также ограничений на вид начальных и граничных условий.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу теплопроводности для бесконечно протяжённой пластины при граничных условиях первого рода:

$$\frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial h^2} \quad (Fo > 0; 0 < h < 1); \quad (1)$$

$$\Theta(h, 0) = 1; \quad (2)$$

$$\partial \Theta(0, Fo) / \partial h = 0; \quad (3)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0, \quad (4)$$

где $\Theta(h, Fo) = (T - T_{cm}) / (T_0 - T_{cm})$ - относительная избыточная температура; T_{cm} - температура пластины при $h = 1$; $h = x/d$ - безразмерная координата; d - толщина пластины; T_0 - начальная температура; $Fo = at/d$ - число Фурье; a - коэффициент температуропроводности; t - время.

Следуя методу Фурье, решение задачи (1) – (4) принимается в виде

$$\Theta(h, Fo) = j(Fo) \Psi(h). \quad (5)$$

Подставляя (5) в (1), получим

$$dj(Fo)/dFo + m^2 j(Fo) = 0; \quad (6)$$

$$d\Psi(h)/dh^2 + m^2 \Psi(h) = 0, \quad (7)$$

где m^2 - некоторая постоянная.

Решение уравнения (6), как известно, имеет вид

$$j(Fo) = A \exp(-m^2 Fo), \quad (8)$$

где A - неизвестный коэффициент.

Уравнение Штурма – Лиувилля (7) представим следующим образом:

$$\Psi''(h) + I \Psi(h) = 0, \quad (9)$$

где $I = m^2$.

Граничные условия для уравнения (9) согласно (3), (4) будут иметь вид

$$\Psi'(0) = 0; \quad (10)$$

$$\Psi(1) = 0. \quad (11)$$

Решение задачи в первом приближении разыскивается в виде следующего ряда:

$$\Psi(h) = C_0 + C_1 h + C_2 h^2 + C_3 h^3 + C_4 h^4 + \dots = \sum_{i=0}^n C_i h^i, \quad (12)$$

где C_i , ($i = \overline{0, n}$) неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий (10), (11). В настоящей работе решается задача определения пяти собственных чисел. Так как неизвестных пять, а граничных условий два, то следует добавить дополнительные граничные условия, которые найдём из уравнения (9) путём выполнения самого этого уравнения, а также производных от него в точках $h = 0$ и $h = 1$. Эти дополнительные граничные условия будут иметь вид

$$\Psi(0) = \text{const} = 1; \quad (13)$$

$$\Psi''(1) = 0; \quad (14)$$

$$\Psi'''(0) = 0. \quad (15)$$

Граничное условие (13) следует из условия (10).

Подставляя (12) в (10), (11), (13) – (15), получим

$$C_0 = 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -1,2; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = 0,2.$$

Соотношение (12) принимает вид

$$\Psi(h) = 1 - 1,2h^2 + 0,2h^4. \quad (16)$$

Для определения первого собственного числа найдём интеграл взвешенной невязки уравнения (9)

$$\int_0^1 [\Psi''(h) + I\Psi(h)] dh = 0. \quad (17)$$

Подставляя (16) в (17), получим алгебраическое линейное уравнение относительно I , решение которого дает $I_1 = 2,6$.

Точное значение первого собственного числа $I_1 = 2,46740110027$ [1].

Собственная функция находится из (12).

Для получения первых двух собственных функций используются следующие основные и дополнительные граничные условия:

$$\Psi(0) = 1; \quad \Psi'(0) = 0; \quad \Psi''(0) = -I; \quad \Psi'''(0) = 0; \quad \Psi^{IV}(0) = I^2; \quad \Psi(1) = 0; \quad \Psi''(1) = 0. \quad (18)$$

Подставляя (12) в (18) при $n = 8$, получим

$$C_0 = 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -0,5I; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = I^2/24;$$

$$C_5 = \frac{39}{8}I^2 + 1,4I - 3; \quad C_6 = 2 - 0,9I - \frac{59}{12}I^2.$$

После подстановки коэффициентов C_i в соотношение (12) составляется невязка уравнения (9) и требуется ортогональность невязки к функции (12). Отсюда для определения собственных чисел получается полином шестой степени. Первые два корня этого полинома имеют вид

$$I_1 = 2,46740110; \quad I_2 = 22,26983.$$

Ввиду того, что уравнение Штурма – Лиувилля удовлетворяется лишь при некоторых дискретных значениях I (собственных значениях), то остальные корни полинома отбрасываются, как не удовлетворяющие этому уравнению (в этом можно убедиться непосредственной подстановкой в уравнение 9).

Таким образом, во втором приближении первое собственное число до восьмого знака после запятой совпало с точным его значением. Второе собственное число совпадает с его точным значением до второго знака после запятой (точное значение $I_2 = 22,20660990$).

Для получения трёх собственных чисел в дополнение к условиям (18) воспользуемся граничными условиями вида

$$\Psi^V(0) = -I^3; \quad \Psi^{VI}(0) = 0; \quad \Psi^{VII}(0) = I^4; \quad \Psi^{IX}(0) = 0; \quad \Psi^X(0) = -I^5. \quad (19)$$

При выполнении граничных условий (18), (19) для первых трёх собственных функций получаются следующие значения:

$$I_1 = 2,4674011001; \quad I_2 = 22,2066135; \quad I_3 = 62,055342.$$

В данном случае первое и второе собственные числа совпадают с точными их значениями соответственно до 10 – го и 4 – го знаков после запятой. Точное значение третьего собственного числа $I_3 = 61,68502750$.

Для получения пяти собственных чисел добавляем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
\Psi^{XI}(0) &= 0; \Psi^{XII}(0) = I^6; \Psi^{XIII}(0) = 0; \Psi^{XIV}(0) = -I^7; \\
\Psi^{XV}(0) &= 0; \Psi^{XVI}(0) = I^8; \Psi^{XVII}(0) = 0; \Psi^{XVIII}(0) = -I^9; \\
\Psi^{XIX}(0) &= 0; \Psi^{XX}(0) = I^{10}.
\end{aligned}
\quad (20)$$

В этом случае имеем

$$I_1 = 2,4674011002; I_2 = 22,206610; I_3 = 61,6850235; I_4 = 120,90249; I_5 = 201,0584.$$

Точные значения четвёртого и пятого собственных чисел

$$I_4 = 120,90265; I_5 = 199,8595.$$

Подставляя (8), (12) в (5), для каждого собственного числа будем иметь частные решения вида

$$\Theta_i(h, Fo) = A_i \Psi_i(h, I_i) \exp(-I_i Fo), \quad (i = \overline{0,4}).$$

Каждое частное решение точно удовлетворяет граничным условиям (18), (19), (20) и приближённо (в пятом приближении) удовлетворяет уравнению (1) на отрезке $0 \leq h \leq 1$, включая точки $h = 0$ и $h = 1$, ввиду выполнения условий $\Psi''(0) = -I$ и $\Psi''(1) = 0$ (см. условия (18)). Однако ни одно из этих частных решений, в том числе и их сумма

$$\Theta(h, Fo) = \sum_{i=0}^4 A_i \Psi_i(h, I_i) \exp(-I_i Fo), \quad (21)$$

не удовлетворяют начальному условию.

Для выполнения начального условия составим его невязку и потребуем ортогональность невязки к каждой собственной функции, т. е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{i=0}^4 A_i \Psi_i(h, I_i) - 1 \right] \Psi_j(h, I) dh = 0 \quad (j = \overline{0,4}) \quad (22)$$

Графики изменения относительной избыточной температуры от числа Fo :

— — точное решение [3]; O — расчёт по формуле (21)

Определяя интегралы в (22), для нахождения коэффициентов A_K ($K = \overline{1,5}$) получим систему из пяти алгебраических линейных уравнений. Её решение даёт $A_1 = 1,274366$; $A_2 = -0,427128$; $A_3 = 0,257304$; $A_4 = -0,182685$; $A_5 = 0,150535$.

Приведённые здесь коэффициенты A_i ($i = \overline{0,4}$) найдены из уточнённых значений собственных чисел.

Результаты расчётов безразмерных температур по формуле (21) в сравнении с точными их значениями [3] представлены графически на рисунке.

Анализ результатов расчётов позволяет заключить, что в пятом приближении значения

безразмерных температур, полученные по формуле (21), удовлетворительно согласуются с точными их значениями в диапазоне Фурье $0,005 \leq Fo \leq \infty$.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Карташов Э.М. и др. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997. 426 с.
2. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Габдушев Р.Ж., Стефанюк С.А. Об одном методе определения собственных значений краевой задачи Штурма – Лиувилля // Вест. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2001. Вып. 12. С. 51-56.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.