Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Кудинов, В. В. Дикоп, Р. Ж. Габдушев, Д. В. Левин, С. А. Назаренко, Определение собственных чисел в задаче теплопроводности для бесконечного цилиндра, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 49–52

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu95>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:47:57

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ В ЗАДАЧЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОГО ЦИЛИНДРА

Рассматривается методика определения собственных значений применительно к решению уравнения нестационарной теплопроводности для бесконечного цилиндра. Главной особенностью является введение дополнительных граничных условий, получаемых из основного дифференциального уравнения. Отмечается высокая точность определения собственных чисел. Так, уже в третьем приближении погрешность определения второго и третьего собственных чисел соответственно составляет 0,217 и 0,098%, а первое собственное число практически совпадает с точным его значением.

При использовании метода разделения переменных возникает необходимость нахождения функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям краевой задачи, полученным после разделения переменных в исходном уравнении. Такие функции известны лишь для классических дифференциальных уравнений (Штурма – Лиувилля, Бесселя, Лежандра и др.). Собственные числа находятся из выполнения граничных условий краевой задачи путем решения трансцендентных уравнений. При сложных дифференциальных уравнениях, когда неизвестны функции, удовлетворяющие им, метод разделения переменных неприменим.

В настоящей работе рассматривается методика определения собственных чисел, основанная на совместном использовании метода разделения переменных и метода взвешенных невязок. В качестве конкретного примера рассмотрим задачу теплопроводности для неограниченного цилиндра при граничных условиях 1-го рода:

$$\frac{\partial \Theta(r, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(r, Fo)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta(r, Fo)}{\partial r} \quad (Fo > 0; 0 < r < 1); \quad (1)$$

$$\Theta(r, 0) = 1; \quad (2)$$

$$\Theta(1, Fo) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \Theta(0, Fo)}{\partial r} = 0, \quad (4)$$

где $\Theta = (T - T_{cm}) / (T_0 - T_{cm})$ - относительная избыточная температура; $Fo = at / R^2$ - число Фурье; $r = r / R$ - безразмерная координата; R - радиус цилиндра; T_0 - начальная температура; T_{cm} - температура стенки; a - коэффициент температуропроводности; t - время; r - координата.

Введем дополнительные граничные условия [1,4]. Для этого продифференцируем (3) по Fo :

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = 0. \quad (5)$$

Учитывая (1), получим

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial r^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

Из (6) получаем одно из дополнительных граничных условий вида

$$\frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial r^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial r} = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя (4) по Fo , находим

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial Fo \partial r} = 0.$$

Привлекая уравнение (1), получим

$$\frac{\partial^2 \Theta(r, Fo)}{\partial r \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(r, Fo)}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Theta(r, Fo)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Theta(r, Fo)}{\partial r}. \quad (8)$$

В точке $r = 0$ возникают неопределенности, которые раскроем по правилу Лопиталя:

$$\frac{\partial^2 \Theta(0, Fo)}{\partial r \partial Fo} = \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial r^3} + \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial r^3} - \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial r^3} = \frac{3}{2} \frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial r^3} = 0.$$

Отсюда имеем еще одно дополнительное граничное условие вида

$$\frac{\partial^3 \Theta(0, Fo)}{\partial r^3} = 0. \quad (9)$$

Дифференцируя (7) по Fo , получим

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial r^2 \partial Fo} + \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial r \partial Fo} = 0.$$

Привлекая уравнение (1), найдем

$$\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial r^2 \partial Fo} = -\frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial r^2}. \quad (10)$$

Дифференцируем (8) по r , имеем

$$\frac{\partial^3 \Theta(r, Fo)}{\partial r^2 \partial Fo} = \frac{\partial^4 \Theta(r, Fo)}{\partial r^4} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Theta(r, Fo)}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(r, Fo)}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta(r, Fo)}{\partial r^2} + \frac{2}{r^3} \frac{\partial \Theta(r, Fo)}{\partial r}. \quad (11)$$

Сравнивая (10) и (11) в точке $r = 1$, получим следующее дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^4 \Theta(1, Fo)}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 \Theta(1, Fo)}{\partial r^3} - \frac{\partial^2 \Theta(1, Fo)}{\partial r^2} + \frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial r} = 0. \quad (12)$$

Дифференцируя (4) дважды по r и один раз по Fo , получим

$$\frac{\partial^4 \Theta(0, Fo)}{\partial r^3 \partial Fo} = 0.$$

Привлекая уравнение (1) и раскрывая полученные неопределенности в точке $r = 0$ по правилу Лопиталя, получим еще одно дополнительное граничное условие

$$\frac{\partial^5 \Theta(0, Fo)}{\partial r^5} = 0. \quad (13)$$

Следуя методу разделения переменных, решение уравнения (1) представим в виде

$$\Theta(r, Fo) = \sum_{n=1}^3 A_n X_n(I_n, r) \exp(-I_n, Fo), \quad (14)$$

где A_n - неизвестные коэффициенты, определяемые из начального условия (2); $X_n(I_n, r)$ - функции, удовлетворяющие уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 X(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX(r)}{dr} + IX(r) = 0. \quad (15)$$

Граничные условия для уравнения (15) с учетом (2), (3), (4), (7), (9), (12), (13) принимают вид

$$X(0) = 1; \quad (16)$$

$$X(1) = 0; \quad (17)$$

$$X'(0) = 0; \quad (18)$$

$$X''(0) = -I/2; \quad (19)$$

$$X'''(0) = 0; \quad (20)$$

$$X^V(0) = 0; \quad (21)$$

$$X''(1) + X'(1) = 0; \quad (22)$$

$$X^{IV}(1) + 2X'''(1) - X''(1) + X'(1) = 0; \quad (23)$$

$$X^{IV}(0) = 3I/8. \quad (24)$$

Дополнительные граничные условия (19) – (24) означают выполнение уравнения (15) и значений производных различных степеней от этого уравнения в точках $r = 0$ и $r = 1$.

Решение задачи (15), (16) – (24) разыскивается в виде следующего степенного ряда:

$$X(I, r) = \sum_{i=0}^8 C_i r^i, \quad (25)$$

где C_i - коэффициенты, определяемые из граничных условий (16) – (24).

Подставляя (25) в (16) – (24), после решения получаемых алгебраических линейных уравнений будем иметь:

$$\begin{aligned} C_0 &= 1; \quad C_1 = 0; \quad C_2 = -I/4; \quad C_3 = 0; \quad C_4 = I^2/64; \quad C_5 = 0; \\ C_6 &= -(4548I^2 - 120720I + 551936)/68672; \\ C_7 &= (79I^2 - 2448I + 11520)/1073; \\ C_8 &= -(1581I^2 - 53120I + 254016)/68672. \end{aligned}$$

Составляя невязку уравнения (15) и интегрируя ее в пределах от $r = 0$ до $r = 1$, получим

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 \left(\sum_{i=0}^8 C_i r^i \right)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d \left(\sum_{i=0}^8 C_i r^i \right)}{dr} + I \sum_{i=0}^8 C_i r^i \right] dr = 0.$$

После определения интегралов для нахождения собственных чисел будем иметь следующий алгебраический полином:

$$1261I^3 - 139500I^2 + 3609216I - 16450560 = 0.$$

Его корни

$$I_1 = 5,78295; \quad I_2 = 30,2371; \quad I_3 = 74,6065. \quad (26)$$

Приведем точные значения собственных чисел [3]:

$$I_1 = 5,78306; \quad I_2 = 30,4733; \quad I_3 = 74,8865.$$

Погрешность определения первого, второго и третьего собственных чисел соответственно составляет 0,0019, 0,775, 0,374%.

В работе [4] в случае использования трех приближений для собственных чисел получены следующие значения:

$$I_1 = 5,7832; \quad I_2 = 30,7120; \quad I_3 = 113,50.$$

Для каждого собственного числа собственные функции находятся из (25).

Для уточнения первых трех собственных чисел составим невязку уравнения (15) и потребуем ортогональность невязки к координатной функции (25), т.е.

$$\int_0^1 \left[\frac{d^2 X(I, r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX(I, r)}{dr} + IX(I, r) \right] X(I, r) dr = 0.$$

Отсюда для нахождения собственных чисел получим следующий алгебраический полином:

$$\begin{aligned} &1,6117023852 \cdot 10^{-7} \cdot I^5 - 3,2512011896 \cdot 10^{-5} \cdot I^4 + 2,3028199135 \cdot 10^{-3} \cdot I^3 - \\ &- 6,8141742017 \cdot 10^{-2} \cdot I^2 + 0,81160486104 \cdot I - 2,8247632752 = 0. \end{aligned}$$

Так как полином пятой степени, то он имеет пять корней. Из них лишь три корня –

$$I_1 = 5,78332; \quad I_2 = 30,53934; \quad I_3 = 74,81268 \quad (27)$$

удовлетворяют уравнению (15). Оставшиеся два корня следует отбросить, так как они не удовлетворяют уравнению (15). Этот результат вполне объясним ввиду того, что уравнение (15) удовлетворяется лишь при некоторых дискретных значениях I (собственных значениях).

Сравнивая собственные числа (26) с собственными числами (27), можно заметить, что требование ортогональности невязки уравнения (15) к координатной функции (25) приводит к существенному повышению точности их определения.

Таким образом, соотношение (14) точно удовлетворяет граничным условиям (3), (4), уравнению (1) и производным различных степеней от этого уравнения в точках $r = 0$ и $r = 1$. Как показали проведенные в настоящей работе исследования, для одного, двух и трех приближений

с увеличением числа выполняемых граничных условий типа (19) – (24) увеличивается точность удовлетворения уравнения (1) на отрезке $0 < r < 1$.

Неизвестные коэффициенты A_n в соотношении (14) находятся из начального условия (2). Для этого составляется его невязка и требуется ортогональность невязки к каждой собственной функции, т.е.

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^3 A_n X_n(I_n, r) - 1 \right] X_i(I_i, r) dr = 0, \quad (i = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Графики изменения безразмерной температуры в неограниченном цилиндре:

— — точное решение [2]; О - расчёт по формуле (14)

совпадают с точными их значениями. Для получения решения при меньших значениях числа Фурье необходимо увеличивать число членов решения (14).

Определяя интегралы в (26), для нахождения коэффициентов A_n получим систему из трех алгебраических линейных уравнений с тремя неизвестными. Из решения этой системы находим $A_1 = 1,563927$; $A_2 = -1,003663$; $A_3 = 0,5482247$.

Приведенные здесь коэффициенты A_n ($n = 1, 2, 3$) найдены из уточненных значений собственных чисел.

Результаты расчетов безразмерных температур по формуле (14) в сравнении с точными их значениями [3] представлены графически на рисунке. В заключение отметим, что при выполнении расчётов была использован пакет *Mathcad 2000*.

Из графиков на рисунке видно, что значения температур, полученных по формуле (14), в диапазоне $0,02 \leq Fo \leq \infty$ практически

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кудинов В.А., Калашиников В.В., Карташов Э.М., Лантнев Н.И., Сергеев С.К. Тепломассоперенос и термоупругость в многослойных конструкциях. М.: Энергоатомиздат, 1997. 426 с.
2. Кудинов В.А., Аверин Б.В., Габдушев Р.Ж., Стефанюк С.А. Об одном методе определения собственных значений краевой задачи Штурма – Лиувилля // Вестн. СамГТУ. Сер. Физ.-мат. науки. 2001. Вып. 12. С. 51-56.
3. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. школа, 1967. 600 с.
4. Цой П.В. Методы расчёта задач тепломассопереноса. М.: Энергоатомиздат, 1984. 423 с.