Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. В. Бейлина, О разрешимости обратной задачи для гиперболического уравнения с интегральным условием переопределения, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 2(), 34–39

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu957>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 18:37:20

УДК 517.956.37

О РАЗРЕШИМОСТИ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНИЯ

Н. В. Бейлина

Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, 244.

E-mails: natalie@samdiff.ru

Изучается разрешимость обратной задачи для гиперболического уравнения на плоскости с неизвестной правой частью. Доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи. Доказательство существования обобщённого решения базируется на методе Галёркина, единственности — на полученной априорной оценке.

Ключевые слова: обратная задача, интегральное условие, разрешимость.

Введение. К настоящему времени появилось значительное количество работ, посвященных исследованию обратных задач с интегральным условием переопределения. Однако в подавляющем большинстве изучены задачи для параболических уравнений [1–7]. Более подробная библиография и классификация задач приведена в работах [5, 7].

В предлагаемой работе рассмотрена обратная задача нахождения неизвестной функции, входящей в правую часть гиперболического уравнения, с интегральным условием переопределения.

1. Постановка задачи. В прямоугольнике $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t < T\}$ рассмотрим следующую обратную задачу: найти пару функций $(u(x, t), p(t))$, удовлетворяющих уравнению

$$u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t) + c(x, t)u(x, t) = p(t)f(x, t) + G(x, t, u(x, t)), \quad (1)$$

начальным условиям

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2)$$

граничным условиям

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0 \quad (3)$$

и интегральному условию переопределения

$$\int_0^l K(x, t)u(x, t)dx = 0. \quad (4)$$

Функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы на отрезке $[0; l]$, а $f(x, t)$, $K(x, t)$, $G(x, t, u)$, $c(x, t)$ — в области Q_T .

Введём понятие обобщённого решения задачи (1)–(4). Заметим, что условие (4) эквивалентно следующему условию:

Бейлина Наталья Викторовна (к.ф.-м.н.), старший преподаватель, каф. высшей математики и прикладной информатики.

$$p(t) = \left(\int_0^l K(x, t) f(x, t) dx \right)^{-1} \left[\int_0^l [K(x, t) c(x, t) - K_{tt}(x, t)] u(x, t) dx + \right. \\ \left. + \int_0^l K_x(x, t) u_x(x, t) dx - 2 \int_0^l K_t(x, t) u_t(x, t) dx - \int_0^l K(x, t) G(x, t, u(x, t)) dx \right]. \quad (5)$$

Действительно, дифференцируя (4) дважды по t и учитывая, что $u(x, t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условию (3), получим (5). Обратное показывается прямым вычислением.

Обозначим

$$\hat{W}_2^1(Q_T) = \{v(x, t) : v(x, t) \in W_2^1(Q_T), v(x, T) = 0\}.$$

Умножим уравнение (1) на функцию $v(x, t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q_T . После интегрирования по частям получим

$$\int_0^T \int_0^l [-u_t(x, t) v_t(x, t) + u_x(x, t) v_x(x, t) + c(x, t) u(x, t) v(x, t)] dx dt = \\ = \int_0^T \int_0^l p(t) f(x, t) v(x, t) dx dt + \int_0^T \int_0^l G(x, t, u(x, t)) v(x, t) dx dt + \\ + \int_0^l \psi(x) v(x, 0) dx. \quad (6)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пару функций $(u(x, t), p(t))$ будем называть обобщённым решением задачи (1)–(4), если $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $u(x, 0) = \varphi(x)$, $p(t) \in L_2(0, T)$, и $(u(x, t), p(t))$ удовлетворяет (5) (в смысле равенства функций в L_2) и тождеству (6) для любой функции $v(x, t) \in \hat{W}_2^1(Q_T)$.

2. Разрешимость поставленной задачи.

ТЕОРЕМА. Если $K(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, $K_{tt}(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, $c(x, t) \in C^1(\bar{Q}_T)$, $f(x, t) \in C(\bar{Q}_T)$, $\varphi(x) \in W_2^1(0, l)$, $\psi(x) \in L_2(0, l)$, $G(x, t, u) \in C(Q_T \times \mathbb{R}^1)$, $\int_0^l K(x, t) f(x, t) dx \neq 0$ и для любых (x, t) выполняется условие Липшица $|G(x, t, u_1) - G(x, t, u_2)| \leq L|u_1 - u_2|$, то существует единственное обобщённое решение (1)–(4).

Доказательство. Из условий теоремы следует, что найдутся такие положительные константы $c_0, c_1, c_2, f_1, g_1, h_0, a_1, a_2$, что выполняются следующие неравенства:

$$\max |G(x, t, 0)| \leq g_1, \quad |f(x, t)| \leq f_1, \quad \max |K(x, t) c(x, t) - K_{tt}(x, t)| \leq a_1,$$

$$\max |K(x, t); K_t(x, t); K_x(x, t)| \leq a_2, \quad c_0 \leq |c(x, t)| \leq c_1, \quad |c_t(x, t)| \leq c_2,$$

$$\int_0^l K(x, t) f(x, t) dx = h_0 > 0.$$

Для доказательства теоремы построим последовательность приближённых решений, а затем покажем, что эта последовательность сходится к обобщённому решению поставленной задачи.

Приближённые решения $(u^m(x, t), p^m(t))$ будем искать из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_0^l [-u_t^m(x, t)v_t(x, t) + u_x^m(x, t)v_x(x, t) + c(x, t)u^m(x, t)v(x, t)] dxdt = \\ & = \int_0^T \int_0^l p^m(t)f(x, t)v(x, t)dxdt + \int_0^T \int_0^l G(x, t, u^m(x, t))v(x, t)dxdt + \\ & \quad + \int_0^l \psi(x)v(x, 0)dx. \end{aligned} \quad (7)$$

$$u^0(x, t) = 0, \quad u^m(x, 0) = \varphi_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

где $\varphi_m \xrightarrow{L_2} \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} p^m(t) = & \left(\int_0^l K(x, t)f(x, t)dx \right)^{-1} \left[\int_0^l [K(x, t)c(x, t) - K_{tt}(x, t)] \times \right. \\ & \times u^{m-1}(x, t)dx + \int_0^l K_x(x, t)u_x^{m-1}(x, t)dx - 2 \int_0^l K_t(x, t)u_t^{m-1}(x, t)dx - \\ & \left. - \int_0^l K(x, t)G(x, t, u^{m-1})dx \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Покажем, что для каждого m существует единственная функция $u^m(x, t)$, удовлетворяющая тождеству (7) и условию (8), если $p^m(t)$ известно. Для этого заметим, что тождество (7) и равенство (8) определяют обобщённое решение из $W_2^1(Q_T)$ второй начально-краевой задачи с однородными граничными условиями

$$u_{tt}^m(x, t) - u_{xx}^m(x, t) + c(x, t)u^m(x, t) = H(x, t) + G(x, t, u^m(x, t)), \quad (10)$$

$$H(x, t) = p^m(t)f(x, t),$$

$$u^m(x, 0) = \varphi^m(x), \quad u_t^m(x, 0) = \psi(x), \quad (11)$$

$$u_x^m(0, t) = u_x^m(l, t) = 0. \quad (12)$$

Применяя стандартные методы [8] и условие Липшица, которому удовлетворяет функция $G(x, t, u(x, t))$, нетрудно доказать однозначную разрешимость задачи (10)–(12). Следовательно, можно утверждать, что для любого $p^m(t)$ существует единственная функция $u^m(x, t)$, удовлетворяющая тождеству (7). Так как $p^m(t)$ находятся явным образом из (9), то можно считать, что последовательность $\{u^m(x, t), p^m(t)\}$ построена.

Для обоснования сходимости этой последовательности рассмотрим разности

$$z^m(x, t) = u^m(x, t) - u^{m-1}(x, t), \quad r^m(t) = p^m(t) - p^{m-1}(t).$$

Заметим, что для $z^m(x, t)$ справедливо тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^l [z_{tt}^m(x, t)v(x, t) + z_x^m(x, t)v_x(x, t) + \\ + c(x, t)z^m(x, t)v(x, t)] dx dt = \int_0^T \int_0^l r^m(t)f(x, t)v(x, t) dx dt + \\ + \int_0^T \int_0^l [G(x, t, u^m) - G(x, t, u^{m-1})] v(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Полагая $v(x, t) = z_t^m(x, t)$ и интегрируя по частям интегралы в левой части, получим

$$\begin{aligned} \int_0^l [(z_t^m(x, \tau))^2 + (z_x^m(x, \tau))^2 + c(x, \tau)(z^m(x, \tau))^2] dx = \\ = 2 \int_0^\tau \int_0^l r^m(t)f(x, t)z_t^m(x, t) dx dt + 2 \int_0^\tau \int_0^l c_t(x, t)(z_t^m(x, t))^2 dx dt + \\ + 2 \int_0^\tau \int_0^l [G(x, t, u^m) - G(x, t, u^{m-1})] z_t^m(x, t) dx dt. \end{aligned}$$

Применяя к правой части неравенство Юнга, элементарные неравенства, а также условия теоремы, нетрудно получить оценку

$$\begin{aligned} m \int_0^l [(z_t^m(x, \tau))^2 + (z_x^m(x, \tau))^2 + (z^m(x, \tau))^2] dx \leq \\ \leq \delta (1+L^2) \int_0^\tau \int_0^l (r^m(t))^2 dx dt + \\ + M_3 \int_0^\tau \int_0^l [(z_t^m(x, t))^2 + (z^m(x, t))^2 + (z_x^m(x, t))^2] dx dt, \quad (13) \end{aligned}$$

где $M_3 = \max \{(f_1^2 + 1)/\delta; 2c_2\}$. Применим к (13) неравенство Гронуолла [9], а затем интегрируя по τ от 0 до T , приходим к оценке

$$\|z^m\|_{W_2^1(Q)} \leq \sqrt{N_1 \delta} \|r^m(t)\|_{L_2(0, T)}, \quad (14)$$

где $N_1 = \exp(\frac{M_3 T}{m})(1 + L^2)$, $\delta > 0$ произвольно.

Оценим теперь $r^m(t)$, для которого справедливо равенство

$$\begin{aligned} r^m(t) = \left(\int_0^l K(x, t)f(x, t) dx \right)^{-1} \left[\int_0^l [K(x, t)c(x, t) - K_{tt}(x, t)] z^{m-1}(x, t) dx + \right. \\ + \int_0^l K_x(x, t)z_x^{m-1}(x, t) dx - 2 \int_0^l K_t(x, t)z_t^{m-1}(x, t) dx - \\ \left. - \int_0^l K(x, t) [G(x, t, u^{m-1}) - G(x, t, u^{m-2})] dx \right]. \quad (15) \end{aligned}$$

Возводя равенство (15) в квадрат, учитывая условия теоремы, а также то, что $z^{m-1}(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, нетрудно получить неравенство

$$\|r^m(t)\|_{L_2(0, T)} \leq \sqrt{N_2} \|z^{m-1}(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}, \quad (16)$$

где $N_2 = \max \{4a_2^2 l; 4(a_1^2 l + a_2^2 l L^2)\}$.

Из (14) и (16) вытекает, что

$$\|z^m(x, t)\|_{W_2^1(0, T)} \leq \sqrt{N_3} \|z^{m-1}(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)}, \quad (17)$$

$$\|r^m(t)\|_{L_2(0, T)} \leq \sqrt{N_3} \|r^{m-1}(t)\|_{L_2(0, T)}, \quad (18)$$

где $N_3 = N_1 N_2 \delta$.

Пользуясь произволом δ , выберем его так, чтобы $\sqrt{N_3} = q < 1$. Тогда неравенства (17) и (18) означают, что последовательность $(u^m(x, t), p^m(t))$ фундаментальна.

Так как $W_2^1(Q_T)$ и $L_2(0, T)$ — полные пространства, то фундаментальная последовательность $(u^m(x, t), p^m(t))$ сходится к элементу $(u(x, t), p(t))$, где $u(x, t) \in W_2^1(Q_T)$, $p(t) \in L_2(0, T)$. Но тогда, переходя к пределу в (7) и (9), получим соответственно тождества (6) и (5), так как из сильной сходимости следует слабая.

Таким образом, пара функций $(u(x, t), p(t))$, полученная в результате предельного перехода в $(u^m(x, t), p^m(t))$ и эквивалентных преобразований, является обобщённым решением задачи (1)–(4).

Единственность задачи (1)–(4) непосредственным образом следует из оценок (17) и (18). Действительно, полагая, что существуют два различных решения (u_1, p_1) и (u_2, p_2) , приходим к оценкам

$$(1 - q)\|u(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)} \leq 0, \quad (1 - q)\|p(t)\|_{L_2(0, T)} \leq 0,$$

где $(u, p) = (u_1 - u_2, p_1 - p_2)$. Но так как $q < 1$, то $\|u(x, t)\|_{W_2^1(Q_T)} = 0$ и $\|p(t)\|_{L_2(0, T)} = 0$. $\square$

Работа выполнена в рамках ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы, в рамках мероприятия 1.3.1 (госконтракт № П2589 от 26.11.2009)

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a control parameter in a parabolic partial differential equation // *J. Austral. Math. Soc. Ser. B*, 1991. Vol. 33, no. 2. Pp. 149–163.
2. Cannon J. R., Lin Y. Determination of a parameter $p(t)$ in some quasi-linear parabolic differential equations // *Inverse Problems*, 1998. Vol. 4, no. 1. Pp. 35–45.
3. Иванчов Н. И. Об определении зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении // *Сиб. матем. журн.*, 1998. Т. 39, № 3. С. 539–550; англ. пер.: Ivanchov N. I. On the determination of the time-dependent leading coefficient in a parabolic equation // *Siberian Math. J.*, 1998. Vol. 39, no. 3. Pp. 465–475.
4. Камынин В. Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения // *Матем. заметки*, 2005. Т. 77, № 4. С. 522–534; англ. пер.: Kamynin V. L. On the inverse problem of determining the right-hand side of a parabolic equation under an integral overdetermination condition // *Math. Notes*, 2005. Vol. 77, no. 4. Pp. 482–493.
5. Кожанов А. И. О разрешимости обратной задачи нахождения коэффициента теплопроводности // *Сиб. матем. журн.*, 2005. Т. 46, № 5. С. 1053–1071; англ. пер.: Kozhanov A. I. Solvability of the inverse problem of finding thermal conductivity // *Siberian Math. J.*, 2005. Vol. 46, no. 5. Pp. 841–856.

6. Прилепко А. И., Костин А. Б. О некоторых обратных задачах для параболических уравнений с финальным и интегральным наблюдением // *Матем. сб.*, 1992. Т. 183, № 4. С. 49–68; англ. пер.: *Prilepko A. I., Kostin A. B. On certain inverse problems for parabolic equations with final and integral observation* // *Russian Acad. Sci. Sb. Math.*, 1993. Vol. 75, no. 2. Pp. 473–490.
7. Прилепко А. И., Ткаченко Д. С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2003. Т. 43, № 4. С. 562–570; англ. пер.: *Prilepko A. I., Tkachenko D. S. Properties of solutions of a parabolic equation and the uniqueness of the solution of the inverse source problem with integral overdetermination* // *Comput. Math. Math. Phys.*, 2003. Vol. 43, no. 4. Pp. 537–546.
8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уралъцева Н. Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1967. 736 с.; англ. пер.: *Ladyzenskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N. Linear and quasi-linear equations of parabolic type* / *Translations of Mathematical Monographs*. Vol. 23. Providence, R.I.: American Mathematical Society, 1968. 648 pp.
9. Gårding L. Cauchy's problem for hyperbolic equations / *Lecture notes*. Chicago, Ill, USA: University of Chicago, 1957; русск. пер.: *Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений*. М.: Иностран. лит., 1961. 120 с.

Поступила в редакцию 25/IV/2011;
в окончательном варианте — 05/V/2011.

MSC: 35R30; 35L10

ON SOLVABILITY OF A INVERSE PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATION WITH AN INTEGRAL OVERDETERMINATION CONDITION

N. V. Beilina

Samara State Technical University,
244, Molodogvardeyskaya st., Samara, 443100, Russia.
E-mails: natalie@samdiff.ru

In this paper we study an inverse problem with an integral overdetermination condition for a hyperbolic equation with an unknown coefficient in equation. The existence and uniqueness of a solution is proved with the help of an a-priory estimate and Galyorkin procedure.

Key words: *inverse problem, integral condition, solvability.*

Original article submitted 25/IV/2011;
revision submitted 05/V/2011.

Natalya V. Beilina (Ph.D. (Phys. & Math.)), Senior Teacher, Dept. of Higher Mathematics & Applied Informatics.