Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Заусаев, А. Г. Ольхин, Численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий–Плутон) с учетом релятивистских эффектов, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2002, выпуск 16, 53–56

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu96>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 07:51:08

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ПЛАНЕТ (МЕРКУРИЙ – ПЛУТОН) С УЧЕТОМ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭФФЕКТОВ

Проведено численное интегрирование уравнений движения больших планет (Меркурий-Плутон) на 1000 -летнем интервале времени с учетом и без учета релятивистских эффектов. Показано, что при исследовании эволюции орбит больших планет на интервале времени порядка 1000 и более лет необходим учет релятивистских эффектов для каждой внутренней планеты (Меркурий – Марс).

Дифференциальные уравнения движения в ньютоновской задаче n-тел в прямоугольной системе координат с началом в центре солнца в матричной форме имеют следующий вид:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -k^2 (1 + m) \frac{X}{r^3} + \sum_{i=1}^9 k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right), \quad (1)$$

где X – матрица столбец с элементами x, y, z ; X_i – матрица-столбец с элементами x_i, y_i, z_i ; m, x, y, z – масса и гелиоцентрические координаты возмущаемой планеты; m_i, x_i, y_i, z_i – масса и гелиоцентрические координаты возмущающих планет; r, Δ, r_i – расстояния, вычисляемые по формулам

$$r = x^2 + y^2 + z^2; \quad \Delta_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2; \quad r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2. \quad (2)$$

Уравнения (1) являются нерелятивистскими уравнениями движения, которые длительное время использовались для исследования движения больших планет. Однако в середине XIX в. Леверье впервые установил, что теоретическое вековое смещение перигелия Меркурия, полученное на основании решения уравнений (1), отличается от наблюдаемого. Полученный результат дал основание усомниться в достоверности нерелятивистских уравнений (1) и побудил исследователей к построению новых теорий движения больших планет.

С созданием специальной теории относительности, фундамент которой заложили Лоренц, Пуанкаре и Эйнштейн, произошел радикальный пересмотр почти всех понятий механики. Поэтому форма законов тяготения, допускающая передачу гравитационного взаимодействия с бесконечной скоростью, оказалась несовместимой с новыми представлениями.

Разработанная Эйнштейном общая теория относительности позволила в дальнейшем создать релятивистскую небесную механику, свободную от вышеуказанного противоречия.

Общая теория относительности наряду с уточнениями уравнений содержит введение новых представлений и понятий, согласно которым: а) гравитационное поле общей теории относительности описывается как проявление свойств метрики пространства-времени; б) движение частицы в гравитационном поле есть движение по инерции с псевдоримановой пространственно – временной метрикой; в) метрика пространства-времени зависит от распределения и состояния масс.

Наиболее простой вид уравнения поля получается в линейной теории для слабых полей, т.е. когда поправки к галилеевым значениям метрики настолько малы, что их квадратами и производными можно пренебречь.

Важным случаем как в теоретическом, так и в практическом отношении является сферически симметричное поле, создаваемое одним неподвижным телом сферической структуры. Задача определения поля тяготения сферически симметричного тела называется задачей Шварцшильда. Решение задачи Шварцшильда является одним из немногих известных точных решений уравнений поля общей теории относительности. Гелиоцентрические релятивистские уравнения движения планет с учетом лишь ньютоновских и шварцшильдовских членов можно записать в следующем виде [2]:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = -k^2 (1 + m) \frac{X}{r^3} + \sum_{i=1}^n k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta_i^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \frac{k^2}{c^2} \left[(4 - 2\alpha) \frac{k^2}{r^4} X - (1 + \alpha) \frac{\dot{X}^2}{r^3} X + 3\alpha \frac{(X \dot{X})}{r^5} X + (4 - 2\alpha) \frac{X \dot{X}}{r^3} \dot{X} \right], \quad (3)$$

где α – параметр, характеризующий выбор системы координат (для стандартной прямоугольной системы координат $\alpha=1$); c – скорость света в пустоте; $\dot{X}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$;

$X\dot{X} = x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}$; $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ – проекции скорости; время, входящее в уравнение (2) – координатное.

После подстановки значения параметра $\alpha=1$, уравнения (3) в прямоугольной декартовой системе координат запишутся в виде

$$\ddot{X} = -k^2(1+m) + \sum_{i=1}^n k^2 m_i \left(\frac{X_i - X}{\Delta^3} - \frac{X_i}{r_i^3} \right) + \frac{k^2}{c^2} \left[2 \frac{k^2}{r^4} X - 2 \frac{\dot{X}^2}{r^3} X + 3 \frac{X\dot{X}}{r^5} X + 2 \frac{X\dot{X}}{r^3} \dot{X} \right]. \quad (4)$$

Для учета влияния релятивистских эффектов проведены решения уравнений движения (1) и (4) методом Эверхарта на 1000 лет вперед. Начальные положения координат и скоростей больших планет отнесены к эпохе 1949, дек 30 ET = 2433280,5 JD (ET – всемирное время, JD – юлианская дата) [1].

Результаты вычислений представлены в табл. 1 и 2, где T – время в юлианских днях; M – средняя аномалия; a – большая полуось; e – эксцентриситет; w – аргумент перигелия; Ω – долгота узла; i – наклонение. Элементы орбит M, ω , Ω и i приведены в градусах и долях градусов, a – в астрономических единицах.

Т а б л и ц а 1

Элементы орбит, вычисленные без учета релятивистских эффектов

T=2469805.5	M	a	e	ω	Ω	i
Меркурий	22.978784	0.387095	0.205642	29.211147	47.614819	6.99792
Венера	146.297726	0.723335	0.006768	54.755834	75.953689	3.393317
Земля	355.071781	1.000002	0.01667	288.993557	173.440626	0.012763
Марс	228.248625	1.523621	0.093571	286.673534	48.881457	1.842399
Юпитер	96.224222	5.207719	0.048665	274.921105	99.982409	1.306736
Сатурн	207.606007	9.517922	0.055456	339.428787	112.938523	2.492407
Уран	358.040349	19.279836	0.0515	94.151449	73.8696	0.77206
Нептун	353.662001	30.211806	0.011262	288.252962	131.262909	1.774602
Плутон	88.280683	39.404446	0.248943	112.69555	109.732901	17.167853
T=2626905.5	M	a	e	ω	Ω	i
Меркурий	46.64797	0.387025	0.205618	30.33073	47.11794	6.974521
Венера	217.6415	0.723331	0.006534	55.87099	74.84935	3.389846
Земля	351.3331	0.999993	0.016504	291.3843	172.3824	0.063744
Марс	107.6074	1.523596	0.093814	289.4943	47.72685	1.811995
Юпитер	357.3694	5.208287	0.049957	273.5794	100.0459	1.305841
Сатурн	51.73127	9.533254	0.055456	342.1041	111.9415	2.505769
Уран	270.3882	19.26281	0.047168	93.57951	73.87447	0.769039
Нептун	166.6632	29.99421	0.011677	267.1435	131.2847	1.776358
Плутон	306.2047	39.41582	0.247315	113.9562	109.5965	17.14411
T=2798530.5	M	a	e	ω	Ω	i
Меркурий	15.35872	0.386951	0.205639	31.72246	46.49541	6.945413
Венера	126.7604	0.723335	0.006362	57.33883	73.46443	3.384002
Земля	346.8652	1.000003	0.01628	294.1532	171.0726	0.127253
Марс	46.70206	1.523734	0.094139	293.1254	46.27724	1.772839
Юпитер	51.03478	5.207995	0.049564	274.713	100.1319	1.305196
Сатурн	32.7664	9.574752	0.054409	348.327	110.6784	2.510459
Уран	250.3921	19.30264	0.047223	93.63451	74.02749	0.766914
Нептун	163.0978	30.01514	0.012187	280.5648	131.2085	1.776225
Плутон	310.845	39.63206	0.248665	113.0107	109.4848	17.11749

Элементы орбит, вычисленные с учетом релятивистских эффектов

T=2469805.5	M	<i>a</i>	<i>e</i>	ω	Ω	<i>i</i>
Меркурий	22.96389	0.387095	0.205642	29.22309	47.61482	6.99792
Венера	146.2953	0.723335	0.006768	54.75822	75.95369	3.393317
Земля	355.0707	1.000002	0.01667	288.9946	173.4406	0.012763
Марс	228.2483	1.523621	0.093571	286.6739	48.88146	1.842399
Юпитер	96.2242	5.207719	0.048665	274.9211	99.98241	1.306736
Сатурн	207.606	9.517922	0.055456	339.4288	112.9385	2.492407
Уран	358.0403	19.27984	0.0515	94.15145	73.8696	0.77206
Нептун	353.662	30.21181	0.011262	288.253	131.2629	1.774602
Плутон	88.28068	39.40445	0.248943	112.6956	109.7329	17.16785
T=2626905.5	M	<i>a</i>	<i>e</i>	ω	Ω	<i>i</i>
Меркурий	46.54346	0.387025	0.205618	30.39051	47.11784	6.974518
Венера	217.6293	0.723331	0.006534	55.88301	74.84936	3.389846
Земля	351.3276	0.999993	0.016504	291.3898	172.3823	0.063744
Марс	107.6058	1.523596	0.093814	289.4961	47.72686	1.811995
Юпитер	357.3693	5.208287	0.049957	273.5795	100.0459	1.305841
Сатурн	51.73125	9.533253	0.055456	342.1042	111.9415	2.505769
Уран	270.3882	19.26281	0.047168	93.57951	73.87447	0.769039
Нептун	166.6632	29.99421	0.011677	267.1435	131.2847	1.776358
Плутон	306.2047	39.41582	0.247315	113.9562	109.5965	17.14411
T=2798530.5	M	<i>a</i>	<i>e</i>	ω	Ω	<i>i</i>
Меркурий	15.07496	0.386951	0.205639	31.84218	46.49503	6.945401
Венера	126.7363	0.723335	0.006362	57.36262	73.46444	3.384003
Земля	346.854	1.000003	0.01628	294.1641	171.0724	0.127253
Марс	46.69891	1.523734	0.094139	293.1292	46.27724	1.772839
Юпитер	51.0346	5.207995	0.049564	274.7132	100.1319	1.305196
Сатурн	32.76637	9.574752	0.054409	348.327	110.6784	2.510459
Уран	250.3921	19.30264	0.047223	93.6345	74.02749	0.766914
Нептун	163.0978	30.01514	0.012187	280.5648	131.2085	1.776225
Плутон	310.845	39.63206	0.248665	113.0107	109.4848	17.11749

Т а б л и ц а 3

Значения разности средних аномалий и аргументов перигелиев

	T=2469805.5		T=2626905.5		T=2798530.5	
	ΔM	$\Delta \omega$	ΔM	$\Delta \omega$	ΔM	$\Delta \omega$
Меркурий	-53.604	42.9984	-376.2252	215.226	-1021.525	430.9812
Венера	-8.6652	8.5896	-43.6752	43.2648	-86.5656	85.6332
Земля	-3.978	3.8988	-19.998	19.584	-40.2804	39.4416
Марс	-1.1304	1.3464	-5.6592	6.7428	-11.3256	13.4784
Юпитер	-0.0648	0.0612	-0.324	0.3096	-0.6516	0.6192
Сатурн	-0.0108	0.0144	-0.0432	0.0504	-0.1044	0.0972
Уран	0	0	-0.0036	0.0036	-0.0036	0.0036
Нептун	-0.0036	0.0036	-0.0036	0.0036	-0.1332	0.1404
Плутон	-0.0036	0	-0.0036	0	-0.018	0.0108

Как видно из табл. 1 и 2 большие полуоси *a* и эксцентриситеты *e* орбит всех планет наиболее устойчивы на тысячелетнем интервале времени. Аргументы перигелиев - ω и долготы восходящих узлов Ω изменяются поступательно, причем аргументы перигелиев со временем увеличиваются, а долготы узлов уменьшаются. Наклонения *i* орбит к плоскости эклиптики у различных планет изменяются по-разному, при этом их изменения носят колебательный характер.

Из сопоставления результатов вычислений элементов орбит на соответствующие моменты времени, полученных с учетом и без учета релятивистских эффектов (см. табл. 1 и 2) следует, что большие полуоси, эксцентриситеты, долготы восходящих узлов и наклоны орбит для каждой планеты отличаются друг от друга незначительно. Таким образом, учет релятивистских эффектов не оказывает существенного влияния на изменение этих элементов. Наибольшее влияние релятивистских эффектов сказывается на смещении средних аномалий и аргументов перигелиев внутренних планет (Меркурий – Марс). В табл. 3 приведены разности средних аномалий - ΔM и аргументов перигелиев - $\Delta \omega$ на различные моменты времени, характеризующие влияние релятивистских эффектов. Как видно из табл. 3, учет релятивистских эффектов приводит к дополнительному росту аргументов перигелиев почти всех планет, в то время как средние аномалии со временем уменьшаются. Вековые перемещения перигелиев Меркурия, Венеры, Земли и Марса, полученные нами численным методом, вполне удовлетворительно согласуются с теоретическими [2], так как максимальное расхождение в смещении перигелия Меркурия составляет всего $0^{\circ}03$ (три сотые секунды дуги за столетие). Кроме того, из табл. 3 также следует, что для всех планет, кроме Меркурия, прогрессивному увеличению $\Delta \omega$, полученному за счет учета релятивистских эффектов, соответствует уменьшение ΔM почти на ту же величину.

Однако смещение аргумента перигелия Меркурия подобной закономерностью не обладает, так как разность $|\Delta M - \Delta \omega|$ со временем увеличивается. Полученный результат требует в дальнейшем детального исследования.

В заключение следует отметить, что при разработке точных теорий движения внутренних планет (Меркурий – Марс) на интервале времени порядка тысячи и более лет наряду с ньютоновскими силами необходим учет релятивистских эффектов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абалкин В.К., Аксенов Е.П., Гребеников Е.А., Рябов Ю.А. Справочное руководство по небесной механике и астродинамике. М.: Наука, 1976. 800 с.
2. Брумберг В.А. Релятивистская небесная механика. М.: Наука, 1972. 383с.
3. Everhart E. Implicit single methods for integrating orbits // Celestial mechanics. 1974. 10. P. 35 –55.