Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Асхабов, Нелинейные уравнения с весовыми операторами типа потенциала в пространствах Лебега, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2011, выпуск 4(), 160–164

DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu975>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 15:03:49

УДК 517.968.4

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ВЕСОВЫМИ ОПЕРАТОРАМИ
ТИПА ПОТЕНЦИАЛА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

С. Н. Асхабов

Чеченский государственный университет,
364907, Грозный, ул. А. Шерипова, 32.

E-mail: askhabov@yandex.ru

*Методом монотонных операторов для различных классов нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала доказаны глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений в пространствах Лебега.***Ключевые слова:** нелинейные уравнения, оператор типа потенциала, монотонный оператор.

В вещественных пространствах $L_p(R^1) = L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, рассматриваются нелинейные интегральные уравнения вида

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)] F(t, u(t))}{|x - t|^{1-\alpha}} dt = f(x), \quad (1)$$

$$u(x) + F\left(x, \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)] u(t)}{|x - t|^{1-\alpha}} dt\right) = f(x), \quad (2)$$

для которых методом монотонных (по Браудеру—Минти) операторов (см., например, [1]) доказываются глобальные теоремы о существовании, единственности и оценках решений.

Для упрощения записей введём следующие обозначения:

$$L_p(R^1) = L_p, \quad \|\cdot\|_{L_p(R^1)} = \|\cdot\|_p, \quad p' = \frac{p}{p-1}, \quad \langle u, v \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) v(x) dx,$$

$$(I^\alpha u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t) dt}{|x - t|^{1-\alpha}}, \quad (A^\alpha u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)] u(t)}{|x - t|^{1-\alpha}} dt.$$

В силу известной теоремы Харди—Литтлвуда (см., например, [1]) оператор типа потенциала I^α действует непрерывно из L_p в $L_{p/(1-\alpha p)}$, если $0 < \alpha < 1$ и $1 < p < 1/\alpha$, причём

$$\|I^\alpha u\|_{p/(1-\alpha p)} \leq \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|u\|_p \quad \forall u \in L_p, \quad (3)$$

где $\|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)}$ есть норма оператора $I^\alpha : L_p \rightarrow L_{p/(1-\alpha p)}$.

Справедливы следующие (двойственные) леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $2/(1+\alpha) < p < 1/\alpha$ и $a \in L_{p/[p(1+\alpha)-2]}$. Тогда оператор A^α действует непрерывно из L_p в $L_{p'}$, причём

$$\|A^\alpha u\|_{p'} \leq 2 \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|u\|_p, \quad (4)$$

$$\langle A^\alpha u, u \rangle = 0 \quad \forall u(x) \in L_p. \quad (5)$$

Султан Нажмудинович Асхабов (д.ф.-м.н., доц.), декан, факультет математики и компьютерных технологий.

ЛЕММА 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $1/(1-\alpha) < p < 2/(1-\alpha)$ и $a \in L_{p/[2-p(1-\alpha)]}$. Тогда оператор A^α действует непрерывно из $L_{p'}$ в L_p , причём

$$\|A^\alpha u\|_p \leq 2 \|I^\alpha\|_{p/(1+\alpha p) \rightarrow p} \|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]} \|u\|_{p'}, \quad (6)$$

$$\langle A^\alpha u, u \rangle = 0 \quad \forall u(x) \in L_{p'}. \quad (7)$$

Лемма 1 доказана в [3]. Докажем лемму 2.

Доказательство. Пусть $u \in L_{p'}$. Тогда, применяя неравенство Гёльдера с показателями $(1+\alpha p)/(p-1)$ и $(1+\alpha p)/[2-p(1-\alpha)]$, имеем

$$\|a \cdot u\|_{p/(1+\alpha p)} \leq \|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]} \|u\|_{p'}. \quad (8)$$

Итак, $a \cdot u \in L_{p/(1+\alpha p)}$. Так как $1 < p/(1+\alpha p) < 1/\alpha$ (первое неравенство равносильно условию, что $1/(1-\alpha) < p$, а второе — очевидно), согласно теореме Харди—Литтлвуда $I^\alpha(a u) \in L_p$, поскольку

$$\frac{\frac{p}{1+\alpha p}}{1 - \frac{\alpha p}{1+\alpha p}} = p,$$

причём

$$\|I^\alpha(a \cdot u)\|_p \leq \|I^\alpha\|_{p/(1+\alpha p) \rightarrow p} \|a \cdot u\|_{p/(1+\alpha p)}.$$

Воспользовавшись оценкой (8), из последнего неравенства получаем

$$\|I^\alpha(a \cdot u)\|_p \leq \|I^\alpha\|_{p/(1+\alpha p) \rightarrow p} \|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]} \|u\|_{p'}. \quad (9)$$

Обозначим $I^\alpha u = v$. Так как $u \in L_{p'}$ и $1 < p' < 1/\alpha$ (первое неравенство очевидно, а второе равносильно условию, что $1/(1-\alpha) < p$), согласно теореме Харди—Литтлвуда $I^\alpha u \in L_q$, где

$$q = \frac{p'}{1 - \alpha p'} = \frac{p}{p(1-\alpha) - 1},$$

т. е. $v = I^\alpha u \in L_{p/[p(1-\alpha)-1]}$, $\forall u \in L_{p'}$, причём, в силу неравенства (3),

$$\|I^\alpha u\|_{p/[p(1-\alpha)-1]} \leq \|I^\alpha\|_{p/(p-1) \rightarrow p/[p(1-\alpha)-1]} \|u\|_{p'}. \quad (10)$$

Далее, применяя неравенство Гёльдера с показателями $1/[p(1-\alpha)-1]$ и $1/[2-p(1-\alpha)]$, имеем

$$\|a \cdot I^\alpha u\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |a(x)|^p |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]} \|I^\alpha u\|_{p/[p(1-\alpha)-1]}.$$

Поэтому с учётом оценки (10) сразу получаем

$$\|a \cdot I^\alpha u\|_p \leq \|I^\alpha\|_{p/(p-1) \rightarrow p/[p(1-\alpha)-1]} \|a\|_{p/[2-p(1-\alpha)]} \|u\|_{p'}. \quad (11)$$

Так как $A^\alpha u = a \cdot I^\alpha u - I^\alpha(a \cdot u)$, из неравенств (9) и (11) следует, что оператор A^α действует непрерывно из $L_{p'}$ в L_p . Используя для оценки $\|A^\alpha u\|_p$ сначала неравенство Минковского, затем оценки (9), (11) и очевидное (см., например, [2, с. 247]) равенство $\|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} = \|I^\alpha\|_{p/[p(1+\alpha)-1] \rightarrow p'}$ (поскольку I^α самосопряжённый оператор), легко получаем неравенство (6)).

Осталось доказать равенство (7). Так как оператор I^α является симметрическим

$$\langle A^\alpha u, u \rangle = \langle a I^\alpha u, u \rangle - \langle I^\alpha(a u), u \rangle = \langle I^\alpha u, a u \rangle - \langle a u, I^\alpha u \rangle = 0,$$

что и требовалось доказать. $\square$

Приступим теперь к исследованию нелинейного уравнения (1), содержащего оператор A^α . Обозначим через L_p^+ множество всех неотрицательных функций из L_p . Всюду далее предполагается, что функция $F(x, t)$, порождающая оператор Немыцкого $Fu = F[x, u(x)]$, определена при $x \in \mathbb{R}^1$, $t \in \mathbb{R}^1$ и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном t и непрерывна по t почти для всех x .

ТЕОРЕМА 1. Пусть $0 < \alpha < 1$, $1/(1-\alpha) < p < 2/(1-\alpha)$ и $a \in L_{p/[2-p(1-\alpha)]}$. Если нелинейность $F(x, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $|F(x, t)| \leq c(x) + d_1 |t|^{p-1}$, где $c(x) \in L_{p'}$, $d_1 > 0$;
- 2) $F(x, t)$ строго возрастает по t почти при каждом фиксированном x ;
- 3) $F(x, t) \cdot t \geq d_2 |t|^p - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+$, $d_2 > 0$,

то уравнение (1) имеет единственное решение $u^* \in L_p$ при любом $f \in L_p$. Кроме того, если условия 1) и 3) выполнены при $c(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^*\|_p \leq d_1 d_2^{-1} \|f\|_p. \quad (12)$$

Доказательство. Из условий 1)–3) в силу теорем 2.1, 2.2 и оценки (2.3) из [1] вытекает, что оператор Немыцкого F , порождённый функцией $F(x, t)$, отображает пространство L_p на сопряжённое с ним пространство $L_{p'}$, непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Поэтому в силу леммы 2.1 из [1] существует обратный оператор F^{-1} , отображающий $L_{p'}$ на L_p , хеминепрерывный, строго монотонный и коэрцитивный. Из леммы 2 вытекает, что оператор A^α действует из $L_{p'}$ в L_p , непрерывен и положителен. Значит, оператор $\Phi = F^{-1} + A^\alpha$ отображает $L_{p'}$ на L_p , хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по теореме Браудера–Минти (см. теорема 1.1 из [1]), уравнение $F^{-1}v + A^\alpha v = f$ имеет единственное решение $v^* \in L_{p'}$. Но тогда непосредственно проверяется, что $u^* = F^{-1}v^* \in L_p$ является решением уравнения $u + A^\alpha Fu = f$, т. е. данного уравнения (1), и это решение u^* является единственным в L_p (что легко доказывается методом от противного).

Осталось доказать оценку (12). Используя условия 1) и 3) при $c(x) = D(x) = 0$, равенство (7) и равенство $u^* + A^\alpha Fu^* = f$, имеем

$$\begin{aligned} d_2 \|u^*\|_p^p &\leq \langle u^*, Fu^* \rangle = \langle u^* + A^\alpha Fu^*, Fu^* \rangle = \langle f, Fu^* \rangle \leq \\ &\leq d_1 \|f\|_p \|Fu^*\|_{p'} \leq d_1 \|f\|_p \|u^*\|_p^{p-1}, \end{aligned}$$

откуда непосредственно получаем оценку (12). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $1/2 < \alpha < 3/4$ и $a \in L_{2/(2\alpha-1)}$, то при любом $f \in L_4$ уравнение

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)] u^3(t)}{|x - t|^{1-\alpha}} dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_4$, причём $\|u^*\|_4 \leq \|f\|_4$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $0 < \alpha < 1/4$ и $a \in L_{2/(1+2\alpha)}$, то при любом $f \in L_{4/3}$ уравнение

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)] u^{1/3}(t)}{|x - t|^{1-\alpha}} dt = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}$, причём $\|u^*\|_{4/3} \leq \|f\|_{4/3}$.

В следующей теореме, относящейся к нелинейному уравнению (2), условия на нелинейность $F(x, t)$ подбираются так, чтобы порождаемый ею оператор Немыцкого F действовал непрерывно из $L_{p'}$ в L_p и был строго монотонным и коэрцитивным.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $0 < \alpha < 1$, $2/(1 + \alpha) < p < 1/\alpha$ и $a \in L_{p/[p(1+\alpha)-2]}$. Если нелинейность $F(x, t)$ удовлетворяет следующим условиям:

- 4) $|F(x, t)| \leq g(x) + d_3 |t|^{1/(p-1)}$, где $g(x) \in L_p^+$, $d_3 > 0$;
- 5) $F(x, t)$ строго возрастает по t почти при каждом фиксированном x ;
- 6) $F(x, t) \cdot t \geq d_4 |t|^{p/(p-1)} - D(x)$, где $D(x) \in L_1^+$, $d_4 > 0$,

то уравнение (2) имеет единственное решение $u^* \in L_p$ при любом $f \in L_p$. Кроме того, если условия 4) и 6) выполнены при $g(x) = D(x) = 0$, то справедлива оценка

$$\|u^* - f\|_p \leq (2 d_3^p d_4^{-1} \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|f\|_p)^{1/(p-1)}. \quad (13)$$

Доказательство. Из леммы 1 и условий 4)–6) вытекает, соответственно, что весовой оператор типа потенциала A^α действует из L_p в $L_{p'}$, непрерывен и положителен, а оператор Немыцкого F действует, наоборот, из $L_{p'}$ в L_p , непрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Значит, по лемме 2.1 из [1], существует хеминепрерывный, строго монотонный, коэрцитивный обратный оператор F^{-1} , действующий из L_p в $L_{p'}$.

Запишем данное уравнение (2) в операторном виде: $u + FA^\alpha u = f$. Полагая в нём $u = f - v$ и применяя затем к обеим частям получившегося уравнения оператор F^{-1} , приходим к уравнению $\Phi v = A^\alpha f$, где $\Phi v = F^{-1}v + A^\alpha v$. В силу указанных выше свойств операторов A^α и F^{-1} оператор Φ действует из L_p в $L_{p'}$, хеминепрерывен, строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, по теореме Браудера—Минти (см. теорему 1.1 из [1]), уравнение $\Phi v = A^\alpha f$ имеет единственное решение $v^* \in L_p$. Но тогда непосредственно проверяется, что уравнение $u + FA^\alpha u = f$, т.е. данное уравнение (2), имеет решение $u^* = f - v^* \in L_p$. Единственность этого решения u^* легко устанавливается методом от противного.

Осталось доказать оценку (13). Воспользуемся равенствами $u^* + FA^\alpha u^* = f$, $F^{-1}v^* + A^\alpha v^* = A^\alpha f$, где $u^* = f - v^*$. Положим $w = F^{-1}v^*$. Тогда $Fw = v^*$. Используя условия 4) и 6) при $g(x) = D(x) = 0$, неравенство (4), равенство (5) и неравенство Гёльдера, имеем

$$\begin{aligned} d_4 \|w\|_{p'}^{p'} &\leq \langle Fw, w \rangle = \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle = \langle v^*, F^{-1}v^* \rangle + \langle v^*, A^\alpha v^* \rangle = \\ &= \langle v^*, A^\alpha f \rangle \leq \|v^*\|_p \|A^\alpha f\|_{p'} \leq 2 \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|f\|_p \|v^*\|_p = \\ &= 2 \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|f\|_p \|Fw\|_p \leq \\ &\leq 2 d_3 \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|f\|_p \|w\|_{p'}^{p'-1}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|w\|_{p'} \leq 2 d_3 d_4^{-1} \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|f\|_p. \quad (14)$$

Так как $\|f - u^*\|_p = \|v^*\|_p = \|Fw\|_p \leq \|w\|_{p'}^{p'-1}$, используя оценку (14) с учётом, что $p' - 1 = 1/(p - 1)$, получаем

$$\|u^* - f\|_p \leq d_3 (2 d_3 d_4^{-1} \|I^\alpha\|_{p \rightarrow p/(1-\alpha p)} \|a\|_{p/[p(1+\alpha)-2]} \|f\|_p)^{1/(p-1)},$$

что равносильно доказываемой оценке (13). $\square$

СЛЕДСТВИЕ 3. Если $0 < \alpha < 1/4$ и $a \in L_{2/(1+2\alpha)}$, то при любом $f \in L_4$ уравнение

$$u(x) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)] u(t)}{|x - t|^{1-\alpha}} dt \right)^{1/3} = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_4$, причём

$$\|u^* - f\|_4 \leq (2 \|I^\alpha\|_{4 \rightarrow 4/(1-4\alpha)} \|a\|_{2/(1+2\alpha)} \|f\|_4)^{1/3}.$$

СЛЕДСТВИЕ 4. Если $1/2 < \alpha < 3/4$ и $a \in L_{2/(2\alpha-1)}$, то при любом $f \in L_{4/3}$ уравнение

$$u(x) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{[a(x) - a(t)] u(t)}{|x - t|^{1-\alpha}} dt \right)^3 = f(x)$$

имеет единственное решение $u^* \in L_{4/3}$, причём

$$\|u^* - f\|_{4/3} \leq (2 \|I^\alpha\|_{4/3 \rightarrow 4/(3-4\alpha)} \|a\|_{2/(2\alpha-1)} \|f\|_{4/3})^3.$$

Вопрос о приближённом решении уравнений (1) и (2) рассмотрен в [4].

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Асхабов С. Н. Нелинейные уравнения типа свёртки. М.: Физматлит, 2009. 304 с. [Askhabov S. N. Nonlinear equations of convolution type. Moscow: Fizmatlit, 2009. 304 pp.]
2. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Физматлит, 2004. 570 с. [Kolmogorov A. N., Fomin S. V. Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis. Moscow: Fizmatlit, 2004. 570 pp.]
3. Асхабов С. Н. Об одном нелинейном уравнении с весовым оператором типа потенциала / В сб.: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи. Самара: СамГТУ, 2011. С. 24–27. [Askhabov S. N. On a nonlinear equation with a potential-type weighing operator / In: Proceedings of the Eighth All-Russian Scientific Conference with international participation. Part 3 / Matem. Mod. Kraev. Zadachi. Samara: SamGTU, 2011. Pp. 24–27].
4. Асхабов С. Н. Приближённое решение нелинейных уравнений с весовыми операторами типа потенциала // Уфимск. матем. журн., 2011. Т. 3, № 4. С. 8–13. [Askhabov S. N. Approximate solution of nonlinear equations with weighted potential type operators // Ufmsk. Mat. Zh., 2011. Vol. 3, no. 4. Pp. 8–13].

Поступила в редакцию 28/VI/2011;
в окончательном варианте — 27/VII/2011.

MSC: 45G10

NONLINEAR EQUATIONS WITH WEIGHTED POTENTIAL TYPE OPERATORS IN LEBESGUE SPACES

S. N. Askhabov

Chechen State University,
32, A. Sheripova st., Groznyi, 364907, Russia.
E-mail: askhabov@yandex.ru

By method of monotone operators, existence and uniqueness theorems are proved for some classes of nonlinear equations with weighted potential type operators in Lebesgue spaces.

Key words: *nonlinear equations, potential type operator, monotone operator.*

Original article submitted 28/VI/2011;
revision submitted 27/VII/2011.

Sultan N. Askhabov (Dr. Sci. (Phys. & Math.)), Dean of Faculty, Faculty of Mathematics and Computer Technology.